ЛИТЕРАТУРА

1. *Вагнер Э. А., Демин В. Г., Исаев Ю. Н.* Численный метод построения периодических решений задачи о движении тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой.— В сб.: Проблемы механики управляемого движения. Оптимизация управления космическими аппаратами. Изд. Пермск. ун-та, 1976.
2. *Вагнер Э. А., Демин В. Г.* Об одном классе периодических движений тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 5, с. 927.
3. *Колосов В. Г.* Об одном свойстве задачи С. В. Ковалевской о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.— Тр. Отделения физических наук Общества любителей естествознания, 1901, т. 1, вып. 1.
4. *Henon M.* Exploration numerique du probléme restreint. I. Masses égales. Onbites pewidiques.— Ann. astrophys., 1965, v. 28, No. 3.
5. *Демин В. Г., Курчанова М. В.* Численное исследование периодических орбит в ограниченной упрощенной осредненной эллиптической задаче трех тел.— Космические исследования, 1977, т. 15, вып. 5.

Египет

Поступила в редакцию 22.II.1980

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В ЦЕЛОМ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ДВУХ НУЛЕВЫХ КОРНЕЙ

Леонов Г. А.

Известные результаты [1, 2] о необходимых условиях устойчивости в целом двумерных динамических систем распространяются на классы систем произвольной размерности.

1. Рассмотрим уравнения системы непрямого автоматического регулирования [3]

$$z^{\cdot} = Az + b\varphi_1(\sigma),\ \sigma^{\cdot} = c^*z - \rho\varphi_2(\sigma) \tag{1.1}$$

предполагая, что постоянная $n \times n$-матрица A имеет одно нулевое собственное значение и $n - 1$ — собственное значение с отрицательными вещественными частями, b, c — постоянные n-векторы, ρ — число, $\varphi_1(\sigma)$ и $\varphi_2(\sigma)$ — непрерывные и ограниченные на $(-\infty, +\infty)$ функции, удовлетворяющие соотношению $\varphi_1(\sigma)\varphi_2(\sigma) \geqslant 0$, $\forall\, \sigma \in (-\infty, +\infty)$, звездочка означает транспонирование. В дальнейшем предполагаем также непустоту множества $\{\sigma \mid \varphi_1(\sigma) \geqslant 0,\ \sigma \geqslant \beta\}$, $\forall\, \beta \in (-\infty, +\infty)$ и совпадение множеств нулей функций $\varphi_1(\sigma)$ и $\varphi_2(\sigma)$.

Введем в рассмотрение функцию $\chi_1(p) = c^*(A - pI)^{-1}b$, где p — комплексное число, I — единичная матрица и обозначения

$$\varkappa = \lim_{p\to 0} p\,\chi_1(p),\ \chi_2(p) = \chi_1(p) - \varkappa p^{-1}$$

Теорема. Пусть $\varkappa > 0$, $\rho \geqslant 0$ и для системы второго порядка

$$\eta^{\cdot} = -\varphi_1(\theta),\quad \theta^{\cdot} = \eta - \sqrt{\frac{4}{\varkappa}}\,(\tau\varphi_1(\theta) + \rho\varphi_2(\theta)) \tag{1.2}$$

где τ — положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$\tau > \operatorname{Re}\chi_2(i\omega) + \varkappa^{-1}[\,|\chi_2(i\omega)|^2 + \omega^2|\chi_2(i\omega)|^2],\quad \forall\omega \in (-\infty, +\infty) \tag{1.3}$$

существует такое решение, что

$$\theta^{\cdot}(t) > 0,\ \forall t \geqslant 0 \tag{1.4}$$

Тогда существует решение $z(t)$, $\sigma(t)$ системы (1.1), удовлетворяющее неравенству

$$\sigma^{\cdot}(t) > 0,\quad \forall t \geqslant 0 \tag{1.5}$$

Если, кроме того, найдутся решение $\eta(t)$, $\theta(t)$ системы (1.2) и число $\varepsilon_1 > 0$, такие, что

$$\theta^{\cdot}(t) \geqslant \varepsilon_1,\ \forall t \geqslant 0 \tag{1.6}$$

то существует решение $z(t)$, $\sigma(t)$ системы (1.1) и число $\varepsilon_2 > 0$, для которых выполнено неравенство

(1.7) $$\sigma^{\cdot}(t) \geqslant \varepsilon_2, \quad \forall t \geqslant 0$$

Из теоремы и результатов работы Н. Н. Красовского [1] вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть $\varkappa > 0$, $\rho \geqslant 0$ и

$$\frac{\varphi_1(\sigma)}{\sigma} > 0, \quad \frac{\varphi_2(\sigma)}{\sigma} > 0, \quad \forall \sigma \neq 0$$

Тогда для устойчивости в целом системы (1.1) необходимо, чтобы имели место соотношения

$$\int\limits_0^{+\infty} \varphi_1(\sigma)\, d\sigma = +\infty, \quad \int\limits_0^{-\infty} \varphi_1(\sigma)\, d\sigma = -\infty$$

Отметим, что в случае $\varphi_1(\sigma) \equiv \varphi_2(\sigma)$ аналогичный результат [4] распространялся на многомерные системы[1] в работах [5—7].

Из сформулированной теоремы и теоремы 3 [2] вытекает следующее утверждение

Следствие 2. Пусть $\varkappa > 0$, $\rho \geqslant 0$, $\varphi_1(\sigma) \equiv \varphi_2(\sigma) \equiv \varphi_1(\sigma + 2\pi)$, функция $\varphi_1(\sigma)$ непрерывно дифференцируема и $\varphi_1'(\sigma)$ имеет ровно два нуля на множестве $[0, 2\pi)$. Тогда система (1.1) имеет круговое [8] решение, если

$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi_1(\sigma)\, d\sigma \neq 0$$

В случае $n = 2$, $\rho = 0$ этот результат был получен ранее в работах [9—10].

2. Для доказательства теоремы потребуется рассмотрение уравнения первого порядка

(2.1) $$\frac{dF}{d\theta} = \frac{-\alpha F - \psi(\theta)}{F - u(\theta)}$$

где α — неотрицательное число, $\psi(\theta)$, $u(\theta)$ непрерывные функции.

Лемма 1. Пусть на интервале $(\theta_0, +\infty)$ функция $F(\theta)$ удовлетворяет уравнению (2.1), неравенствам

$$F(\theta) > u(\theta), \quad F(\theta_0) > 0,$$

выполнено соотношение

(2.2) $$\psi(\theta) < 0, \quad \forall\, \theta \in \{\theta \mid u(\theta) < 0\}$$

и для любого числа β множество

$$\Xi(\beta) = \{\theta \mid u(\theta) \geqslant 0, \ \theta > \beta\}$$

непусто. Тогда $F(\theta) > 0$, $\forall\, \theta \geqslant \theta_0$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть существует число $\theta_1 > \theta_0$, для которого $F(\theta_1) \leqslant 0$. В силу непустоты множества $\Xi(\beta)$ найдется точка $\theta_2 > \theta_1$, такая, что $F(\theta_2) > 0$. Поэтому существует число $\theta_3 \in (\theta_0, \theta_2)$, такое, что $F'(\theta_3) = 0$, $F(\theta_3) \leqslant 0$. Тогда из равенства (2.1) получим соотношения $\alpha F(\theta_3) = -\psi(\theta_3)$, $u(\theta_3) < F(\theta_3) \leqslant 0$. Поэтому $u(\theta_3) < 0$, $\psi(\theta_3) \geqslant 0$. Последнее противоречит (2.2).

Введем в рассмотрение числа $\lambda \geqslant 0$, $v > 0$, θ_0, непрерывно дифференцируемые функции $W(t)$, $\sigma(t)$, $(t \geqslant 0)$, $F(\theta)$, $(\theta \geqslant \theta_0)$ и непрерывные функции $\psi(\theta)$, $f(\theta)$, $(\theta \in R^1)$.

Лемма 2. Пусть выполнены следующие условия:

1) $F(\theta) > 0$, $\forall\, \theta \geqslant \theta_0$

2) $F(\theta) > \sqrt{2v}\, f(\theta)$, $\forall\, \theta \geqslant \theta_0$

---

[1] См. также *Кустаров С. Н.* Оценка сектора абсолютной устойчивости нелинейных регулируемых систем: Автореф. дис. на соискание уч. ст. канд. физ. мат. наук. Л.: Изд-во ЛГУ, 1973, 8с.

3) $F'(\theta)F(\theta) + \psi(\theta) \leqslant 0, \ \forall\, \theta \geqslant \theta_0$

4) $F'(\theta)[F(\theta) - \sqrt{2v}\, f(\theta)] + \lambda\sqrt{2v}\, F(\theta) + \psi(\theta) = 0, \quad \forall\, \theta \geqslant \theta_0$

5) $W(t) \geqslant -v\,[\sigma^{\cdot}(t) + f(\sigma(t))]^2, \ \forall\, t \geqslant 0$

6) $W^{\cdot}(t) + 2\lambda W(t) - \psi(\sigma(t))[\sigma^{\cdot}(t) + f(\sigma(t))] \leqslant 0, \ \forall t \geqslant 0$

7) $\sigma^{\cdot}(0) > 0, \ \ \sigma^{\cdot}(0) + f(\sigma(0)) > 0, \ \ 2W(0) + F(\sigma(0))^2 < 0$

$\sigma(0) \geqslant \theta_0$

Тогда

$$\sigma^{\cdot}(t) \geqslant \frac{F(\sigma(t))}{\sqrt{2v}} - f(\sigma(t)) > 0, \quad \forall t \geqslant 0 \tag{2.3}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$V(t) = W(t) + {}^1\!/_2 F(\sigma(t))^2$$

Из условий 7) леммы вытекает, что $V(0) < 0$. Поэтому для достаточно малых $t > 0$ функция $V(t)$ определена и $V(t) < 0$. Предположим далее, что $V(t)$ определена на $[0, T]$ и $V(t) \leqslant 0, \ \forall\, t \in [0, T]$. Тогда в силу условия 5) получим неравенство

$$v\,[\sigma^{\cdot}(t) + f(\sigma(t))]^2 \geqslant 0{,}5\, F(\sigma(t))^2, \ \forall\, t \in [0, T] \tag{2.4}$$

Отсюда и из условий 1), 7) леммы следует неравенство

$$\sigma^{\cdot}(t) + f(\sigma(t)) > 0, \quad \forall\, t \in [0, T] \tag{2.5}$$

Из неравенств (2.4), (2.5) и условий 1), 2) вытекает утверждение леммы (2.3) при $t \in [0, T]$. Отсюда и из условий 3), 4) леммы следует соотношение (здесь ψ, f, F — функции от $\sigma(t)$)

$$\lambda F^2 + [\psi + F'F][\sigma^{\cdot} + f] - F'Ff \leqslant (\sqrt{2v})^{-1} F\,[F'F + \lambda\sqrt{2v}F - \\ -\sqrt{2v} f F' + \psi] = 0, \quad \forall\, t \in [0, T]$$

Поэтому, используя условие 6) леммы, получаем

$$V^{\cdot} + 2\lambda V \leqslant 0, \quad \forall\, t \in [0, T] \tag{2.6}$$

Предположим теперь, что $V(t) < 0, \ \forall\, t \in [0, T)$ и имеет место одно из следующих соотношений: $V(T) = 0, \ \sigma(T) = \theta_0$. Поскольку, как было показано выше, при $t \in [0, T)\ \sigma^{\cdot}(t) > 0$, равенство $\sigma(T) = \theta_0$ не может быть выполнено. С другой стороны, из (2.6) вытекает неравенство $V(T) \leqslant V(0)\exp(-2\lambda T) < 0$. Поэтому функция $V(t)$ определена при всех $t \geqslant 0$ и $V(t) < 0, \ \forall\, t \geqslant 0$. Но тогда, как было показано выше, и оценка (2.3) имеет место при всех $t \geqslant 0$.

Лемма 3. Пусть

$$\psi(\theta)f(\theta) \geqslant 0, \quad \forall\, \theta \in R^1, \quad F(\theta_0) > 0, \quad \psi(\theta) < 0, \quad \forall\, \theta \in \{\theta \mid f(\theta) < 0\}$$

и для любого числа β множество

$$\Xi(\beta) = \{\theta \mid f(\theta) \geqslant 0, \ \theta > \beta\}$$

непусто. Тогда из условий 2) и 4) леммы 2 следуют условия 1) и 3) этой леммы.

Лемма 3 является следствием леммы 1.

Доказательство теоремы. Отметим сначала, что неособым линейным преобразованием система (1.1) может быть приведена к виду [8]

$$y^{\cdot} = Qy + q\varphi_1(\sigma), \ \eta^{\cdot} = \varphi_1(\sigma), \ \sigma^{\cdot} = r^*y - \varkappa\eta - \rho\varphi_2(\sigma) \tag{2.7}$$

где Q — $(n-1) \times (n-1)$ — матрица, все собственные значения которой имеют отрицательные вещественные части, r и q — $(n-1)$-векторы. По теореме 1.2.7 [8] из неравенства (1.3) следует существование матрицы $H = H^* > 0$, удовлетворяющей соотношению

$$2y^*H[Qy + q\xi] - \xi r^*y - \tau\xi^2 + \varkappa^{-1}[(r^*y)^2 + (r^*(Qy + \\ + q\xi))^2] < 0, \ \forall\, |y| + |\xi| \neq 0 \tag{2.8}$$

Введем в рассмотрение функции

$$W(t) = y(t)^*Hy(t) + \varkappa^{-1}[r^*y(t)]^2 - (\varkappa/2)\,\eta(t)^2 + v$$

$$\psi(\sigma) = \varphi_1(\sigma), \ f(\sigma) = \tau\varphi_1(\sigma) + \rho\varphi_2(\sigma)$$

где $y(t)$, $\eta(t)$, $\sigma(t)$ — некоторое решение системы (2.7) Положим далее $v = 2/\varkappa$, $\lambda = 0$. Ясно, что в силу ограниченности $\varphi_1(\sigma)$ и $\varphi_2(\sigma)$ на R^1 существует такое число $\nu > 0$, для которого

$$W(t) + v[\sigma^{\cdot}(t) + f(\sigma(t))]^2 \geqslant 0, \ \forall t \geqslant 0$$

Кроме того, учитывая неравенство (2.8), получим соотношение

$$W^{\cdot} - \varphi_1[\sigma^{\cdot} + f] = 2y^*H[Qy + q\varphi_1] + 2x^{-1}r^*y[r^*(Qy + q\varphi_1)] - \varkappa\eta\varphi_1 - \varphi_1[r^*y - \varkappa\eta + \tau\varphi_1] \leqslant 0, \ \forall t \geqslant 0$$

Таким образом, выполнены условия 5) и 6) леммы 2. Пусть теперь $F(\theta)$ — решение уравнения

$$\frac{dF}{d\theta} = \frac{-\varphi_1(\theta)}{F - \sqrt{4\varkappa^{-1}}(\tau\varphi_1(\theta) + \rho\varphi_2(\theta))} \tag{2.9}$$

соответствующее решению $\eta(t)$, $\theta(t)$ системы (1.2), удовлетворяющему неравенству (1.4) Здесь $\theta_0 = \theta(0)$. Ясно, что в рассматриваемом случае выполнены условия 2), 4), леммы 2. Поэтому по лемме 3 справедливы также и условия 1) и 3) леммы 2.

Итак, если для рассматриваемого решения $y(t)$, $\eta(t)$, $\sigma(t)$ системы (2.7) выбрать начальные условия $y(0)$, $\eta(0)$, $\sigma(0)$ таким образом, что

$$\sigma(0) = \theta_0, \quad y(0) = 0,$$
$$\eta(0) < \min\left\{\frac{\tau}{\varkappa}\varphi_1(\theta_0), \ -\frac{\rho}{\varkappa}\varphi_2(\theta_0), \ -\sqrt{\frac{3\nu + F(\theta_0)^2}{\varkappa}}\right\},$$

то будет выполнено и условие 7) леммы 2. Таким образом, в этом случае будет иметь место неравенство (2.3).

Если, кроме того, имеет место условие (1.6), то

$$F(\theta) - 2x^{-1/2}(\tau\varphi_1(\theta) + \rho\varphi_2(\theta)) \geqslant \varepsilon_1, \ \forall\theta \geqslant \theta_0$$

Поэтому здесь

$$\sigma^{\cdot}(t) \geqslant \frac{F(\sigma(t))}{\sqrt{2v}} - f(\sigma(t)) \geqslant \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{2v}} = \varepsilon_2, \quad \forall t \geqslant 0$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Об одной задаче устойчивости движения в целом.— Докл. АН СССР, 1953, т. 88, № 3, с. 401.
2. *Белюстина Л. Н., Белых В. Н.* Качественное исследование динамической системы на цилиндре.— Дифференц. уравнения, 1973, т. 9, № 3, с. 403.
3. *Лурье А. И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.— Л.: Гостехиздат, 1951. 216 с.
4. *Красовский Н. Н.* Теоремы об устойчивости движений, определяемых системой двух уравнений.— ПММ, 1952, т. 16, вып. 5, с. 574.
5. *Плисс В. А.* Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом. Л.: Изд-во ЛГУ, 1958. 183 с.
6. *Якубович В. А.* Об ограниченности и устойчивости в целом решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений.— Докл. АН СССР, 1958, т. 121, № 6, с. 984.
7. *Эфендиев А. Р., Балитинов М. А.* Об асимптотической устойчивости в целом одной нелинейной системы.— Дифференц. уравнения, 1968, т. 4, № 4, с. 618.
8. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.
9. *Белых В. Н., Некоркин В. И.* Качественное исследование системы трех дифференциальных уравнений из теории фазовой синхронизации.— ПММ, 1975, т. 39, № 4, с. 642.
10. Фазовая синхронизация./Под ред. Шахгильдяна В. В., Белюстиной Л. Н. М.: Связь, 1975. 289 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
5.II.1980