

УДК 539.3

## МЕТОД ФИКТИВНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ В ПЛОСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ СЦЕПЛЕНИЯ

Бабешко В. А., Пряхина О. Д.

Метод, предложенный для решения динамических контактных задач в отсутствие трения [1], обобщается на случай полного сцепления. В отличие от других подходов решения указанных задач [2—5] этот метод позволяет эффективно описывать поведение контактных напряжений как во внутренней части, так и в окрестности краев. Отметим, что использование этого метода в случае системы интегральных уравнений потребовал значительного усовершенствования подхода, изложенного в [1].

1. Ряд плоских контактных задач теории упругости о вибрации штампа, жестко сцепленного с упругим полупространством, слоем или слоистой средой, сводится к системе интегральных уравнений в матричной форме

$$(1.1) \quad \int_{-a}^a \mathbf{r}(x - \xi) \mathbf{q}(\xi) d\xi = \mathbf{f}(x), \quad |x| \leq a$$

$$\mathbf{r}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \mathbf{R}(u) e^{-iux} du, \quad \mathbf{q}(x) = \{q_1(x), q_2(x)\},$$

$$\mathbf{f}(x) = \{f_1(x), f_2(x)\}$$

Здесь  $q_1(x)$ ,  $q_2(x)$  — соответственно касательные и нормальные контактные напряжения,  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  — заданные амплитуды касательных и нормальных смещений точек под штампом,  $2a$  — ширина штампа. Элементы  $R_{mn}(u)$  ( $m, n = 1, 2$ ) матрицы  $\mathbf{R}(u)$  связаны с элементами вещественной матрицы  $\mathbf{K}(u)$  соотношениями

$$R_{mm}(u) = K_{mm}(u), \quad R_{12}(u) = -R_{21}(u) = iK_{12}(u)$$

Функции  $K_{mn}(u)$  регулярны на вещественной оси всюду, за исключением одних и тех же для всех этих функций полюсов  $u = \pm p_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Диагональные элементы  $K_{mm}(u)$  — четные,  $K_{12}(u)$  — нечетная функции. При  $|u| \rightarrow \infty$  функции  $K_{mn}(u)$  имеют следующее асимптотическое представление:

$$K_{mm}(u) = c |u|^{-1} [1 + O(u^{-1})], \quad c > |b|$$

$$K_{12}(u) = bu^{-1} [1 + O(u^{-1})]$$

Расположение контура  $\sigma$  диктуется принципом предельного поглощения и определяется в соответствии с правилами, установленными в работе [6].

Система интегральных уравнений (1.1) при указанных свойствах ядер однозначно разрешима в  $L_\alpha(-a, a)$ ,  $\alpha > 1$ . Критерии единственности определены в работах [6, 7].

Представим  $\mathbf{R}(u)$  в виде произведения двух матриц

$$\mathbf{R}(u) = \mathbf{S}(u) \mathbf{\Pi}(u)$$

так, чтобы поведение элементов  $s_{mn}$  матрицы  $\mathbf{S}(u)$  на бесконечности совпадало с поведением соответствующих элементов  $r_{mn}$  матрицы  $\mathbf{R}(u)$ . Очевидно, что тогда матрица  $\pi(u)$  с вещественными элементами, связанная с  $\mathbf{\Pi}(u)$  соотношениями

$$(1.2) \quad \Pi_{mm} = \pi_{mm}, \quad \Pi_{12} = i\pi_{12}, \quad \Pi_{21} = -i\pi_{21}$$

будет обладать свойством

$$(1.3) \quad \pi(u) = \mathbf{I} + \mathbf{O}(u^{-k}), \quad k > 0, \quad |u| \rightarrow \infty$$

Здесь матрица  $\mathbf{I}$  — единичная, а матрица  $\mathbf{O}$  имеет элементы, убывающие степенным образом на бесконечности.

Выберем  $s_{mn}(u)$  в следующей форме:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} s_{11} &= s_{22} = \beta^2 (u^2 + B^2)^{-1/2} \operatorname{ch} 2\alpha\varphi \\ s_{12} &= -s_{21} = i\beta^2 (u^2 + B^2)^{-1/2} \operatorname{sh} 2\alpha\varphi \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{u}{B}, \quad \alpha = \pi^{-1} \operatorname{arcth} \frac{b}{c}, \quad \beta^4 = c^2 - b^2 \end{aligned}$$

$B$  — параметр, о выборе которого будет сказано ниже.

Для построения приближенного решения матрица  $\pi(u)$  (а следовательно, и  $\mathbf{\Pi}(u)$ ) аппроксимируется матрицей  $\pi_*(u)$  с рациональными элементами из условия близости ее элементов по модулю соответствующим элементам  $\pi(u)$  с заданной степенью точности. Согласно теореме, установленной в работе [7], этим обеспечивается и близость решений систем уравнений с ядрами, описываемыми матрицами  $\pi(u)$  и  $\pi_*(u)$ .

В результате аппроксимации элементов матрицы  $\pi(u)$  рациональными функциями с помощью полиномов Бернштейна последние могут быть представлены в форме

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \pi_{mm} &= \prod_{k=1}^n (u^2 - z_{kmm}^2) (u^2 - p_k^2)^{-1} \\ \pi_{mn} &= u \prod_{k=1}^{n-1} (u^2 - z_{kmn}^2) \prod_{k=1}^n (u^2 - p_k^2)^{-1}, \quad m \neq n \end{aligned}$$

Здесь  $z_{kmm}$  и  $p_k$  — соответственно нули и полюса элементов матрицы  $\pi(u)$ , лежащие выше контура  $\sigma$ .

Очевидно, что после аппроксимации элементы  $\pi_{mn}$  по-прежнему обладают свойством (1.3). Аналогичным образом строится аппроксимация обратной матрицы. Заметим, что элементы обратной матрицы  $\mathbf{\Pi}^{-1}$  связаны с элементами вещественной матрицы  $\pi^{-1}(u)$  соотношениями

$$(1.6) \quad \Pi_{mm}^{-1} = \pi_{mm}^{-1}, \quad \Pi_{12}^{-1} = -i\pi_{12}^{-1}, \quad \Pi_{21}^{-1} = i\pi_{21}^{-1}$$

В дальнейшем понадобятся следующие представления матриц  $\pi(u)$  и  $\pi^{-1}(u)$ :

$$(1.7) \quad \pi(u) = \mathbf{I} + \mathbf{h}(u), \quad \pi^{-1}(u) = \mathbf{I} + \mathbf{p}(u)$$

Элементы матриц  $h(u)$  и  $p(u)$  имеют вид

$$h_{mm} = \sum_{i=1}^n \alpha_{mm}^i (u^2 - p_i^2)^{-1}, \quad h_{mn} = u \sum_{i=1}^n (u^2 - p_i^2)^{-1} \alpha_{mn}^i, \quad m \neq n$$

$$\alpha_{mm}^i = \prod_{k=1}^n (p_i^2 - z_{kmm}^2) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (p_i^2 - p_k^2)^{-1}$$

$$\alpha_{mn}^i = \prod_{k=1}^{n-1} (p_i^2 - z_{kmn}^2) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (p_i^2 - p_k^2)^{-1}, \quad m \neq n$$

$$p_{mm} = \prod_{j=1}^n \beta_{mm}^j (u^2 - \zeta_j^2)^{-1}, \quad p_{mn} = u \prod_{j=1}^n \beta_{mn}^j (u^2 - \zeta_j^2)^{-1}, \quad m \neq n$$

$$\beta_{mm}^j = \prod_{k=1}^n (\zeta_j^2 - \gamma_{kmm}^2) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (\zeta_j^2 - \zeta_k^2)^{-1}$$

$$\beta_{mn}^j = \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta_j^2 - \gamma_{kmn}^2) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (\zeta_j^2 - \zeta_k^2)^{-1}, \quad m \neq n$$

Здесь  $\gamma_{kmm}$  и  $\zeta_k$  — соответственно нули и полюса элементов обратной матрицы, лежащие выше контура  $\sigma$ , причем все элементы  $\pi_{mn}^{-1}$  имеют одни и те же полюса.

2. Применяя метод работы [8], решение матричного интегрального уравнения (1.1) в  $L_\alpha(-a, a)$ ,  $\alpha > 1$  ищем в форме

$$(2.1) \quad \mathbf{q}(x) = \mathbf{q}_0(x) + \Phi(x)$$

так, чтобы совпадали функционалы

$$\int_{-a}^a \mathbf{q}(x) e^{\pm i p_k x} dx = \int_{-a}^a \Phi(x) e^{\pm i p_k x} dx, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

( $p_k$  были определены ранее). Этот же функционал от неизвестной вектор-функции  $\mathbf{q}_0(x)$  равен нулю.

В качестве компонент вектора  $\Phi(x)$  возьмем системы дельта-функций с носителями в точках  $x_k = \pm y_k$ ;  $y_k$  — точки, делящие интервал  $(0, a)$  на равные отрезки

$$(2.2) \quad \Phi(x) = \sum_{k=1}^{2n} \mathbf{c}_k \delta(x - x_k), \quad \mathbf{c}_k = \{c_{1k}, c_{2k}\}$$

( $c_{1k}, c_{2k}$  — подлежащие определению постоянные).

Введем новую неизвестную вектор-функцию  $\mathbf{t}(x)$  соотношением

$$(2.3) \quad \mathbf{t}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \mathbf{T}(u) e^{-iux} du$$

$$\mathbf{T}(u) = \Pi(u) \mathbf{Q}_0(u), \quad \mathbf{Q}_0(u) = \int_{-a}^a \mathbf{q}_0(x) e^{iux} dx$$

Внося (2.1), (2.2) в (1.1), приходим к следующему интегральному урав-

нению:

$$(2.4) \quad \int_{-a}^a k_0(x-\xi) t(\xi) d\xi = f(x) - \sum_{k=1}^{2n} c_k k(x-x_k)$$

$$k_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(u) e^{-iux} du$$

Элементы  $s_{mn}$  матрицы  $S(u)$  даются формулами (1.4).

Таким образом, систему интегральных уравнений динамической контактной задачи (1.1) свели к матричному интегральному уравнению статической контактной задачи с матрицей-функцией  $S(u)$ , элементы которой не имеют особенностей на вещественной оси.

Не нарушая общности, положим

$$(2.5) \quad f(x) = \{A_1 e^{-i\eta x}, A_2 e^{-i\eta x}\}$$

Пусть  $t_0(x)$  — решение уравнения (2.4) с правой частью (2.5), а  $t_0^*(x)$  — решение, соответствующее правой части

$$f(x) = \{c_{1k} e^{-i\eta x}, c_{2k} e^{-i\eta x}\}$$

Тогда решение  $t(x)$  интегрального уравнения (2.4) и трансформанту Фурье этого решения получим в виде

$$(2.6) \quad t(x) = t_0(x) - \varphi(x) - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=1}^{2n} \int_{\sigma} L(u, x_k) e^{-iux} du$$

$$(2.7) \quad T(u) = T_0(u) - \sum_{k=1}^{2n} c_k e^{iux_k} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{2n} L(u, x_k)$$

Здесь

$$(2.8) \quad L(u, x_k) = \int_{\sigma} M(u, \eta) T_0^*(u) e^{i\eta x_k} d\eta, \quad L(u, x_k) = \{L_1, L_2\}$$

$$M(u, \eta) = S^{-1}(u) S(\eta) [\Pi(\eta) - I] S(u)$$

$S^{-1}(u)$  — матрица, обратная  $S(u)$ ,  $T_0^*(u)$ ,  $T_0(u)$ ,  $T(u)$  — преобразования Фурье вектор-функций  $t_0^*(x)$ ,  $t_0(x)$ ,  $t(x)$  соответственно.

Неизвестный вектор  $c_k$  найдем, воспользовавшись леммой [8], согласно которой имеет место тождество

$$(2.9) \quad T(\pm \zeta_k) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

где  $T(u)$  дается формулой (2.7), а  $\zeta_k$  были определены в п.1. Соотношения (2.9) представляют собой алгебраическую систему порядка  $4n$  для определения  $4n$  постоянных  $c_k$ .

Неизвестную вектор-функцию  $q_0(x)$  определим из (2.3)

$$(2.10) \quad q_0(x) = t(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} [\Pi^{-1}(u) - I] T(u) e^{-iux} du$$

и решение уравнения (1.1), используя (2.1), (2.2) и (2.10), получим в

форме

$$(2.11) \quad \mathbf{q}(x) = \mathbf{t}_0(x) + \frac{1}{2\pi} \int [\Pi^{-1}(u) - \mathbf{I}] \mathbf{T}_0(u) e^{-iux} du - \\ - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=1}^{2n} \int_{\sigma} \Pi^{-1}(u) \mathbf{L}(u, x_k) e^{-iux} du - \\ - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{2n} \int_{\sigma} [\Pi^{-1}(u) - \mathbf{I}] c_k e^{-iu(x-x_k)} du$$

3. Решение  $\mathbf{t}_0(x)$  можно построить методом факторизации [4]. В этом случае необходимо факторизовать матрицу-функцию  $\mathbf{S}(u)$ , т.е. представить ее в виде

$$(3.1) \quad \mathbf{S}(u) = \mathbf{C}_-(u) \mathbf{D}_+(u) = \mathbf{M}_+(u) \mathbf{N}_-(u)$$

Матрицы  $\mathbf{D}_+(u)$ ,  $\mathbf{M}_+(u)$  имеют элементы и определители, регулярные выше контура  $\sigma$ , непрерывные на нем, причем определители не имеют нулей в этой области. То же относится к  $\mathbf{C}_-(u)$ ,  $\mathbf{N}_-(u)$  в области ниже контура  $\sigma$ . Элементы всех матриц в областях регулярности убывают на бесконечности.

Факторизация (3.1)  $\mathbf{S}(u)$  осуществляется в явном виде в соответствии с общими теоремами работы [9]. Контур  $\sigma$  в этом случае совпадает с вещественной осью. Элементы матриц  $\mathbf{C}_-(u)$ ,  $\mathbf{D}_+(u)$ ,  $\mathbf{M}_+(u)$ ,  $\mathbf{N}_-(u)$  имеют вид

$$(3.2) \quad d_{11} = -id_{12} = -2im_{12}\beta^{-2} = 2m_{22}\beta^{-2} = (B - iu)^{-\nu_2} \\ id_{21} = -d_{22} = 2m_{11}\beta^{-2} = -2im_{21}\beta^{-2} = (B - iu)^{-\nu_1} \\ n_{11} = in_{12} = -2ic_{12}\beta^{-2} = -2c_{22}\beta^{-2} = (B + iu)^{-\nu_2} \\ in_{21} = n_{22} = 2c_{11}\beta^{-2} = 2ic_{21}\beta^{-2} = (B + iu)^{-\nu_1}$$

Компоненты  $T_{0i}(u)$  вектора  $\mathbf{T}_0(u)$ , применив указанный выше метод, получим в форме

$$(3.3) \quad T_{0k}(u) = 2\pi \sum_{s=1}^2 A_s S_{ks}(u) \delta(u - \eta_s) - \\ - i \sum_{s=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{A_j}{u - \eta_j} [N_{ks}(u) M_{sj}(\eta_j) e^{ia(u-\eta_j)} - \\ - D_{ks}(u) C_{sj}(\eta_j) e^{-ia(u-\eta_j)}], \quad k=1, 2$$

Заметим, что  $S_{ks}$ ,  $D_{ks}$ ,  $C_{sj}$ ,  $N_{ks}$ ,  $M_{sj}$  являются элементами обратных матриц  $\mathbf{S}^{-1}(u)$ ,  $\mathbf{D}_+^{-1}(u)$ ,  $\mathbf{C}_-^{-1}(u)$ ,  $\mathbf{N}_-^{-1}(u)$ ,  $\mathbf{M}_+^{-1}(u)$ . Элементы прямых матриц даются формулами (1.4) и (3.2).

Применяя обратное преобразование Фурье к (3.3), находим  $\mathbf{t}_0(x) = \{t_{01}, t_{02}\}$  в виде

$$(3.4) \quad t_{01}(x) = -A_1\beta^{-2} \sqrt{B^2 + \eta_1^2} e^{-i\eta_1 x} [e^{2\alpha\varphi_1} G(\eta_1, x) + \\ + e^{-2\alpha\varphi_1} G(-\eta_1, -x) - \text{ch } 2\alpha\varphi_1] + iA_2\beta^{-2} \sqrt{B^2 + \eta_2^2} e^{-i\eta_2 x} \times \\ \times [e^{2\alpha\varphi_2} G(\eta_2, x) - e^{-2\alpha\varphi_2} G(-\eta_2, -x) - \text{sh } 2\alpha\varphi_2] \\ t_{02}(x) = -iA_1\beta^{-2} \sqrt{B^2 + \eta_1^2} e^{-i\eta_1 x} [e^{2\alpha\varphi} G(\eta_1, x) -$$

$$\begin{aligned}
& - e^{-2\alpha\varphi_1} G(-\eta_1, -x) - \operatorname{sh} 2\alpha\varphi_1] - A_2 \beta^{-2} \sqrt{B^2 + \eta_2^2} e^{-i\eta_2 x} \times \\
& \times [e^{2\alpha\varphi_2} G(\eta_2, x) + e^{-2\alpha\varphi_2} G(-\eta_2, -x) - \operatorname{ch} 2\alpha\varphi_2] \\
G(\eta, x) &= \frac{1}{2} [g(\alpha, \eta, x) + g(-\alpha, -\eta, -x)] \\
g(\alpha, \eta, x) &= \Gamma^{-1}(\nu_2) \Gamma[\nu_2, (B + i\eta)(a - x)] \\
\varphi_{1,2} &= \operatorname{arctg} \frac{\eta_{1,2}}{B}, \quad \nu_{1,2} = -\frac{1}{2} \mp i\alpha
\end{aligned}$$

( $\Gamma(\alpha, x)$  — неполная гамма-функция,  $\Gamma(x)$  — гамма-функция).

Вектор функции  $t_0^*(x)$ ,  $T_0^*(u)$  определяются из (3.3) и (3.4), если положить  $\eta_1 = \eta_2 = \eta$ ,  $A_1 = c_{1k}$ ,  $A_2 = c_{2k}$ .

4. Получим окончательные формулы для расчета касательных и нормальных напряжений под штампом. Внесем выражения для  $t_0(x)$ ,  $T_0(u)$ ,  $T_0^*(u)$ , найденные в п.3, в интегральное представление решения (2.11) и воспользуемся аппроксимацией (1.5) и соотношениями (1.7). Интегралы  $L_i$  ( $i = 1, 2$ ), определяемые формулами (2.8), после перемножения матриц и ряда преобразований берутся по вычетам, так как подынтегральные функции экспоненциально убывают в нижней полуплоскости комплексного переменного  $\eta$  и не имеют там точек ветвления. Остальные интегралы в решении (2.11) вычисляются по формулам операционного исчисления.

Опуская выкладки, приведем общий вид приближенного решения системы уравнений (1.1)

$$\begin{aligned}
(4.1) \quad q_1(x) &= G_1(x) - \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{2n} [E_{11}(x, x_k) c_{1k} + iE_{12}(x, x_k) c_{2k}] \\
q_2(x) &= G_2(x) - \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{2n} [-iE_{21}(x, x_k) c_{1k} + E_{22}(x, x_k) c_{2k}]
\end{aligned}$$

Функции  $G_1(x)$ ,  $G_2(x)$ ,  $E_{mn}(x, x_k)$  ( $m, n = 1, 2$ ) имеют вид

$$\begin{aligned}
G_1(x) &= -A_1 e^{-i\eta_1 x} K_{11}^{-1}(\eta_1) + iA_2 e^{-i\eta_2 x} K_{12}^{-1}(\eta_2) + \\
& + A_1 \beta^{-2} \sqrt{B^2 + \eta_1^2} e^{-i\eta_1 x} [F^+(\eta_1, x) \Pi_{11}^{-1}(\eta_1) + F^-(\eta_1, x) \Pi_{12}^{-1}(\eta_1)] - \\
& - iA_2 \beta^{-2} \sqrt{B^2 + \eta_2^2} e^{-i\eta_2 x} [F^-(\eta_2, x) \Pi_{11}^{-1}(\eta_2) + F^+(\eta_2, x) \Pi_{12}^{-1}(\eta_2)] - \\
& - A_1 (2\beta)^{-2} \sum_{j=1}^n [\beta_{11}^j \zeta_j^{-1} X_{1j}^-(\eta_1, x) - \beta_{12}^j X_{2j}^+(\eta_1, x)] + \\
& + iA_2 (2\beta)^{-2} \sum_{j=1}^n [\beta_{11}^j \zeta_j^{-1} Y_{2j}^-(\eta_2, x) - \beta_{12}^j Y_{1j}^+(\eta_2, x)] + \\
& + e^{-B(a-x)} \frac{1}{2} \beta^{-2} \{(a-x)^{\nu_2} [A_1 \Psi(\alpha, \eta_1) - iA_2 \Psi(\alpha, \eta_2)] + \\
& + (a-x)^{\nu_1} [A_1 \Psi(-\alpha, \eta_1) + iA_2 \Psi(-\alpha, \eta_2)]\} + \\
& + e^{-B(a+x)} \frac{1}{2} \beta^{-2} \{(a+x)^{\nu_2} [A_1 \Psi(\alpha, -\eta_1) + iA_2 \Psi(\alpha, -\eta_2)] + \\
& + (a+x)^{\nu_1} [A_1 \Psi(-\alpha, -\eta_1) - iA_2 \Psi(-\alpha, -\eta_2)]\}
\end{aligned}$$

Функцию  $G_2(x)$  получим, если в  $G_1(x)$  заменим

$$A_1, A_2, \eta_1, \eta_2, K_{11}^{-1}, \beta_{11}^j, \beta_{12}^j \text{ на } A_2, -A_1, \eta_2, \eta_1, K_{22}^{-1}, \beta_{22}^j, \beta_{21}^j$$

соответственно.

Функции  $E_{mn}(x, x_k)$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} E_{11}(x, x_k) &= D_1^+(\alpha, x, x_k) + D_1^-(-\alpha, x, x_k) + D_1^+(\alpha, -x, -x_k) + \\ &+ D_1^-(-\alpha, -x, -x_k) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \{ \beta_{11}^j \zeta_j^{-1} [B_{1j}^-(x, x_k) + \\ &+ B_{1j}^-(-x, -x_k)] - \beta_{12}^j [\varepsilon_{2j}^+(x, x_k) + \varepsilon_{2j}^+(-x, -x_k)] \} \\ E_{12}(x, x_k) &= -D_1^+(\alpha, x, x_k) + D_1^-(-\alpha, x, x_k) + D_1^+(\alpha, -x, -x_k) - \\ &- D_1^-(-\alpha, -x, -x_k) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \{ \beta_{11}^j \zeta_j^{-1} [\varepsilon_{1j}^-(x, x_k) - \varepsilon_{1j}^-(-x, -x_k)] - \\ &- \beta_{12}^j [B_{2j}^+(x, x_k) - B_{2j}^+(-x, -x_k)] \} \end{aligned}$$

Функции  $E_{22}(x, x_k)$ ,  $E_{21}(x, x_k)$  получим, заменив соответственно в

$$\begin{aligned} E_{11}(x, x_k), E_{12}(x, x_k) \quad \beta_{11}^j, \beta_{12}^j, D_1^\pm, \varepsilon_{1j}^-, B_{2j}^+ \\ \varepsilon_{2j}^+, B_{1j}^- \quad \text{на} \quad \beta_{22}^j, \beta_{21}^j, D_2^\pm, \varepsilon_{2j}^-, B_{1j}^+, \varepsilon_{1j}^+, B_{2j}^- \end{aligned}$$

Были приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha, \eta) &= \Gamma^{-1}(\nu_2 + 1)(B - i\eta)^{-\nu_1} e^{-i\eta a}, \quad \nu_{1,2} = -1/2 \mp i\alpha \\ F^\pm(\eta, x) &= e^{2\alpha\eta} F(\eta, x) \pm e^{-2\alpha\eta} F(-\eta, -x) \end{aligned}$$

$$F(\eta, x) = \frac{1}{2} [f(\alpha, \eta, x) + f(-\alpha, -\eta, -x)]$$

$$f(\alpha, \eta, x) = \Gamma^{-1}(\nu_2 + 1) \gamma[\nu_2 + 1, (B + i\eta)(a - x)]$$

$$X_{kj}^\pm(\eta, x) = e^{-i\alpha\eta} \chi_{kj}^\pm(\eta, x) + e^{i\alpha\eta} \chi_{kj}^\pm(-\eta, -x)$$

$$Y_{kj}^\pm(\eta, x) = e^{-i\alpha\eta} \chi_{kj}^\pm(\eta, x) - e^{i\alpha\eta} \chi_{kj}^\pm(-\eta, -x)$$

$$\begin{aligned} \chi_{1j}^\pm(\eta, x) &= (B - i\eta)^{-\nu_1} \Phi_j^\pm(\alpha, \eta, x) + \\ &+ (B - i\eta)^{-\nu_2} \Phi_j^\pm(-\alpha, \eta, x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{2j}^\pm(\eta, x) &= (B - i\eta)^{-\nu_1} \Phi_j^\pm(\alpha, \eta, x) - (B - i\eta)^{-\nu_2} \\ &\Phi_j^\pm(-\alpha, \eta, x) \end{aligned}$$

$$\Phi_j^\pm(\alpha, \eta, x) = \frac{(B - i\zeta_j)^{-\nu_2}}{\zeta_j + \eta} e^{-i\zeta_j(a-x)} [1 - f(\alpha, -\zeta_j, x)] \pm$$

$$\pm \frac{(B + i\zeta_j)^{-\nu_2}}{\zeta_j - \eta} e^{i\zeta_j(a-x)} f(\alpha, \zeta_j, x)$$

$$\begin{aligned} D_m^\pm(\alpha, x, x_k) &= (a - x)^{\nu_2} \Gamma^{-1}(\nu_2 + 1) e^{-B(a-x)} \sum_{i=1}^n \alpha_{mi}^\pm (B - ip_i)^{\nu_2} \times \\ &\times e^{ip_i(a-x_k)}, \quad m = 1, 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{mj}^\pm(x, x_k) &= \sum_{i=1}^n [\alpha_{mi}^+ (B - ip_i)^{\nu_2} \Phi_j^\pm(\alpha, -p_i, x) + \\ &+ \alpha_{mi}^- (B - ip_i)^{\nu_1} \Phi_j^\pm(-\alpha, -p_i, x)] e^{ip_i(a-x_k)}, \quad m = 1, 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mj}^\pm(x, x_k) &= \sum_{i=1}^n [\alpha_{mi}^+ (B - ip_i)^{\nu_2} \Phi_j^\pm(\alpha, -p_i, x) - \\ &- \alpha_{mi}^- (B - ip_i)^{\nu_1} \Phi_j^\pm(-\alpha, -p_i, x)] e^{ip_i(a-x_k)}, \quad m = 1, 2 \end{aligned}$$

$$\alpha_{1i}^\pm = \frac{\alpha_{11}^i \pm \alpha_{12}^i}{2p_i}, \quad \alpha_{2i}^\pm = \frac{\alpha_{22}^i \pm \alpha_{21}^i}{2p_i}$$

( $\gamma(\alpha, x)$  — неполная гамма-функция)

По приведенным выше формулам (4.1) составлен пакет программ на БЭСМ-6 для расчета контактных напряжений, а также для определения неизвестного вектора  $c_k$  из условия (2.9).

5. В качестве примера рассмотрим плоскую задачу о гармонической вибрации штампа ширины  $2a$  на упругом слое толщины  $2h$ , жестко соединенного с недеформируемым основанием. Штмп жестко сцеплен со слоем. Задача приводится к уравнению вида (1.1). Элементы матрицы  $K(u)$  в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} K_{11}(u) &= \frac{1}{2}\kappa_2^2 (\sigma_2 \operatorname{sh} 2\sigma_2 \operatorname{ch} 2\sigma_1 - \sigma_1^{-1}u^2 \operatorname{sh} 2\sigma_1 \operatorname{ch} 2\sigma_2)\Delta^{-1}(u) \\ K_{22}(u) &= \frac{1}{2}\kappa_2^2 (\sigma_1 \operatorname{sh} 2\sigma_1 \operatorname{ch} 2\sigma_2 - \sigma_2^{-1}u^2 \operatorname{sh} 2\sigma_2 \operatorname{ch} 2\sigma_1)\Delta^{-1}(u) \\ K_{12}(u) &= -u \{ (2u^2 - \frac{1}{2}\kappa_2^2) (1 - \operatorname{ch} 2\sigma_1 \operatorname{ch} 2\sigma_2) + \\ &+ \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} [2u^4 - u^2 (\frac{3}{2}\kappa_2^2 + \kappa_1^2) + \kappa_1^2\kappa_2^2] \operatorname{sh} 2\sigma_1 \operatorname{sh} 2\sigma_2 \} \Delta^{-1}(u) \\ \Delta(u) &= u^2 (2u^2 - \kappa_2^2) - (2u^4 - u^2\kappa_2^2 + \frac{1}{4}\kappa_2^4) \operatorname{ch} 2\sigma_1 \operatorname{ch} 2\sigma_2 + \\ &+ \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}u^2 [2u^4 - u^2 (2\kappa_2^2 + \kappa_1^2) + \kappa_1^2\kappa_2^2 + \frac{1}{4}\kappa_2^4] \operatorname{sh} 2\sigma_1 \operatorname{sh} 2\sigma_2 \\ \kappa_1^2 &= \omega^2\rho h^2 (\lambda + 2\mu)^{-1}, \quad \kappa_2^2 = \omega^2\rho h^2\mu^{-1}, \quad \sigma_k = \sqrt{u^2 - \kappa_k^2}, \quad k = 1, 2 \end{aligned}$$

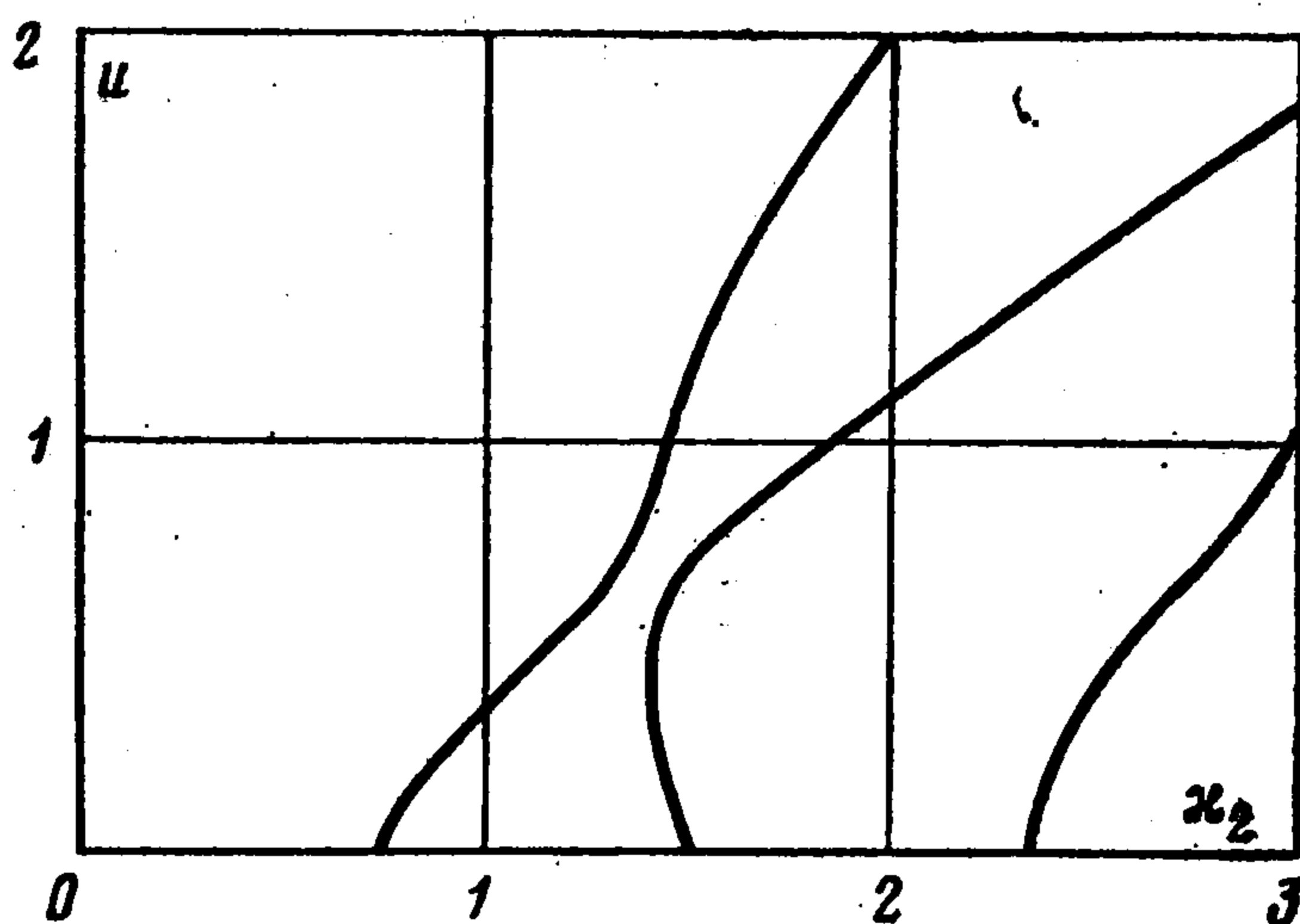
Величины  $f_i(x)$  взяты с множителем  $2\mu h^{-1}$ ,  $a$  — безразмерная полуширина штампа,  $\nu$ ,  $\rho$  — коэффициент Пуассона и плотность материала,  $\lambda$ ,  $\mu$  — коэффициенты Ламе,

Элементы матрицы  $K(u)$  обладают перечисленными выше свойствами. Строятся матрицы-функции

$$\begin{aligned} \Pi(u) &= S^{-1}(u) R(u), \\ \Pi^{-1}(u) &= R^{-1}(u) S(u) \end{aligned}$$

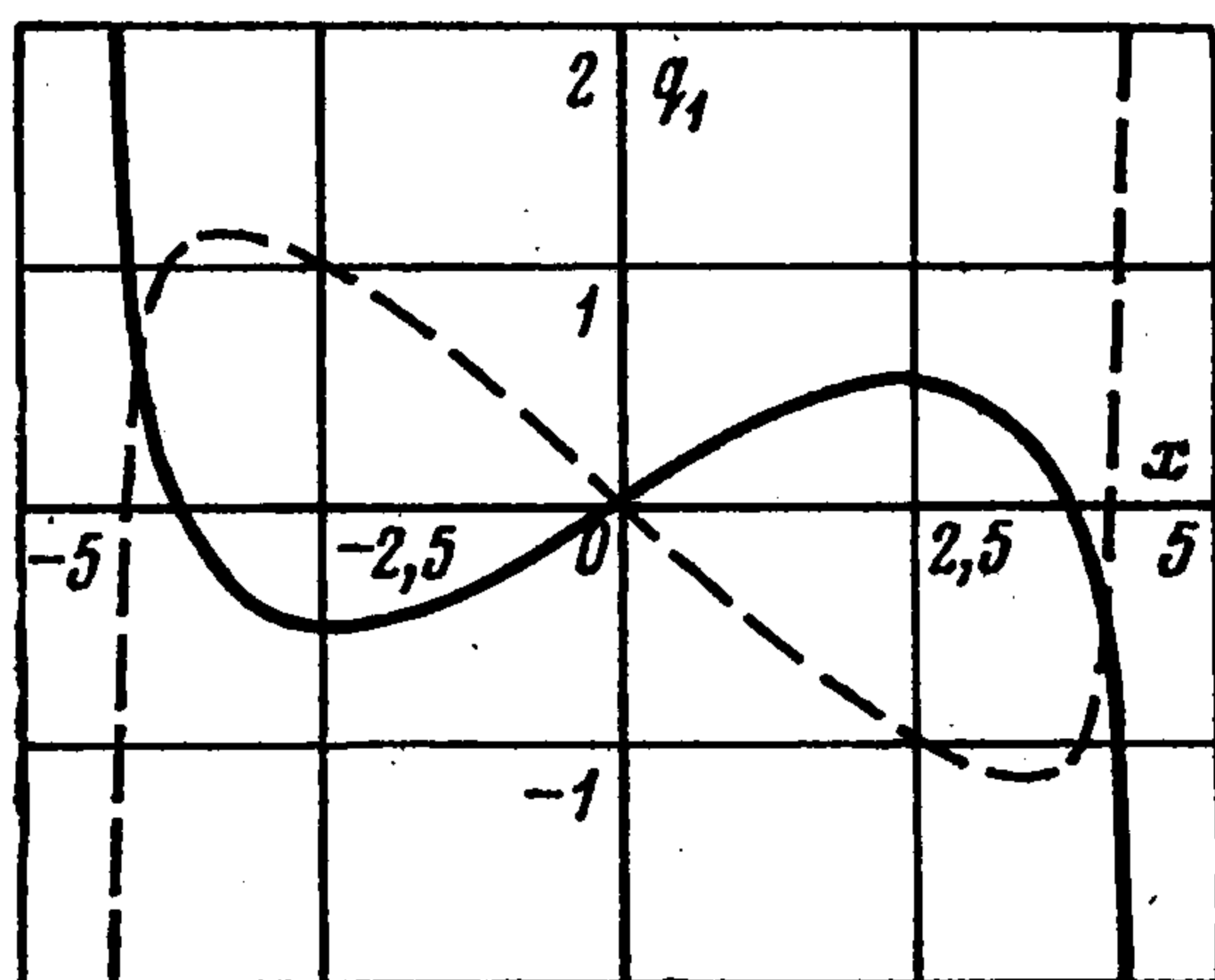
элементы которых связаны с вещественными элементами матриц  $\pi(u)$  и  $\pi^{-1}(u)$  соотношениями (1.2) и (1.6).

Для построения аппроксимирующих матриц предварительно рассчитываются нейтральные кривые (кривые нулей и полюсов) элементов матриц  $\pi(u)$  и  $\pi^{-1}(u)$ . На фиг. 1 приведен пример распределения вещественных полюсов элементов матрицы  $\pi(u)$  при  $\nu = 0,3$ .

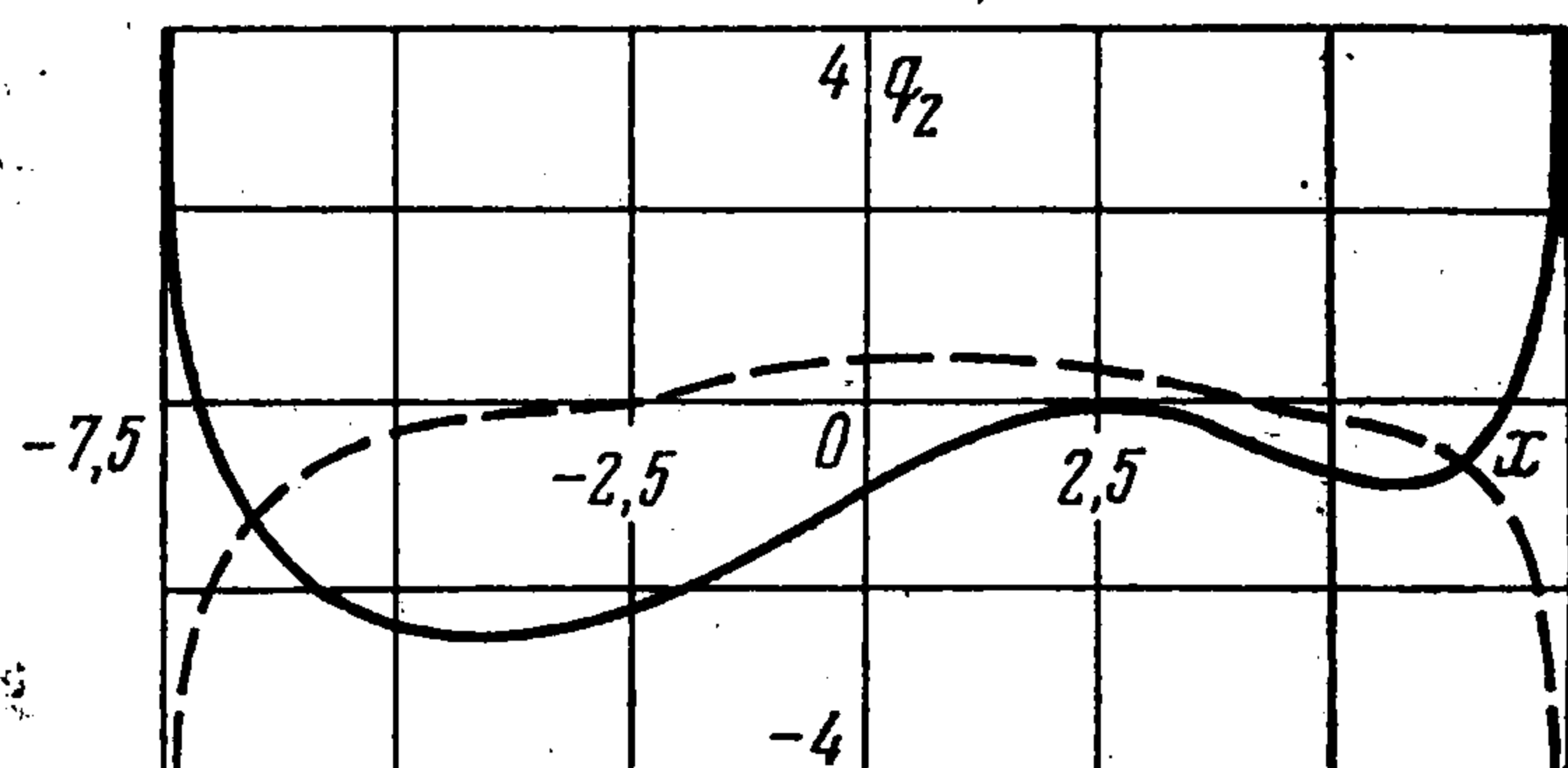


Фиг. 1

Функции  $\pi_{mn}(u)$  с помощью полиномов Бернштейна одновременно аппроксимируются рациональными функциями вида (1.5) с любой наперед заданной точностью. Аналогично проводится аппроксимация обратной матрицы  $\pi^{-1}(u)$ . Можно матрицу  $\pi^{-1}(u)$  получить непосредственно из  $\pi(u)$ , но этот путь ведет к увеличению числа коэффициентов  $c_{1k}$ ,  $c_{2k}$  и, следовательно, порядка системы для определения этих постоянных вдвое. Для построения эффективных приближенных решений си-



и 2



Фиг. 3

стемы интегральных уравнений (1.1) параметр  $B$  следует брать по возможности большим. Отметим, что это приводит к увеличению порядка аппроксимирующих полиномов при заданной точности аппроксимации. При численных расчетах полагали  $B = 10$ .

По формулам (4.1) проведен расчет контактных напряжений на БЭСМ-6 в зависимости от приведенной частоты  $\kappa_2$ , коэффициента Пуассона  $\nu$  и ширины штампа  $2a$ .

Графики комплексных касательных напряжений  $q_1(x)$  приведены на фиг. 2 для  $\kappa_2 = 1,8$ ,  $a = 5$ ,  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = 1$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 0$  и нормальных напряжений  $q_2(x)$  для  $\kappa_2 = 1,8$ ,  $a = 7,5$ ,  $A_1 = A_2 = 1$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 0$  на фиг. 3. Графики действительной части представлены сплошными, мнимой — штриховыми линиями.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бабешко В. А., Прягина О. Д. Метод фиктивного поглощения в плоских динамических задачах.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 3, с. 477—484.
2. Попов Г. Я. К решению плоской контактной задачи теории упругости при наличии сил сцепления или трения.— Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. наук, 1963, т. 16, № 2, с. 15—32.
3. Александров В. М. О плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления или трения.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 2, с. 246—257.
4. Бабешко В. А. Статические и динамические контактные задачи со сцеплением.— ПММ, 1975, т. 39, № 3, с. 505—512.
5. Мхитарян С. М. О некоторых плоских контактных задачах теории упругости с учетом сил сцепления и связанных с ними интегральных и дифференциальных уравнениях.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1968, т. 21, № 5—6, с. 3—20.
6. Бабешко В. А. Об единственности решений интегральных уравнений динамических контактных задач.— Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 6, с. 1310—1313.
7. Бабешко В. А. О системах интегральных уравнений динамических контактных задач.— Докл. АН СССР, 1975, т. 220, № 6, с. 1293—1296.
8. Бабешко В. А. Новый метод в теории пространственных динамических смешанных задач.— Докл. АН СССР, 1978, т. 242, № 1, с. 62—65.
9. Бабешко В. А. Факторизация одного класса матриц-функций и ее приложения.— Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 5, с. 1094—1097.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
22.X.1980