Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 4, 1981

УДК 531.38

# ДВА КЛАССА ДВИЖЕНИЙ ВОЛЧКА КОВАЛЕВСКОЙ

Докшевич А. И.

Исследуются движения волчка Ковалевской [1] при условиях, когда ультраэллиптические интегралы вырождаются в эллиптические [2–6]. В терминологии Аппельрота изучается четвертый класс простейших движений тела и один особый случай третьего класса.

Математический аппарат, разработанный Ковалевской, явно не применяется. В основу положено элементарное преобразование исходных уравнений Эйлера — Пуассона. В результате получены явные зависимости всех искомых переменных от времени, с помощью которых указаны общие закономерности движений. В зависимости от начальных данных все движения делятся на колебательные и асимптотические. Предельным режимом для всех асимптотических движений служит движение Бобылева — Стеклова или его частный случай — вращение тела как физического маятника вокруг неподвижной оси.

**1. Преобразование уравнений.** При условиях Ковалевской уравнения Эйлера — Пуассона и их алгебраические первые интегралы обычно записываются так:

$$2\frac{dp}{dt}=qr,\quad 2\frac{dq}{dt}=-rp-\gamma'',\quad \frac{dr}{dt}=\gamma' \tag{1.1}$$

$$\frac{d\gamma}{dt}=\gamma' r-\gamma'' q,\quad \frac{d\gamma'}{dt}=\gamma'' p-\gamma r,\quad \frac{d\gamma''}{dt}=\gamma q-\gamma' p$$

$$2(p^2+q^2)+r^2-2\gamma=6l_1,\ 2(p\gamma+q\gamma')+r\gamma''=2l,\ \gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2= \tag{1.2}$$
$$(p^2-q^2+\gamma)^2+(2pq+\gamma')^2=k^2$$

Прежде всего совершим линейную замену фазовых переменных

$$x_1=p\sqrt{2}-a,\quad y_1=q\sqrt{2},\quad z_1=r/\sqrt{2},\quad \alpha_1=\gamma+ap\sqrt{2}-a^2 \tag{1.3}$$
$$\beta_1=\gamma'+aq\sqrt{2},\quad \gamma_1=\gamma''+ar/\sqrt{2},\quad \tau=t/\sqrt{2}$$

где $a$ — произвольный параметр. В новых переменных систему (1.1) с интегралами (1.2) можно представить так:

$$\frac{dx_1}{d\tau}=y_1z_1,\quad \frac{dy_1}{d\tau}=-z_1x_1-\gamma_1,\quad \frac{dz_1}{d\tau}=\beta_1-ay_1 \tag{1.4}$$
$$\frac{d\alpha_1}{d\tau}=2z_1\beta_1-\gamma_1y_1,\quad \frac{d\beta_1}{d\tau}=-2z_1\alpha_1+\gamma_1x_1-a^2z_1,\quad \frac{d\gamma_1}{d\tau}=\alpha_1y_1-\beta_1x_1$$

$$^1/_2(x_1^2+y_1^2)+z_1^2-\alpha_1+2ax_1=h_1,\ (\alpha_1+a^2)x_1+\beta_1y_1+\gamma_1z_1- \tag{1.5}$$
$$-{}^1/_2a(x_1^2+y_1^2)=m_1;\ \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2+a^2\alpha_1-{}^1/_2a^2(x_1^2+y_1^2)=E_1$$
$$\alpha_1(x_1^2-y_1^2)+2\beta_1x_1y_1-\gamma_1^2+{}^1/_4(x_1^2+y_1^2)^2+a^2x_1^2=K_1$$
$$h_1=3l_1-{}^1/_2a^2,\quad m_1=l\sqrt{2}+3al_1-{}^1/_2a^3,\quad E_1=1+2al\sqrt{2}+3l_1a^2-$$
$$-{}^1/_2a^4,\ K_1=k^2-1-2al\sqrt{2}-3l_1a^2+{}^1/_4a^4$$

Далее проведем нелинейное преобразование

$$x_2=-x_1M_1^{-1},\quad y_2=-y_1M_1^{-1},\quad z_2=z_1+2\gamma_1x_1M_1^{-1},\quad \gamma_2=\gamma_1M_1^{-1},$$
$$M_1=x_1^2+y_1^2\neq 0$$
$$\alpha_2=-\alpha_1+2(x_1^2-y_1^2)\gamma_1^2M_1^{-2}-2a^2x_1^2M_1^{-1},$$
$$\beta_2=-\beta_1+4x_1y_1\gamma_1^2M_1^{-2}-2a^2x_1y_1M_1^{-1}$$

Это преобразование симметрично. Равенства (1.4), (1.5) примут вид

$$
\frac{dx_2}{d\tau}=y_2z_2,\quad \frac{dy_2}{d\tau}=-z_2x_2-\gamma_2,\quad \frac{dz_2}{d\tau}=\beta_2-2m_1y_2,\quad \frac{d\gamma_2}{d\tau}=\alpha_2y_2-\beta_2x_2 \tag{1.6}
$$

$$
\frac{d\alpha_2}{d\tau}=2z_2\beta_2-4K_1\gamma_2y_2,\quad \frac{d\beta_2}{d\tau}=-2z_2\alpha_2+4K_1\gamma_2x_2-a^2z_2
$$

$$
\begin{gathered}
z_2^2-\alpha_2+4m_1x_2'+2K_1M_2=h_1,\quad \alpha_2x_2+\beta_2y_2+\gamma_2z_2+a^2x_2=\\
={}^1/_2a+m_1M_2\\
\alpha_2(x_2^2-y_2^2)+2\beta_2x_2y_2-\gamma_2^2+a^2x_2^2+K_1M_1^2={}^1/_4\\
\alpha_2^2+\beta_2^2+4K_1\gamma_2^2+a^2\alpha_2-2a^2K_1M_2=E_1,\quad M_2=x_2^2+y_2^2
\end{gathered} \tag{1.7}
$$

Пусть $m_1^2+K_1^2\neq 0$. Введем еще один параметр $\lambda$, положив $\lambda^2=4K_1$, $a\lambda=2m_1$. Видно, что вещественные $a$, $\lambda$, удовлетворяющие таким равенствам, существуют. Оказывается, в результате преобразования

$$
\begin{gathered}
x_3\sqrt{2}=\lambda x_2+a,\quad y_3\sqrt{2}=\lambda y_2,\quad z_3/\sqrt{2}=z_2,\quad \beta_3=\beta_2-a\lambda y_2\\
\alpha_3=\alpha_2-a\lambda x_2,\quad \gamma_3=\lambda\gamma_2-az_2,\quad t_3=\tau\sqrt{2}
\end{gathered}
$$

система (1.6) принимает вид (1.1). Таким образом, композиция трех указанных преобразований не изменяет формы уравнений Эйлера — Пуассона.

Предположим, что

$$
m_1=0,\quad K_1=0 \tag{1.8}
$$

Ввиду того что $dK_1/da=-2m_1$, принятые условия означают, что полином $K_1(a)$ имеет кратный корень. Исключив $a$, получим единственное ограничение на начальные данные. Равенства (1.6) при условиях (1.8) дают (для простоты индексы у переменных опустим, знак производной по $\tau$ укажем точкой)

$$
\begin{gathered}
x^\cdot=yz,\quad y^\cdot=-zx-\gamma,\quad z^\cdot=\beta\\
\alpha^\cdot=2z\beta,\quad \beta^\cdot=-2z\alpha-a^2z,\quad \gamma^\cdot=\alpha y-\beta x\\
z^2-\alpha=h_1,\quad (\alpha+a^2)x+\beta y+\gamma z={}^1/_2a,\quad \alpha^2+\beta^2+a^2\alpha=E_1\\
\alpha(x^2-y^2)+2\beta xy-\gamma^2+a^2x^2={}^1/_4
\end{gathered} \tag{1.9}
$$

**2. Интегрирование вспомагательной системы.** Фазовые переменные $p,\ldots,\gamma''$ исходных уравнений — известные рациональные функции величин $x_2,\ldots,\gamma_2$. Стало быть, при условиях (1.8) задача сведена к отысканию решения системы (1.9). Заметим, что совокупность уравнений

$$
z^\cdot=\beta,\quad \alpha^\cdot=2z\beta,\quad \beta^\cdot=-2z\alpha-a^2z \tag{2.1}
$$

образует замкнутую подсистему. Оба ее интеграла уже известны: $z^2-\alpha=h_1$, $\alpha^2+\beta^2+a^2z^2=1$. Выясним зависимость $z$, $\alpha$, $\beta$ от времени. Очевидно,

$$
\begin{gathered}
z^{\cdot 2}=-z^4+(2h_1-a^2)z^2+1-h_1^2=(z^2-R_1)(R_2-z^2)\\
R_{1,2}=h_1-{}^1/_2a^2\mp k,\quad R_1R_2=h_1^2-1\\
h_1\leqslant 1,\quad 0\leqslant z^2\leqslant R_1;\quad h_1>1,\quad 0<R_1\leqslant z^2\leqslant R_2
\end{gathered}
$$

Для вещественности $z$ необходимо и достаточно $R_2>0$. В дальнейшем понадобится иная форма решения подсистемы (2.1). Из ее интегралов следует ($\varphi$ — вспомогательная величина)

$$
\begin{gathered}
\alpha+{}^1/_2a^2=k\cos 2\varphi,\quad \beta=-k\sin 2\varphi,\quad \varphi^\cdot=z,\quad \varphi^{\cdot\cdot}=-k\sin 2\varphi\\
\varphi^{\cdot 2}=h_1-{}^1/_2a^2+k\cos 2\varphi
\end{gathered}
$$

Вычислим $x$, $y$, $\gamma$. Заметим важное равенство

$$
y^{\cdot\cdot}+(z^2+\alpha)y=0
$$

Оказывается, что этому же линейному уравнению удовлетворяет выражение

$$
\Gamma=H_2\gamma-{}^1/_2\,az\quad (H_2=h_1-a^2)
$$

и имеют место соотношения

$$
\begin{gathered}
\Gamma^2+H_2H_3y^2={}^1/_4h_1N,\quad \Gamma^\cdot y-\Gamma y^\cdot=-{}^1/_4h_1\\
H_3=a^2h_1-1,\quad N=z^2-H_2
\end{gathered} \tag{2.2}
$$

Допустим, что $N > 0$. Тогда соотношения (2.2) дают

(2.3) $$N^2\eta^{\cdot 2} + H_2H_3\eta^2 = {}^1/_4 h_1, \quad \eta = yN^{-1/2}$$

Вычислив $\eta$, найдем

(2.4) $$y = \eta N^{1/2}, \quad \Gamma = N^{3/2}\eta^{\cdot}, \quad H_2x + {}^1/_2 a = -(H_2\beta y + \Gamma z)N^{-1}$$

Укажем еще одно соотношение, позволяющее вычислить $x$, $y$, $\gamma$:

(2.5) $$H_2{}^2N_1{}^2z^{-4}\xi^{\cdot 2} + H_2H_3\xi^2 = h_1, \quad \xi = (x + {}^1/_2\, aH_2{}^{-1})\, N_1{}^{-1/2}$$
$$N_1 = z^2 - H_1H_2{}^{-1} > 0, \quad H_1 = h_1{}^2 - 1$$

Теперь можно провести полную классификацию решений в зависимости от значений $N$, $N_1$: 1°. $H_2 < 0$, $H_3 > 0$; 2°. $H_2 < 0$, $H_3 < 0$; 3°. $H_2 > 0$, $H_3 > 0$; 4°. $H_2 > 0$, $H_3 < 0$, $H_1 < 0$; 5°. $H_2 > 0$, $H_3 < 0$, $H_1 > 0$ (специальный случай, выражения $N$, $N_1$ знакопеременны); 6°. $H_2 = 0$; 7°. $H_3 = 0$; 8°. $H_1 = 0$.

Всего имеем восемь различных случаев. Уравнения (2.3) (2.5) позволяют найти решения в первых четырех случаях.

1°. $$y = \frac{\varepsilon\mu}{2b}(z^2 - H_2)^{1/2}\operatorname{sh}\theta, \quad \Gamma = \frac{\varepsilon\mu}{2}(z^2 - H_2)^{1/2}\operatorname{ch}\theta, \quad \theta^{\cdot} = \frac{b}{z^2 - H_2} > 0$$
$$H_2x + \frac{a}{2} = -\frac{\varepsilon\mu}{2b}(z^2 - H_2)^{-1/2}(H_2\beta\operatorname{sh}\theta + b\operatorname{ch}\theta), \quad \mu = h_1{}^{1/2},$$
$$b = |H_2H_3|^{1/2}, \quad \varepsilon = \pm 1$$

2°. $$H_1 < 0, \quad y = \frac{\mu}{2b}(z^2 - H_2)^{1/2}\sin\theta, \quad \Gamma = \frac{\mu}{2}(z^2 - H_2)^{1/2}\cos\theta$$
$$H_2x + \frac{a}{2} = -\frac{\mu}{2}(z^2 - H_2)^{-1/2}\left(\frac{H_2}{b}\beta\sin\theta + z\cos\theta\right), \quad \theta^{\cdot} = \frac{b}{z^2 - H_2} > 0$$

3°. Расчет ведется, как в случае 2°; отличие в знаке $H_1$.

4°. $$x + \frac{a}{2H_2} = \frac{\varepsilon\mu}{b}\left(z^2 - \frac{H_1}{H_2}\right)^{1/2}\operatorname{sh}\theta, \quad \theta^{\cdot} = \frac{bz^2}{H_2z^2 - H_1} > 0$$
$$y = \frac{\varepsilon\mu}{b}\left(z^2 - \frac{H_1}{H_2}\right)^{-1/2}\left(bz\frac{\operatorname{ch}\theta}{H_2} + \beta\operatorname{sh}\theta\right)$$
$$\Gamma = \frac{\varepsilon\mu}{b}\left(z^2 - \frac{H_1}{H_2}\right)^{-1/2}\left(-b\beta\frac{\operatorname{ch}\theta}{H_2} + H_3z\frac{\operatorname{sh}\theta}{H_2}\right)$$

5°. При этих условиях как $N$, так и $N_1$ меняют знак с течением времени. Поэтому уравнения (2.3), (2.5) неудобны. Воспользуемся соотношениями (2.2). Заметим, что
$$z^2 - H_2 = a^2 + \alpha = a_0{}^2\cos^2\varphi - b_0{}^2\sin^2\varphi, \quad a_0{}^2 = k + {}^1/_2 a^2, \quad b_0{}^2 = k - {}^1/_2 a^2$$

Параметризуем первое равенство (2.2)
$$\Gamma = \frac{\mu}{2}(a_0\cos\varphi\operatorname{ch}\theta + b_0\sin\varphi\operatorname{sh}\theta), \quad y = \frac{\mu}{2b}(a_0\cos\varphi\operatorname{sh}\theta + b_0\sin\varphi\operatorname{ch}\theta)$$
$$\frac{2b}{\mu}\left(H_2x + \frac{a}{2}\right) = -R_2b_0\cos\varphi\operatorname{ch}\theta + R_1a_0\sin\varphi\operatorname{sh}\theta -$$
$$- z\theta^{\cdot}(a_0\cos\varphi\operatorname{ch}\theta + b_0\sin\varphi\operatorname{sh}\theta)$$

Второе равенство (2.2) дает $\theta^{\cdot} = -a_0b_0(z + H_2{}^{1/2})^{-1}$. При $H_1 > 0$ величина $z$ имеет определенный знак. Не теряя общности, можно присвоить $z$ знак плюс. Тогда окажется, что величина $\theta^{\cdot}$ отрицательна и ограничена.

6°. В этом случае выполняется равенство $z^{\cdot\cdot} + (z^2 + \alpha)z = 0$, которое позволяет быстро найти $x$, $y$, $\gamma$
$$Lx = H_1h_1{}^{-1} - \alpha - u^2, \quad Ly = -2\beta - 2zu, \quad L\gamma = zu^2 + 2\beta u - z^3 + zh_1{}^{-1}$$
$$La = 4H_1, \quad u^{\cdot} = z^2 \geqslant 0$$

7°. В этом случае имеет место равенство $(\cos\varphi)^{\cdot\cdot} + (z^2 + \alpha)\cos\varphi = 0$. Получим
$$Lx = \varepsilon a - h_1 z\cos\varphi - u\sin\varphi, \quad Ly = h_1z - u\cos\varphi, \quad L\gamma =$$
$$= -\varepsilon az + \cos\varphi\ L = 2\varepsilon(a^2 - h_1), \quad \varepsilon = \pm 1, \quad u^{\cdot} = \cos^2\varphi \geqslant 0$$

8°. Решение находится элементарно:

$$Lx = a + zu, \quad Ly = \beta u z^{-1} + u^{\cdot}; \quad L\gamma = -u - \beta u^{\cdot} z^{-1} - az$$
$$u^{\cdot 2} = u^2 - 1, \quad z^{\cdot 2} = z^2 (a_1^2 - z^2), \quad a_1^2 = 2 - a^2, \qquad L = 2(a^2 - h_1)$$

**3. Исследование движения.** Решение системы (1.9) построено. Ввиду симметричности второго преобразования и линейности первого весьма просто выразить искомые переменные $p, \ldots, \gamma''$ через $x_2 \ldots \gamma_2$. Для качественного исследования достаточно заметить, что эти выражения — рациональные функции с единым знаменателем, никогда не обращающимся в нуль.

Движения волчка можно разделить на два типа. К первому относятся движения колебательного характера при условии $H_2H_3 > 0$. Во всех прочих случаях $H_2H_3 \leqslant 0$ и движения имеют асимптотический характер. Предельным режимом служит движение Бобылева — Стеклова. Действительно, при указанных условиях оказывается, что $x_2 \to \infty$, $y_2 \to \infty$, $\gamma_2 \to \infty$, ввиду чего $p \to \mathrm{const}$, $q \to 0$, $\gamma'' + rp \to 0$ при $t \to \infty$, что характерно только для упомянутого движения. Укажем на связь с классическими исследованиями Ковалевской. Условия $m_1 = 0$; $K_1 = 0$ — условия кратности корней полинома $\varphi(s)$. Равенства $H_\nu = 0$ ($\nu = 1, 2, 3$) составляют условия дополнительной кратности корней полинома $F(s)$.

**4. Второй класс движений.** Рассмотрим движение волчка при ограничениях $l = 0$, $3l_1 = k$. Это есть, по Аппельроту, особый вариант простейших движений третьего класса. Исходим непосредственно из уравнений Эйлера — Пуассона. Введем три новые переменные — $\rho$, $\varphi$, $\theta$ следующим образом [7]:

$$2p = \rho \sin\theta, \quad r = \rho\cos\theta, \quad \gamma + p^2 - q^2 = k\cos 2\varphi \tag{4.1}$$
$$\gamma' + 2pq = -k\sin 2\varphi$$

Вычисления дают

$$\theta^{\cdot} = q + k\rho^{-1}\sin\theta\sin 2\varphi, \quad 2\varphi^{\cdot} = \rho\cos\theta$$

С помощью известных интегралов получим искомые уравнения, определяющие $\varphi$, $\theta$

$$2\theta^{\cdot\cdot}\cos\theta + \theta^{\cdot 2} - 3l_1\sin\theta\cos^2\theta + \frac{(9l_1^2 - k^2)(2 - 1.5\sin^2\theta)}{3l_1 + k\cos 2\varphi} + \frac{2l}{\rho} = 0 \tag{4.2}$$

$$2\varphi^{\cdot 2} = \cos^2\theta\,(3l_1 - k + 2k\cos^2\varphi) \tag{4.3}$$

При $l = 0$, $3l_1 = k$ уравнение (4.2) интегрируется и дает

$$\theta^{\cdot 2} = \cos\theta\,(\varepsilon - 3l_1\cos\theta), \quad \varepsilon = \mathrm{const} \tag{4.4}$$

С учетом интегралов обнаружим $\varepsilon^2 = 1$.

Отметим простые, но важные неравенства. В нетривиальном случае $l_1 > 0$. Из (4.4) следует, что если $\varepsilon = +1$, то $\cos\theta \geqslant 0$, если $\varepsilon = -1$, то $\cos\theta \leqslant 0$. Стало быть, $\cos\theta$ сохраняет знак в процессе движения, а значит, имеет определенный знак $r$. Не теряя общности, положим $i \geqslant 0$, т. е. $\varepsilon = +1$.

Вычислим $\varphi$. Допустим, что в некоторый момент $\rho = 0$. Тогда $r = 0$, $p = 0$, $\gamma' = 0$. Такие начальные данные характеризуют только вращение вокруг неподвижной оси, поэтому примем $\rho \neq 0$. Тогда из равенства $\rho^2 = 4k\cos^2\varphi$ следует $\cos\varphi \neq 0$. Не умаляя общности, примем $\cos\varphi > 0$. Далее, ввиду $r = 2\varphi^{\cdot}$ находим $\varphi^{\cdot} \geqslant 0$. Поэтому уравнение (4.3) можно упростить. Получим

$$\varphi^{\cdot} = \mu\cos\varphi\cos\theta, \quad \mu^2 = k, \quad \mu > 0$$

Целесообразна замена

$$\cos\varphi = \frac{1}{\operatorname{ch}\tau_1}, \quad \sin\varphi = \operatorname{th}\tau_1, \quad \tau_1 = \mu\int\cos\theta\,d\tau + \mathrm{const}$$

**5. Решение системы Эйлера — Пуассона.** Изучим свойства угла $\theta$. Запишем равенство (4.4) в виде $(2\mu\theta^{\cdot})^2 + (1 - 2\mu^2\cos\theta)^2 = 1$ и параметризуем его

$$2\mu\theta^{\cdot} = \sin\sigma, \quad 1 - 2\mu^2\cos\theta = \cos\sigma$$

Найдем

$$\sigma^{\cdot} = -\mu\sin\theta, \quad 2\sigma^{\cdot\cdot} = -\sin\sigma\cos\theta, \quad 2\theta^{\cdot\cdot} = -\sin\theta\cos\sigma$$

Наконец, получим

(5.1) $$2\theta_1^{\cdot\cdot} = -\sin\theta_1, \quad \theta_1^{\cdot 2} = \cos\theta_1 + \mu^2 \quad (\theta_1 = \theta + \sigma)$$

Если заставить тело вращаться вокруг горизонтальной неподвижной оси, совпадающей с осью инерции $y$, с полной энергией, какой обладает тело в реальном движении, то уравнение такого вращения можно описать последним равенством. Укажем еще, как вычисляется $\tau_1$:

$$\tau_1 = -\frac{1}{2}\ln\Delta + \mu\int\frac{\mu^2+\theta_1^{\cdot 2}}{\Delta}\,dt, \quad \Delta = 1 + 4\mu^2\theta_1^{\cdot 2}$$

Наконец, решение исходных уравнений Эйлера — Пуассона запишем в виде

$$p = -\sigma^{\cdot}\cos\varphi, \quad q = \sigma^{\cdot}\sin\varphi + \theta^{\cdot}, \quad r = 2\varphi^{\cdot}, \quad \sigma^{\cdot} = -\mu\sin\theta, \quad \theta^{\cdot} = {}^1/_2\mu^{-1}\sin\sigma$$

$$\varphi^{\cdot} = \mu\cos\theta\cos\varphi, \quad 2\mu^2\cos\theta = 1 - \cos\sigma$$

$$\gamma = \cos\theta\,(\cos^2\varphi + \cos\sigma\sin^2\varphi) - \sin\theta\sin\sigma\sin\varphi$$

$$\gamma' = -\cos\varphi\,[\sin\theta\sin\sigma + (1-\cos\sigma)\cos\theta\sin\varphi]$$

$$\gamma'' = \cos\theta\sin\sigma\sin\varphi + \sin\theta\cos\sigma$$

**6. Свойства движения.** Полученное решение позволяет легко установить закономерность в реальном движении тела. При стремлении $t \to \infty$ оказывается $\tau_1 \to \infty$, $\sin\varphi \to 1$. Поэтому $p \to 0$, $r \to 0$, $\gamma' \to 0$. Угол прецессии $\psi$ определим так: $\psi^{\cdot}(\gamma^2 + \gamma'^2) = p\gamma + q\gamma'$. При $t \to \infty$ скорость прецессии $\psi^{\cdot} \to 0$, причем, как выясняется, сам угол $\psi$ стремится к конечному пределу. Итак, при $t \to \infty$ движение тела стремится к предельному, а именно к вращению вокруг неподвижной горизонтальной оси, совпадающей с главной осью инерции $y$ по закону физического маятника (5.1).

Отметим еще одну особенность, помогающую представить картину движения. Известно, что $\cos\theta$ периодически обращается в нуль. В такие моменты времени будет $\theta^{\cdot} = 0$, $\cos\sigma = 1$, и поэтому $r = 0$, $\gamma = \gamma' = 0$. Далее, интеграл энергии дает $p^2 + q^2 = 3l_1$. Значит в эти моменты времени ось $z$ динамической симметрии тела становится вертикально, а вектор угловой скорости, имея в эти моменты один и тот же модуль, направлен горизонтально. Такое состояние повторяется по истечении каждого периода маятника (5.1).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковалевская С. В.* Научные работы. М.: Изд-во АН СССР, 1948. 368 с.
2. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1958. 288 с.
3. *Архангельский Ю. А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
4. *Аппельрот Г. Г.* Не вполне симметричные тяжелые гироскопы.— В кн.: Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1940, с. 188.
5. *Ипатов А. Ф.* Движение гироскопа С. В. Ковалевской на границе области ультраэллиптичности.— Уч. зап. Петрозаводск. ун-та. Матем. науки, 1971, 18, вып.2.
6. *Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А.* Классические задачи динамики твердого тела. Киев.: Наукова думка, 1978. 296 с.
7. *Докшевич А. И.* Новый класс движений волчка Ковалевской.— Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 6, с. 1336.

Донецк

Поступила в редакцию 22.V.1979