Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 4, 1981

УДК 539.3+532.5

ДВИЖЕНИЕ ШТАМПА ПО ПОВЕРХНОСТИ ТОНКОГО ПОКРЫТИЯ, ЛЕЖАЩЕГО НА ГИДРАВЛИЧЕСКОМ ОСНОВАНИИ

Александров В. М., Коваленко Е. В.

Рассматривается динамическая плоская задача о воздействии жесткого тела (штампа) на слой идеальной жидкости бесконечной глубины. Давление от штампа на жидкость передается через тонкое покрытие (мембрану). Штамп движется по границе покрытия с постоянной скоростью. Силы трения в области контакта предполагаются отсутствующими, течение в жидкости установившимся, потенциальным. Подобная задача возникает при исследовании процесса динамического воздействия твердых тел на поверхность ледяного покрова.

Задача приведена к одномерному интегральному уравнению первого рода типа свертки на конечном интервале. Изучена структура ядра полученного уравнения и характерные особенности его решения. Показано, что задача корректно разрешима лишь в классе обобщенных функций медленного роста. Для построения приближенного решения интегрального уравнения использованы асимптотические методы.

1. Пусть на поверхности слоя тяжелой идеальной несжимаемой жидкости бесконечной глубины ($y \leqslant 0$) покоится деформируемый слой малой толщины. Пусть, далее, вдоль границы такого составного основания движется с постоянной скоростью V без трения жесткий штамп, прижимаемый к нему силой P, эксцентриситет приложения которой e. Предполагаем, что в процессе движения штампа не происходит отслоения покрытия от жидкости. Допустим, что в подвижной системе координат, связанной со штампом, основание его описывается функцией $f(x')$, а линия контакта определяется неравенством $|x'| \leqslant a$.

В качестве физической модели покрытия (слоя) взята модель мембраны, описываемая уравнением

$$-\sigma v'' = p^*(x, t) - q^*(x, t) - \rho^* \ddot{v} \tag{1.1}$$

Здесь v — перемещение точек мембраны по оси y, σ — натяжение мембраны, $p^*(x, t) = p(x')$ — реактивное давление, действующее на слой со стороны жидкости, $q^*(x, t) = q(x')$ — контактное давление, отличное от нуля лишь при $|x'| \leqslant a$, $x' = x - Vt$, ρ^* — поверхностная плотность материала покрытия.

Физико-механические свойства жидкости будем описывать линеаризованными уравнениями установившегося потенциального течения

$$\Delta\varphi = 0, \quad v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x'} - V, \quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad p = \rho V \frac{\partial\varphi}{\partial x'} - \rho g y \tag{1.2}$$

где $\varphi(x', y)$ — потенциал скоростей, p — давление в жидкости, ρ — плотность жидкости, g — постоянная силы тяжести, v_x, v_y — проекции скорости частиц жидкости в точке потока на оси подвижной системы координат.

При $|x'| \leqslant a$ известно также, что в силу условия контакта штампа с покрытием

$$v = -[\delta + \alpha x' - f(x')] \tag{1.3}$$

Здесь $\delta + \alpha x'$ — жесткое перемещение штампа под действием приложенных к нему силы P и момента $M = Pe$.

В подвижной системе координат граничное условие (1.1) при $y = 0$ будет иметь вид

$$-Tv'' = p(x') - q(x'), \quad T = \sigma - \rho^* V^2 \tag{1.4}$$

Примем теперь, как в теории тонкого крыла [1], что условие контакта жидкости с поверхностью покрытия имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -V\frac{\partial v}{\partial x'} \tag{1.5}$$

Тогда условие (1.4) и последнее соотношение (1.2) можно при $y = 0$ представить в форме

$$-T\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = V[p(x) - q(x)] \tag{1.6}$$
$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho V\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \rho g V^{-1}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Здесь и далее штрих у подвижной координаты x' опускаем.

Будем еще предполагать, что возмущения в жидкости, вызванные движением штампа, исчезают при $(x^2 + y^2) \to \infty$.

Решим с помощью интегрального преобразования Фурье дифференциальное уравнение (1.2) для φ при граничных условиях (1.6) и условии отсутствия возмущений в жидкости на бесконечности. Получим следующее выражение для перемещения v при $y = 0$:

$$v(x) = -\frac{1}{\pi T}\int_{-a}^{a} q(\xi)\,d\xi \int_0^\infty \frac{\cos u(\xi - x)\,du}{u^2 - A_1 u + A_0} \tag{1.7}$$
$$A_1 = \rho V^2 T^{-1}, \quad A_0 = \rho g T^{-1}$$

Рассмотрим случай, когда скорость движения штампа $V < V_1$, где $V_1^2 = 2\varkappa^2(\sqrt{1 + V_2^2\varkappa^{-2}} - 1)$, $\varkappa^2 = \rho^* g \rho^{-1}$, а $V_2 = \sqrt{\sigma/\rho^*}$ и представляет собой скорость распространения поперечных волн в упругом покрытии. Тогда выражение, стоящее под знаком внутреннего интеграла в (1.7), не имеет полюсов на действительной полуоси.

Используя теперь условие контакта штампа с покрытием (1.3), получим интегральное уравнение, определяющее закон распределения контактного давления $q(x)$. В безразмерных переменных и обозначениях оно будет иметь вид

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi') K\left(\frac{\xi' - x'}{\lambda}\right) d\xi' = \pi\lambda^{-1}[\delta' + \alpha x' - r(x')] \quad (|x'| \leqslant 1) \tag{1.8}$$

$$K(z) = \int_0^\infty \frac{\cos uz du}{u^2 - 2Bu + 1}, \quad B = \frac{A_1}{2\sqrt{A_0}}, \quad \lambda = \frac{1}{a\sqrt{A_0}}$$

$$\varphi(x') = q(ax')\,T^{-1}a, \quad r(x') = f(ax')\,a^{-1}, \quad \delta' = \delta a^{-1},$$
$$x' = xa^{-1}$$

В дальнейшем штрихи в (1.8) будем опускать.

Отметим, что в частном случае покоящегося штампа ($V = 0$, задача 2) нужно в (1.8) положить $B = 0$.

К уравнению (1.8) необходимо еще добавить условия статики

$$N_0 = PT^{-1} = \int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\,d\xi, \quad N_1 = Pe\,(Ta)^{-1} = \int_{-1}^{1} \xi\varphi(\xi)\,d\xi \tag{1.9}$$

Кроме того, исходя из физического смысла рассматриваемой задачи далее будем требовать, чтобы $v(x) \in C(-R, R)$, где R — сколь угодно большое число. Здесь $C(-R, R)$ — пространство непрерывных при $|x| \leqslant R$ функций.

2. Отметим, что задача 2 соответствует изгибу штампом мембраны на основании Фусса — Винклера с коэффициентом постели $k = \rho g$. Решение этой задачи может быть найдено в замкнутом виде методом «разбиения по участкам» [2]. Для этого уравнение (1.4) с учетом последнего соотношения (1.2) представим в виде

$$\begin{gathered} -Tv_1'' + kv_1 = 0 \ (-\infty < x < -a) \\ q(x) = Tf''(x) - kv_2, \ v_2 = -[\delta + \alpha x - f(x)] \ (|x| \leqslant a) \\ -Tv_3'' + kv_3 = 0 \quad (a < x < \infty) \end{gathered} \tag{2.1}$$

Требуется определить $v_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$), $q(x)$, сосредоточенные силы P_1, P_2, возникающие в точках $x = +a$ и $x = -a$, а также зависимость величин δ и α от величины силы P и момента $M = Pe$, приложенных к штампу.

Величина $q(x)$ определяется вторым соотношением (2.1), а из дифференциальных уравнений (2.1) при граничных условиях

$$v_1 \to 0 \ (x \to -\infty), \ v_3 \to 0 \ (x \to \infty)$$
$$v_1(-a) = -[\delta - \alpha a - f(-a)], \ v_3(a) = -[\delta + \alpha a - f(a)]$$

найдем следующие выражения для v_1 и v_3:

$$\begin{gathered} v_{2i+1}(x) = -\{\delta + (-1)^{i+1}\alpha a - f[(-1)^{i+1}a]\} \times \\ \times \exp\{B_1[a - (-1)^{i+1}x]\}, \ B_1^2 = kT^{-1}, \quad i = 0, 1 \end{gathered} \tag{2.2}$$

Сосредоточенные силы P_j найдем из условий

$$P_1 = T[v_2'(-a) - v_1'(-a)], \ P_2 = T[v_3'(a) - v_2'(a)]$$

Подставляя сюда (2.2) и формулу для v_2 из (2.1), получим

$$\begin{gathered} P_1 = -T[\alpha - f'(-a)] + TB_1[\delta - \alpha a - f(-a)] \\ P_2 = T[\alpha - f'(v)] + TB_1[\delta + \alpha a - f(a)] \end{gathered} \tag{2.3}$$

Используя теперь условия статики

$$P = P_1 + P_2 + \int_{-a}^{a} q(x)\,dx, \quad M = a(P_2 - P_1) + \int_{-a}^{a} xq(x)\,dx$$

будем иметь

$$P = TB_1\left[2\delta(aB_1+1) - B_1\int_{-a}^{a} f(x)\,dx - f(a) - f(-a)\right] \tag{2.4}$$

$$M = T\left\{2a\alpha\left(1+\frac{1}{3}B_1^2a^2 + aB_1\right) - \right.$$

$$\left. - [f(a) - f(-a)](1+aB_1) - B_1^2\int_{-a}^{a} xf(x)\,dx\right\}$$

Исключая величину δ из второй формулы (2.1) и формул (2.3) и переходя к безразмерным переменным и обозначениям

$$x = ax', \quad \lambda = (aB_1)^{-1}, \quad \varphi^*(x') = aq(ax')\,T^{-1}$$

$$r(x') = f(ax')\,a^{-1}, \; N_0 = PT^{-1}, \; P^* = P_1T^{-1}$$

придем в четном случае $r(x) = r(-x), \alpha = 0$ к следующим соотношениям (штрихи, как и ранее, опустим):

$$\varphi^*(x) = r''(x) + \lambda^{-2}[\lambda P^* + \lambda r'(1) + r(1) - r(x)] \tag{2.5}$$

$$P^* = \left[-(1+\lambda)r'(1) - \lambda^{-1}r(1) + \frac{1}{2}N_0 + \lambda^{-1}\int_0^1 r(x)\,dx\right](1+\lambda)^{-1}$$

3. Перейдем теперь к исследованию задач 1, 2 с помощью полученного выше интегрального уравнения (1.8). Ядро его представим в виде

$$K(z) = (b_2 - b_1)^{-1}\{\cos(b_1z)\operatorname{ci}(b_1z) + \sin(b_1z)\times \tag{3.1}$$
$$\times[\operatorname{Si}(b_1z) + {}^1/_2\pi\operatorname{sgn} z] - \cos(b_2z)\operatorname{ci}(b_2z) - \sin(b_2z)\times$$
$$\times[\operatorname{Si}(b_2z) + {}^1/_2\pi\operatorname{sgn} z]\}; \quad b_1 = B - \sqrt{B^2-1} \quad b_2 = B +$$
$$+\sqrt{B^2-1}$$

Здесь $\operatorname{ci}(x)$, $\operatorname{si}(x)$, $\operatorname{Si}(x)$ — интегральные косинус и синусы.

На основании (3.1) может быть сформулирована

Лемма 1. При всех значениях $|z| \leqslant R$, где R — любое сколь угодно большое число, справедливо представление

$$K(z) = -\frac{1}{2}\pi|z| + \frac{1}{2}D_1z^2\ln|z| + \frac{1}{2}D_2z^2 + D_3 + F(z) \tag{3.2}$$

$$D_1 = b_1 + b_2, \quad D_2 = D_1\left(C - \frac{3}{2}\right) + \frac{b_2^2\ln b_2 - b_1^2\ln b_1}{b_2 - b_1}$$

$$D_3 = \frac{\ln b_1 - \ln b_2}{b_2 - b_1}$$

$$F(z) \in B_2^1(-R, R), \quad F(z) \sim |z|^3 \quad (z \to 0)$$

Здесь $B_k^\gamma(-R, R)$ — пространство функций, k-е производные которых при $z \in (-R, R)$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем $0 < \gamma \leqslant 1$, C — постоянная Эйлера.

Исследуем структуру решения интегрального уравнения (1.8). Для этого рассмотрим следующее вспомогательное уравнение:

$$\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)|\xi - x|\,d\xi = -2\psi(x) \quad (|x| \leqslant 1) \tag{3.3}$$

Согласно результатам п. 2, решение $\varphi(x)$ интегрального уравнения (3.3) должно содержать в виде слагаемых дельта-функции в точках $x \pm 1$, которые отражали бы появление в контактных усилиях сосредоточенных сил на краях линии контакта. Вместе с тем по физическому смыслу рассматриваемой задачи, как ранее уже омечалось, $v(x) \in C(-R, R)$. Это условие накладывает ограничение на порядок обобщенной функции $\varphi(x)$. С учетом сказанного может быть сформулирована

Теорема 1. Если $\psi''(x) \in C(-1, 1)$, то решение интегрального уравнения (3.3) в пространстве обобщенных функций медленного роста Φ [3] существует, единственно и имеет вид

$$\varphi(x) = -\psi''(x) + P_1\delta(x+1) + P_2\delta(x-1) \tag{3.4}$$

причем постоянные P_j $(j = 1, 2)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} &\psi'(1) + \psi'(-1) + P_1 - P_2 = 0 \\ &\psi'(-1) - \psi'(1) + \psi(-1) + \psi(1) + P_1 + P_2 = 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

($\delta(x)$ — дельта-функция Дирака).

Действительно, функция $\varphi(x)$ вида (3.4) обращает интегральное уравнение (3.3) в тождество, если выполнены соотношения (3.5). Единственность решения (3.4) следует из теоремы, приведенной в [3] на стр. 158.

Отметим, что для случая четной функции $\psi(x)$ в (3.3) соотношения (3.5) вместе с условиями (1.9) дают

$$P_1 = P_2 = P^* = \psi'(1) - \psi(1),\ N_0 = -2\psi(1),\ N_1 = 0 \tag{3.6}$$

а для нечетного случая аналогичным образом имеем

$$P_1 = -P_2 = P^* = -\psi'(1),\quad N_0 = 0,\quad N_1 = 2\psi(1) \tag{3.7}$$

Перепишем теперь интегральное уравнение (1.8) с учетом представления (3.2) в виде

$$\begin{gathered} \int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\left[|\xi - x| - \frac{D_1}{\pi\lambda}\ln\left|\frac{\xi - x}{\lambda}\right|\right] d\xi = -2\omega(x) \quad (|x| \leqslant 1) \\ \omega(x) = \delta + \alpha x - r(x) - \frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\left[D_2\frac{(\xi - x)^2}{2\lambda^2} + \right. \\ \left. + D_3 + F\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right)\right] d\xi \end{gathered} \tag{3.8}$$

Допустим, что $r''(x) \in C(-1, 1)$. Если предположить, что функция $\varphi(x) \in \Phi$ (с порядком, равным нулю), то в силу свойств функции $F(z)$, указанных в лемме, будем иметь $\omega''(x) \in C(-1, 1)$. Отсюда с учетом теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Если $r''(x) \in C(-1, 1)$ и решение интегрального уравнения (3.8) существует в пространстве обобщенных функций медленного роста Φ, то оно имеет вид

$$\begin{gathered} \varphi(x) = \varphi^*(x) + \frac{D_1}{\pi\lambda}\left[P_1 \ln\frac{1+x}{\lambda} + P_2 \ln\frac{1-x}{\lambda}\right] + \\ + P_1\delta(x+1) + P_2\delta(x-1) \end{gathered} \tag{3.9}$$

причем функция $\varphi^*(x) \in C(-1, 1)$ и определяется из интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$(3.10)\qquad \varphi^*(x)-\frac{1}{\pi\lambda}\int_{-1}^{1}\varphi^*(\xi)\left[D_1\ln\left|\frac{\xi-x}{\lambda}\right|+F''\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)\right]d\xi=$$
$$=r''(x)+\frac{1}{\pi\lambda}\left(D_2+\frac{3}{2}D_1\right)N_0+\frac{1}{\pi\lambda}\left[P_1F'''\left(\frac{1+x}{\lambda}\right)+\right.$$
$$\left.+P_2F'''\left(\frac{1-x}{\lambda}\right)\right]+\frac{D_1}{(\pi\lambda)^2}[P_1\theta_+(x)+P_2\theta_-(x)]\quad(|x|\leqslant 1)$$
$$\theta_\pm(x)=\int_{-1}^{1}\ln\frac{1\pm\xi}{\lambda}\left[D_1\ln\left|\frac{\xi-x}{\lambda}\right|+F''\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)\right]d\xi$$

Постоянные P_j $(j=1,2)$ связаны соотношениями (3.5), а

$$(3.11)\qquad \psi(x)=\omega(x)-\frac{D_1}{2\pi\lambda}\int_{-1}^{1}(\xi-x)^2\ln\left|\frac{\xi-x}{\lambda}\right|d\xi$$

и определяются после решения уравнения (3.10) с учетом формул (3.9), (1.9) При этом для четного и нечетного случаев задач 1, 2 также имеют место формулы (3.6), (3.7).

Для доказательства теоремы, считая функцию $\psi(x)$ (3.11) временно известной, обратим интегральный оператор в (3.8) с ядром $|\xi-x|$. Согласно формуле (3.4), получим относительно $\varphi(x)$ следующее интегральное уравнение второго рода:

$$(3.12)\qquad \varphi(x)-\frac{1}{\pi\lambda}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\left[D_1\ln\left|\frac{\xi-x}{\lambda}\right|+F''\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)\right]d\xi=$$
$$=r''(x)+(\pi\lambda)^{-1}(D_2+{}^3/_2D_1)N_0+P_1\delta(x+1)+P_2\delta(x-1)$$
$$(|x|\leqslant 1)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде (3.9). Подставляя (3.9) в (3.12) и используя свойства дельта-функции, придем к интегральному уравнению (3.10). Отметим, что последнее является уравнением Фредгольма второго рода с логарифмическим ядром и непрерывным свободным членом. Если уравнение (3.10) разрешимо при заданном значении $\lambda\in(0,\infty)$, то функция $\varphi^*(x)\in C(-1,1)$. При этом также однозначно разрешимо исходное интегральное уравнение (3.8).

4. Вернемся к задаче 2 и найдем ее замкнутое решение, используя интегральное уравнение (1.8). Учитывая представление (1.8) для $K(z)$ при $B=0$, получим для определения $\varphi(x)$ интегральное уравнение (3.8), в котором следует положить $D_1=0$, $D_2=\pi/2$. Будем, как указано выше, искать его решение в виде (3.9) $(D_1=0)$. Тогда интегральное уравнение (3.10) запишется в форме

$$(4.1)\qquad \varphi^*(x)-\frac{1}{2\lambda}\int_{-1}^{1}\varphi^*(\xi)\exp\left(-\frac{|\xi-x|}{\lambda}\right)d\xi=$$
$$=r''(x)+\frac{1}{2\lambda}e^{-1/\lambda}\left(P_1e^{-x/\lambda}+P_2e^{x/\lambda}\right)\quad(|x|\leqslant 1)$$

Выражение (4.1) будет иметь место при дополнительных соотношениях (3.5). Последние с учетом второй формулы (3.8), формулы (3.11) $(D_1=0)$

и выражения для $F(z)$ запишем в виде

$$(4.2)\qquad 2\alpha - r'(1) - r'(-1) + e^{-1/\lambda}\int_{-1}^{1}\varphi^*(\xi)\operatorname{sh}\frac{\xi}{\lambda}d\xi + {}^1/_2(1+e^{-2/\lambda})(P_1 - P_2) = 0$$

$$2\delta - r(1) - r(-1) + r'(1) - r'(-1) - (1+\lambda)e^{-1/\lambda}\int_{-1}^{1}\varphi^*(\xi)\times \operatorname{ch}\frac{\xi}{\lambda}d\xi + {}^1/_2[(1-\lambda)-(1+\lambda)e^{-2/\lambda}](P_1+P_2) = 0$$

В четном случае ($r(x) = r(-x)$, $\alpha = 0$), разыскивая решение интегрального уравнения (4.1) при условиях (4.2) в виде

$$\varphi^*(x) = r''(x) - \lambda^{-1}r(x) + D \quad (D = \text{const})$$

придем после ряда преобразований с учетом условий статики (1.9) к формулам (2.5). Здесь, однако, возникает вопрос, является ли построенное решение единственным решением уравнения (4.1). Ответ на него дает

Теорема 3. В классе функций $\varphi^*(x) \in C(-1, 1) \cap V(-1, 1)$ однородное уравнение (4.1) не имеет положительных собственных значений.

Здесь $V(-1, 1)$ — пространство функций, имеющих на сегменте $[-1, 1]$ конечное изменение.

Для доказательства введем в рассмотрение трансформанту Фурье функции $\varphi^*(x)$

$$(4.3)\qquad \Phi^*(u) = \int_{-1}^{1}\varphi^*(\xi)e^{iu\xi}d\xi \quad (\Phi^*(u) = O(u^{-1}),\ |u| \to \infty)$$

и перепишем однородное уравнение (4.1) следующим образом:

$$(4.4)\qquad \varphi^*(x) - \frac{1}{2\pi\lambda^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi^*(u)e^{-iux}}{u^2+\lambda^{-2}}du = 0 \quad (|x| \leqslant 1)$$

В силу свойств $\varphi^*(x)$, указанных в условии теоремы, представление (4.3) правомерно, функция $\Phi^*(u)$, по меньшей мере, непрерывна и имеет место оценка [4], приведенная в скобках в (4.3).

Умножим обе части (4.4) на $\varphi^*(x)dx$ и проинтегрируем в пределах от -1 до $+1$. С учетом равенства Парсеваля [3] получим

$$(4.5)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}|\Phi^*(u)|^2\frac{u^2}{u^2+\lambda^{-2}}du = 0$$

Из указанной оценки следует, что интеграл в (4.6) сходится. Заметим также, что для выполнения соотношения (4.6) необходимо и достаточно, чтобы $\Phi^*(u) \equiv 0$, откуда $\varphi^*(x) \equiv 0$ и теорема доказана.

Подобная теорема может быть доказана аналогичным образом и для интегрального уравнения (3.10) задачи 1.

5. Займемся построением асимптотических решений интегрального уравнения (3.10), соответствующего задаче 1, при больших и малых значениях параметра $\lambda \in (0, \infty)$.

С учетом (3.1) убедимся, что для $F(z)$ в (3.2) при всех $0 \leqslant |z| < \infty$

справедливо представление

$$F(z) = (b_2 - b_1)^{-1} \{f_1(b_1 z) \ln b_1 \mid z \mid - f_1(b_2 z) \ln b_2 \mid z \mid + \\ + (2 \mid z \mid)^{-1} [b_1^{-1} f_2(b_1 z) - b_2^{-1} f_2(b_2 z)] + f_3(b_1 z) - f_3(b_2 z)\} \tag{5.1}$$

$$f_j(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} z^{2k+2} \quad (j = 1, 2, 3)$$

Постоянные a_{jk} ради краткости не приводим.

Следуя [5], будем искать решение интегрального уравнения (3.10) при больших значениях параметра λ в форме

$$\varphi^*(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} \varphi_{ij}(x) \lambda^{-i} (\ln \lambda)^j \tag{5.2}$$

Подставляя (5.2) в (3.10) и приравнивая затем в полученном соотношении коэффициенты левой и правой частей при одинаковых степенях λ^{-1} и $\ln \lambda$, получим бесконечную систему рекуррентных соотношений для последовательного определения функций $\varphi_{ij}(x)$:

$$\varphi_{00}(x) = r''(x), \quad \varphi_{10}(x) = \frac{D_1}{\pi} \int_{-1}^{1} \varphi_{00}(\xi) \ln |\xi - x| d\xi + \\ + \frac{1}{\pi} \left(D_2 + \frac{3}{2} D_1\right) [P_1 + P_2 + r'(1) + r'(-1)], \\ \varphi_{11}(x) = -\frac{D_1}{\pi} \int_{-1}^{1} \varphi_{00}(\xi) d\xi, \ldots \tag{5.3}$$

Определив из (5.3) $\varphi_{ij}(x)$, найдем затем постоянные P_j ($j = 1, 2$), δ и α по формулам (1.9), (3.5) и (3.12), связав их с N_0, N_1, и построим, таким образом согласно (3.9) асимптотическое решение интегрального уравнения задачи 1 при больших значениях параметра λ.

Для четного случая задачи с точностью до членов порядка λ^{-2} будем иметь

$$\varphi(x) = r''(x) + \frac{D_1}{\pi\lambda} \int_{-1}^{1} r''(\xi) \ln \left| \frac{\xi - x}{\lambda} \right| d\xi + P^* \delta(x + 1) + \\ + P^* \delta(x - 1) + \frac{D_1}{\pi\lambda} P^* \ln \frac{1 - x^2}{\lambda^2} + \\ + \frac{1}{\pi\lambda} (3D_1 + 2D_2)[P^* + r'(1)]$$

$$N_0 = 2[r'(1) + P^*] + \frac{D_1}{\pi\lambda} \int_{-1}^{1} r''(\xi)[(1 - \xi) \ln (1 - \xi) + \\ + (1 + \xi) \ln (1 + \xi)] d\xi + \frac{2}{\pi\lambda} (D_1 + 2D_2)[P^* + r'(1)] + \\ + \frac{4}{\pi\lambda} D_1 \ln \frac{2}{\lambda} [P^* + r'(1)]$$

6. Рассмотрим теперь случай достаточно малых λ. Ограничимся построением главного (нулевого) члена асимптотики решения задачи 1.

Прежде всего получим вырожденное при $\lambda \to 0$ решение интегрального уравнения (1.8). Производя в ядре $K(z)$ замены переменных $z = y\lambda^{-1}$,

$u = \gamma\lambda$ и учитывая, что λ мало и $B \sim \lambda^{\circ}$, будем иметь

$$K\left(\frac{y}{\lambda}\right) = \lambda \int_0^{\infty} \cos \gamma y d\gamma \to \lambda\pi\delta(y)$$

Тогда интегральное уравнение (1.8) примет вид

$$\int_{-1}^{1} \varphi_0(\xi)\,\delta(\xi - x)\,d\xi = \lambda^{-2}[\delta + \alpha x - r(x)] \quad (|x| \leqslant 1) \tag{6.1}$$

и представляет собой уравнение контактной задачи о взаимодействии штампа с основанием Фусса — Винклера. Решение его может быть легко получено и имеет вид

$$\varphi_0(x) = \Omega(x)\lambda^{-2} = \lambda^{-2}[\delta + \alpha x - r(x)] \tag{6.2}$$

Перейдем к исследованию уравнения (1.8) при $\lambda \ll 1$ методом сращиваемых асимптотических разложений [6]. Под внешней областью будем понимать интервал $-1 + m\lambda \leqslant x \leqslant 1 - n\lambda$, на котором в качестве решения уравнения задачи 1 с достаточно малой ошибкой может быть принято «вырожденное решение» задачи (6.2). Внутренними областями назовем малые окрестности точек $x = \pm 1$ с размерами $n\lambda$ и $m\lambda$; в этих областях влияние покрытия на распределение контактных напряжений под штампом соизмеримо с величиной $\varphi_0(x)$. Во внутренних областях должны быть построены решения типа погранслоя, которые в соответствии с (3.9) должны отражать характерное поведение функции $\varphi(x)$ в окрестности точек $x = \pm 1$, а на границах областей $x = 1 - n\lambda$, $x = -1 + m\lambda$ плавно сращиваться с вырожденным решением $\varphi_0(x)$.

Принимая во внимание, что при $n\lambda \ll 1$ и $m\lambda \ll 1$

$$\varphi_0(1 - n\lambda) = \Omega(1)\lambda^{-2}[1 + O(n\lambda)] \tag{6.3}$$
$$\varphi_0(-1 + m\lambda) = \Omega(-1)\lambda^{-2}[1 + O(m\lambda)]$$

будем искать решения типа погранслоя в окрестности точек $x = \pm 1$ соответственно в виде

$$\varphi_+(x) = \lambda^{-2}\chi\left(\frac{1-x}{\lambda}\right)[1 + O(n\lambda)] \tag{6.4}$$
$$\varphi_-(x) = \lambda^{-2}\Psi\left(\frac{1+x}{\lambda}\right)[1 + O(m\lambda)]$$

Сращивание будем производить, считая, что при любых достаточно больших m и n:

$$\varphi_0(1 - n\lambda) = \varphi_+(1 - n\lambda), \quad \varphi_0(-1 + m\lambda) = \varphi_-(-1 + m\lambda) \tag{6.5}$$

Чтобы получить уравнение для определения функции $\chi(t)$, подставим $\varphi_+(x)$ (6.4) в интегральное уравнение (1.8), произведем замены переменных вида $t = (1 - x)\lambda^{-1}$, $\tau = (1 - \xi)\lambda^{-1}$ и устремим затем λ к нулю. В результате придем к выводу, что функция $\chi(t)$ должна быть найдена из интегрального уравнения

$$\int_0^{\infty} \chi(\tau) K(t - \tau)\,d\tau = \pi\Omega(1) \quad (0 \leqslant t < \infty) \tag{6.6}$$

Аналогичным образом убедимся, что и функция $\Psi(t)$ $(t = (1 + x)\lambda^{-1})$ должна удовлетворять уравнению типа (6.6).

С помощью формул (6.2)—(6.4) определим равномерно-пригодное [6] асимптотическое решение интегрального уравнения (1.8)

$$\varphi_u(x) = \Lambda(x) + P_1\delta(x+1) + P_2\delta(x-1) = \tag{6.7}$$
$$= \lambda^{-2}\left[\Omega(x) + \chi\left(\frac{1-x}{\lambda}\right) + \Psi\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) - \Omega(1) - (\Omega - 1)\right]$$

7. Таким образом, осталось найти решение интегрального уравнения Винера—Хопфа (6.6). Как известно [7], основная трудность заключается в проведении факторизации функции

$$L_\varepsilon(u) = (u^2 - 2B\sqrt{u^2+\varepsilon^2} + 1)^{-1} = L_+(u)L_-(u) \quad (\varepsilon \to 0)$$

поэтому, используя идею Койтера [7], аппроксимируем $L(u)$ следующим выражением:

$$L(u) = \frac{1}{u^2+1}\frac{P_1^*(u)}{P_2^*(u)} \tag{7.1}$$

где $P_1^*(u)$, $P_2^*(u)$ — четные полиномы одинаковых порядков $2n$, не имеющие нулей на вещественной оси.

Ограничиваясь далее получением лишь качественных результатов, рассмотрим простейший случай (7.1), полагая $P_1^*(u) = P_2^*(u) = 1$. В соответствии с формулой (3.9) будем искать решение интегрального уравнения (6.6) в виде

$$\chi(t) = \chi^*(t) + Q_2\delta(t) \qquad (Q_2 = \lambda P_2) \tag{7.2}$$

Подставляя (7.2) в (6.6), будем иметь

$$\int_0^\infty \chi^*(\tau)K(t-\tau)\,d\tau = \pi[\Omega(1) - \pi^{-1}Q_2K(t)] \quad (0 \leqslant t < \infty) \tag{7.3}$$

откуда методами работы [8] получим следующую задачу Римана для вещественной оси:

$$\chi_+^*(\alpha) = (1+\alpha^2)\chi_-^*(\alpha) + \frac{i}{\sqrt{2\pi}}(1+\alpha^2)\left[\frac{\Omega(1)}{\alpha} - \frac{Q_2}{2}\frac{1}{i+\alpha}\right] \tag{7.4}$$

Как известно [9], за счет вполне определенного выбора постоянной Q_2 можно избавиться от всех введенных в [8] условий разрешимости функционального уравнения (7.4) в классе функций, убывающих на бесконечности. Именно, полагая

$$Q_2 = \Omega(1) \tag{7.5}$$

найдем $\chi^*(t) = \Omega(1)$. Заметим, что при этом выполнено первое из условий сращивания (6.5). Отметим также, что соотношение (7.5) является условием разрешимости типа (3.5) уравнения (1.8) при $\lambda \to 0$ в пространстве обобщенных функций медленного роста.

Аналогично можно построить решение типа погранслоя на крае $x = -1$.

Связь между величинами N_0, N_1 и δ, α найдем из условий статики (1.9) с учетом формул (7.2), (7.5), (6.2), (6.5).

В случае штампа с закругленными углами полудлина a линии контакта становится неизвестной. Для определения величины a в этом случае следует учесть, что функция $v'(x) \in C(-R, R)$ и поэтому $P_1 = P_2 = 0$. Это условие является дополнительным для определения величины a.

В заключение отметим, что аналогичным образом может быть изучена задача о движении жесткого штампа по пластине Кирхгофа — Лява, лежащей на гидравлическом основании. При этом общее решение задачи будет содержать в качестве слагаемого выражение

$$P_1\delta(x+1) + M_1\delta'(x+1) + P_2\delta(x-1) + M_2\delta'(x-1)$$

Авторы благодарны Арутюняну Н. Х. за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 123 с.
2. *Александров В. М.* Некоторые контактные задачи для балок, пластинок и оболочек.— Инж. ж., 1965, № 5, вып. 4, с. 782—785.
3. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976, 528 с.
4. *Бохнер С.* Лекции об интегралах Фурье. М.: Физматгиз, 1962. 360 с.
5. *Александров В. М., Арутюнян Н. Х.* Взаимодействие движущегося упругого штампа с упругой полуплоскостью через накладку или тонкий слой идеальной жидкости.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 3, с. 475—485.
6. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
7. *Нобл Б.* Метод Винера—Хопфа. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 280 с.
8. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 296 с.
9. *Иванов В. В.* Об уравнениях Винера—Хопфа первого рода.— Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 3, с. 489—492.

Москва

Поступила в редакцию
30.VI.1980