УДК 531.38

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ В СЛУЧАЕ КОВАЛЕВСКОЙ

Эль-Сабаа Ф. М.

Методом точечных отображений изучаются периодические решения задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Ковалевской в неголономных переменных Колосова.

Метод точечных отображений для отыскания периодических решений берет начало в работах Пуанкаре. Он состоит в рассмотрении не полной траектории в фазовом пространстве, а только ее последовательных пересечений с определенной поверхностью, в частности с плоскостью. Таким образом, представление и изучение траекторий движения выполняется на этой плоскости или поверхности и геометрически существенно упрощается. Этот метод был впервые применен в динамике твердого тела [1] к уравнениям движения в изотермических координатах, введенных на эллипсоиде инерции [2].

Система уравнений Эйлера — Пуассона преобразуется к уравнениям плоского движения фиктивной материальной точки под действием некоторой потенциальной силы путем введения неголономных координат x, y и новой независимой переменной τ [3]

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}=\frac{\partial U}{\partial x},\quad \frac{d^2y}{d\tau^2}=\frac{\partial U}{\partial y} \tag{1}$$

$$\left(d\tau=\frac{r^2(p^2+q^2)+2rp\gamma_3+\gamma_3^2}{2q^2}\,dt\right)$$

Здесь p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3 — соответственно компоненты угловой скорости в связанной системе координат и направляющие косинусы вертикали. Силовая функция задачи дается формулой

$$U=-\frac{x^2+y^2-kx+1}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{2}$$

Уравнения движения (2) допускают интеграл живых сил

$$v^2=2\,(U+C) \tag{3}$$

где C — произвольная постоянная, k — постоянная интеграла Ковалевской.

Решение системы (1) представляет собой траекторию в фазовом пространстве x, x', y, y'. Вдоль траектории должна сохраняться величина постоянной энергии C. Поэтому если задано значение C и для некоторого момента времени известны три координаты точки на фазовой траектории, то четвертая фазовая координата может быть вычислена из соотношения (3).

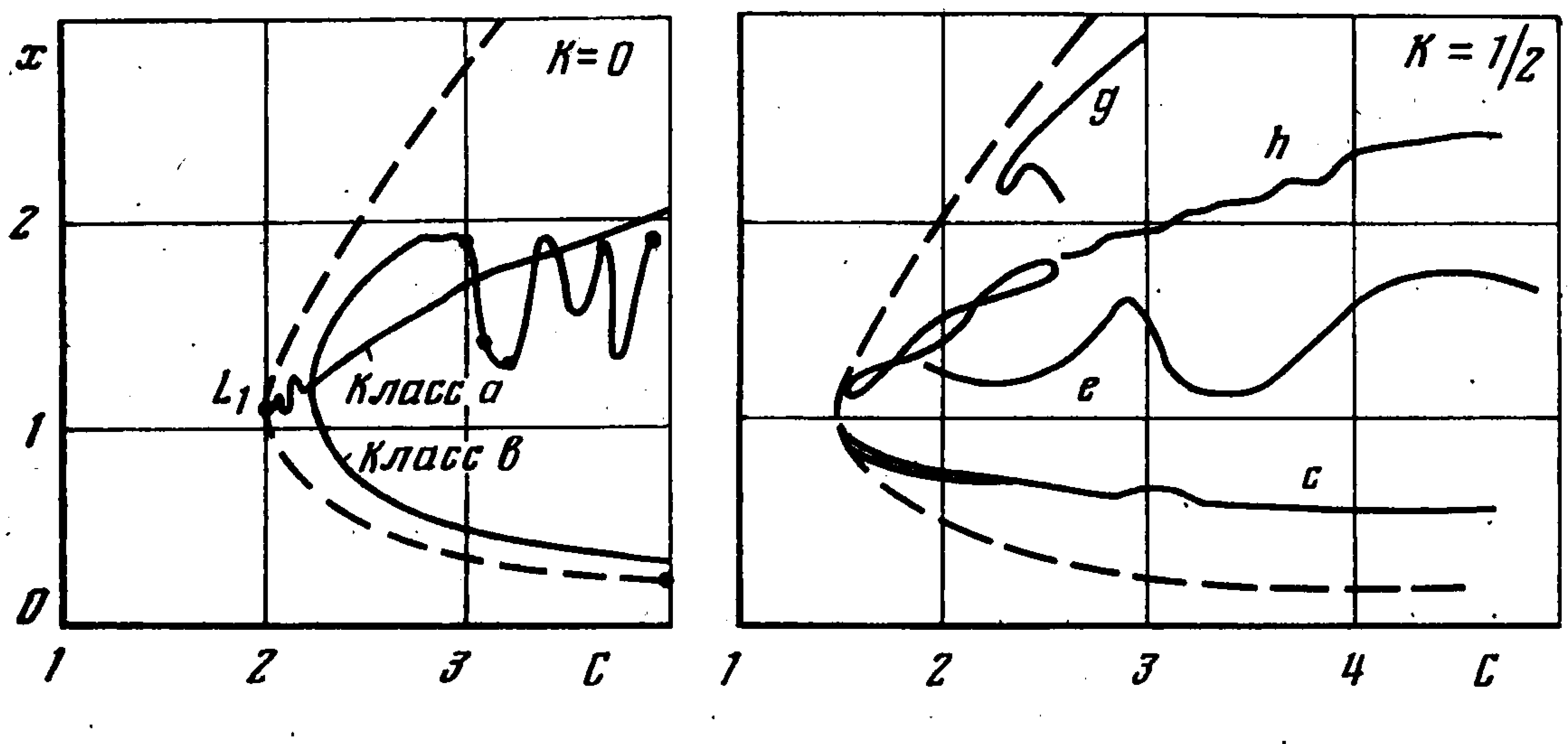
Таким образом, для фиксированной величины C траектории изображающей (фиктивной) точки можно изучать в трехмерном подпространстве x, x', y фазового пространства.

Рассмотрим во введенном трехмерном пространстве пересечения фазовой траектории с плоскостью xx' в положительном направлении, т. е. точки траектории, удовлетворяющие условиям $y=0$, $y'>0$.

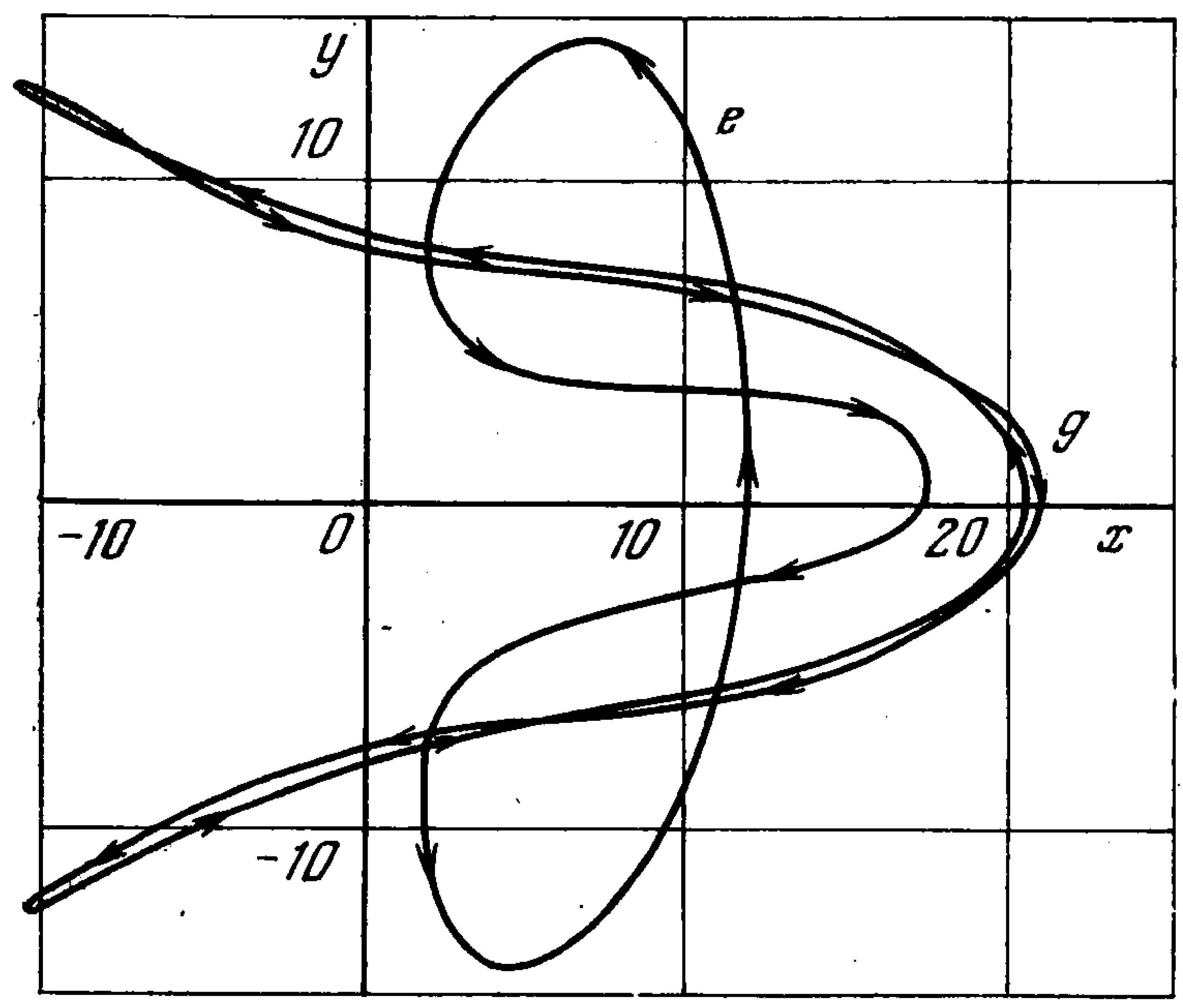
В плоскости xy эти точки соответствуют пересечению траектории фиктивной точки $x=x(\tau)$, $y=y(\tau)$ с осью абсцисс тоже в положительном направлении. Изучение самой траектории фиктивной точки заменим изучением множества полученных таким путем точек в плоскости xx'.

Будем исследовать простые периодические траектории, т. е. траектории $x=x(\tau)$, $y=y(\tau)$, которые замыкаются после первого оборота, т. е. пересекают ось абсцисс только два раза. На плоскости xx' простой периодической траектории будет соответствовать одна точка. Более того, ограничимся траекториями на плоскости xx', симметричными относительно оси Ox и пересекающими эту ось только под прямым углом.

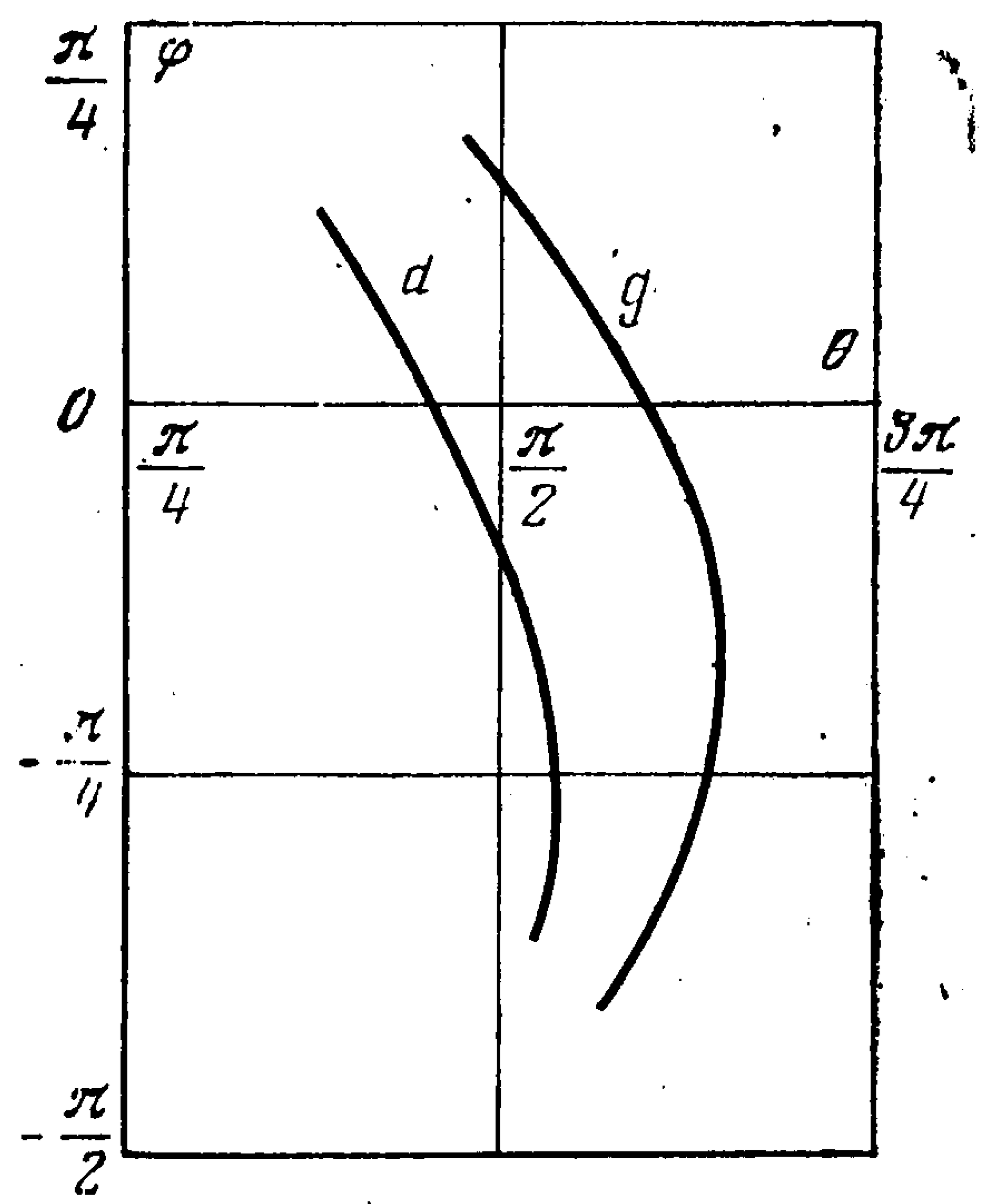
Совокупность простых периодических траекторий с качественно одинаковыми геометрическими свойствами, которые определяются начальными условиями и пара-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

метрами задачи, объединяется в отдельный класс. Каждую траекторию удобно однозначно определять точкой на плоскости xC, что открывает возможность энергетической классификации. Эти точки группируются в линии, которые названы характеристиками классов [4, 5]. Каждой точке характеристики соответствует одна периодическая траектория на плоскости xC.

На фиг. 1 показаны характеристики классов простых периодических траекторий для $C > 0$ на плоскости xC для задачи Ковалевской, полученные в результате численного интегрирования уравнений Колосова. Не приводя полной картины, ограничиваемся случаем $k = 0$ (классы a и b) и случаем $k = 1/2$ (классы c, e, g, h). Классы периодичности для $C < 0$ ради краткости не приводим. Граничные штриховые линии — кривые нулевой скорости Хилла. Точка L_1 соответствует стационарным решениям и аналогична точкам либрации в круговой задаче трех тел. На фиг. 2 показаны траектории классов c и g при $k = 1/2$.

Для каждой траектории по начальным значениям x, x', y, y' можно с помощью первых интегралов и формул преобразования к переменным Колосова получить соответствующие начальные значения угла собственного вращения φ и угла нутации ϑ.

На фиг. 3 изображены графики зависимости между начальными значениями углов φ и ϑ для классов периодичности d и g при $k = 1/2$.

Автор благодарит Демина В. Г., под руководством которого выполнена эта работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вагнер Э. А., Демин В. Г., Исаев Ю. Н.* Численный метод построения периодических решений задачи о движении тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой.— В сб.: Проблемы механики управляемого движения. Оптимизация управления космическими аппаратами. Изд. Пермск. ун-та, 1976.
2. *Вагнер Э. А., Демин В. Г.* Об одном классе периодических движений тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 5, с. 927.
3. *Колосов В. Г.* Об одном свойстве задачи С. В. Ковалевской о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.— Тр. Отделения физических наук Общества любителей естествознания, 1901, т. 1, вып. 1.
4. *Henon M.* Exploration numerique du probléme restreint. I. Masses égales. Onbites pewidiques.— Ann. astrophys., 1965, v. 28, No. 3.
5. *Демин В. Г., Курчанова М. В.* Численное исследование периодических орбит в ограниченной упрощенной осредненной эллиптической задаче трех тел.— Космические исследования, 1977, т. 15, вып. 5.

Египет

Поступила в редакцию
22.II.1980

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В ЦЕЛОМ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ДВУХ НУЛЕВЫХ КОРНЕЙ

Леонов Г. А.

Известные результаты [1, 2] о необходимых условиях устойчивости в целом двумерных динамических систем распространяются на классы систем произвольной размерности.

1. Рассмотрим уравнения системы непрямого автоматического регулирования [3]

$$z^{\cdot} = Az + b\varphi_1(\sigma), \quad \sigma^{\cdot} = c^*z - \rho\varphi_2(\sigma) \tag{1.1}$$

предполагая, что постоянная $n \times n$-матрица A имеет одно нулевое собственное значение и $n - 1$ — собственное значение с отрицательными вещественными частями, b, c — постоянные n-векторы, ρ — число, $\varphi_1(\sigma)$ и $\varphi_2(\sigma)$ — непрерывные и ограниченные на $(-\infty, +\infty)$ функции, удовлетворяющие соотношению $\varphi_1(\sigma)\varphi_2(\sigma) \geqslant 0$, $\forall\, \sigma \in (-\infty, +\infty)$, звездочка означает транспонирование. В дальнейшем предполагаем также непустоту множества $\{\sigma \mid \varphi_1(\sigma) \geqslant 0, \sigma \geqslant \beta\}$, $\forall\, \beta \in (-\infty, +\infty)$ и совпадение множеств нулей функций $\varphi_1(\sigma)$ и $\varphi_2(\sigma)$.

Введем в рассмотрение функцию $\chi_1(p) = c^*(A - pI)^{-1}b$, где p — комплексное число, I — единичная матрица и обозначения

$$\varkappa = \lim_{p\to 0} p\,\chi_1(p), \quad \chi_2(p) = \chi_1(p) - \varkappa p^{-1}$$

Теорема. Пусть $\varkappa > 0$, $\rho \geqslant 0$ и для системы второго порядка

$$\eta^{\cdot} = -\varphi_1(\theta), \quad \theta^{\cdot} = \eta - \sqrt{\frac{4}{\varkappa}}\,(\tau\varphi_1(\theta) + \rho\varphi_2(\theta)) \tag{1.2}$$

где τ — положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$\tau > \operatorname{Re}\chi_2(i\omega) + \varkappa^{-1}[\,|\chi_2(i\omega)|^2 + \omega^2\,|\chi_2(i\omega)|^2], \quad \forall\omega \in (-\infty, +\infty) \tag{1.3}$$

существует такое решение, что

$$\theta^{\cdot}(t) > 0, \quad \forall t \geqslant 0 \tag{1.4}$$

Тогда существует решение $z(t)$, $\sigma(t)$ системы (1.1), удовлетворяющее неравенству

$$\sigma^{\cdot}(t) > 0, \quad \forall t \geqslant 0 \tag{1.5}$$

Если, кроме того, найдутся решение $\eta(t)$, $\theta(t)$ системы (1.2) и число $\varepsilon_1 > 0$, такие, что

$$\theta^{\cdot}(t) \geqslant \varepsilon_1, \quad \forall t \geqslant 0 \tag{1.6}$$