Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 4, 1981

УДК 539.3

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ ПРИ ДВУМЕРНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ТЕЛА

Назаров Г. И., Пучкова Н. Г.

Строится общее решение двумерной задачи теории упругости в частном случае неоднородности, определяемой соотношениями

$$E = E_0 r^a \exp(b\theta); \quad \nu + 1 = r^a [c_1 + c_2 r \sin(\theta + c_3)] \exp(b\theta)$$

где $E$ — модуль Юнга, $\nu$ — коэффициент Пуассона. Постоянными $c_1$, $c_2$, $c_3$, $a$ и $b$ можно распорядиться так, что в замкнутой области усеченного клина выполняется известное условие $0 \leqslant \nu \leqslant {}^1/_2$. Приводятся конкретные краевые задачи.

**1. Основные уравнения.** Плоское напряженное состояние при двумерной неоднородности изотропного тела в полярной системе координат $r$, $\theta$ для функции напряжений $U(r, \theta)$ при отсутствии массовых сил и температурного расширения определяется линейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами [1, 2]

$$\Delta(e\Delta U) = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \right. \tag{1.1}$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right) - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{f}{r}\right)\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r}\right)\right]$$

$$e = \frac{1}{E}, \quad f = \frac{1+\nu}{E}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

с соответствующими краевыми условиями.

Компоненты напряжений определяются по формулам

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right), \quad \tau = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right), \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \tag{1.2}$$

Ранее [1, 2] был рассмотрен ряд краевых задач в предположении, что коэффициент Пуассона — постоянное число, а модуль Юнга — функция координат $r$, $\theta$. В частности, рассмотрены [2] задачи при предположении, что функция напряжений $U$ и модуль Юнга имеют вид ($n$, $k$, $E_0$ — постоянные)

$$U = r^n F(\theta), \quad E = E_0 r^{-k} \psi(\theta)$$

В этом случае для функции $F(\theta)$ задача приведена к соответствующим граничным условиям и к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка с переменными коэффициентами, зависящими от заданной функции $\psi(\theta)$.

В отличие от [1—4] ниже приведен класс функций $E(r, \theta)$ и $\nu(r, \theta)$, для функций напряжений которого построено общее решение в комплексной форме, содержащее две произвольные аналитические функции комплексного переменного $z = \ln r + i\theta$.

В дальнейшем рассмотрим случай, когда в уравнении (1.1) правая часть равна нулю, т. е. для функции $f$ выполняются условия

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{f}{r}\right) = 0$$

которые после интегрирования приводят к функции

$$f = c_1 + c_2 r \sin(\theta + c_3), \quad \nu = fE - 1 \tag{1.3}$$

Известно, что для всех материалов $0 < \nu \leqslant 1/2$ [1—3]. В данном случае с учетом выражения для $f$ в (1.1) получим неравенство

$$1 < fE \leqslant 3/2 \tag{1.4}$$

В задачах с ограниченной областью $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, как будет показано ниже, постоянные $c_1$, $c_2$, $c_3$ и постоянные, входящие в $E$, могут быть подобраны так, чтобы неравенство (1.4) выполнялось. Зависимость (1.3) для $\nu$ совпадает с известной формулой экспериментальной теории упругости [5], в которой модуль сдвига равен $1/(2f)$.

С учетом (1.3) уравнение (1.1) в развернутом виде запишем в форме

$$e\Delta\Delta U + (\Delta e)(\Delta U) + 2\left(\frac{\partial e}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\Delta U + \frac{1}{r^2}\frac{\partial e}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\Delta U\right) = 0 \tag{1.5}$$

Выделим такой класс функций $e(r, \theta)$, для которого функция напряжений, удовлетворяющая уравнению (1.5), имеет вид

$$U = \alpha(r)\beta(\theta)\chi(z) + \varphi(z) \tag{1.6}$$

Здесь $\alpha(r)$, $\beta(\theta)$ — действительные функции своих аргументов, подлежащие определению из уравнения (1.5), а $\chi(z)$, $\varphi(z)$ — произвольные аналитические функции логарифмического аффекса $z = \ln r + i\theta$.

**2. Метод решения.** Составляем соответствующие производные от (1.6) и вносим их в уравнение (1.5). В результате получим

$$f_1\chi + (f_2 + if_3)\chi' + (f_4 + if_5)\chi'' = 0 \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
f_1 &= \left(\alpha''\beta + \frac{\alpha'\beta}{r} + \frac{\alpha\beta''}{r^2}\right)\Delta e + \frac{2}{r^2}\left(\alpha''\beta' + \frac{\alpha'\beta'}{r} + \frac{\alpha\beta'''}{r^2}\right)\frac{\partial e}{\partial \theta} + \\
&+ 2\left(\alpha'''\beta + \frac{\alpha''\beta}{r} - \frac{\alpha'\beta}{r^2} + \frac{\alpha'\beta''}{r^2} - \frac{2\alpha\beta''}{r^3}\right)\frac{\partial e}{\partial r} + \\
&+ e\left(\alpha''''\beta + \frac{2\alpha'''\beta}{r} - \frac{\alpha''\beta}{r^2} + \frac{\alpha'\beta}{r^3} + \frac{2\alpha''\beta''}{r^2} - \frac{2\alpha'\beta''}{r^3} + \frac{4\alpha\beta''}{r^4} + \frac{\alpha\beta''''}{r^4}\right) \\
f_2 &= \frac{2}{r}\left[2e\left(\alpha'''\beta + \frac{\alpha'\beta'}{r^2} - \frac{\alpha\beta''}{r^3}\right) + \alpha'\beta\Delta e + \right. \\
&\left. + \left(3\alpha''\beta - \frac{\alpha'\beta}{r} + \frac{\alpha\beta''}{r^2}\right)\frac{\partial e}{\partial r} + \frac{2\alpha'\beta'}{r^2}\frac{\partial e}{\partial \theta}\right] \\
f_3 &= \frac{2}{r^2}\left[2e\left(\alpha''\beta' - \frac{\alpha'\beta'}{r} + \frac{2\alpha\beta'}{r^2} + \frac{\alpha\beta''}{r^2}\right) + \alpha\beta'\Delta e + \right. \\
&\left. + \frac{2}{r}\left(\alpha'\beta' - \frac{2\alpha\beta'}{r}\right)\frac{\partial e}{\partial r} + \left(\alpha''\beta + \frac{\alpha'\beta}{r} + \frac{3\alpha\beta''}{r^2}\right)\frac{\partial e}{\partial \theta}\right] \\
f_4 &= \frac{4}{r^2}\left[\left(\alpha''\beta - \frac{\alpha'\beta}{r} - \frac{\alpha\beta''}{r^2}\right)e + \alpha'\beta\frac{\partial e}{\partial r} - \frac{\alpha\beta'}{r^2}\frac{\partial e}{\partial \theta}\right] \\
f_5 &= \frac{4}{r^3}\left[2\beta'\left(\alpha' - \frac{\alpha}{r}\right)e + \alpha\beta'\frac{\partial e}{\partial r} + \alpha'\beta\frac{\partial e}{\partial \theta}\right]
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Будем теперь считать, что модуль Юнга (или, что то же, функция $e$) — функция с разделяющимися переменными

$$e = e_1(r)e_2(\theta), \quad e_1 = \frac{1}{E_1(r)}, \quad e_2 = \frac{1}{E_2(\theta)} \tag{2.3}$$

В этом случае замечаем, что если в (2.2) коэффициенты $f_4$ и $f_5$ приравнять к нулю, то придем к двум уравнениям с разделяющимися переменными, которые запишем в таком виде:

$$r^2\left(\frac{e_1'\alpha'}{e_1\alpha}+\frac{\alpha''}{\alpha}-\frac{\alpha'}{r\alpha}\right)=\frac{1}{\beta}\left(\frac{e_2'\beta'}{e_2}+\beta''\right)=p^2=\text{const} \tag{2.4}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha'}\left(\frac{e_1'}{e_1}+\frac{2\alpha'}{\alpha}-\frac{2}{r}\right)=-\frac{e_2'\beta}{e_2\beta'}=q^2=\text{const}$$

Рассмотрим случай $p=0$, $q=1$. Тогда система уравнений (2.4) примет вид

$$\frac{e_1'}{e_1}+\frac{\alpha''}{\alpha'}-\frac{1}{r}=0,\quad \frac{e_1'}{e_1}+\frac{\alpha'}{\alpha}-\frac{2}{r}=0 \tag{2.5}$$

$$\frac{e_2'}{e_2}+\frac{\beta''}{\beta'}=0,\quad \frac{e_2'}{e_2}+\frac{\beta'}{\beta}=0$$

Интегрируя системы из первых двух и последних двух уравнений (2.5) и переходя к функциям $E$ и $\alpha\beta$, получим

$$E=E_0r^a\exp(b\theta),\quad \alpha\beta=Ar^{a+2}\exp(b\theta) \tag{2.6}$$

Непосредственной подстановкой формул (2.3), (2.6) в (2.2) можно убедиться, что коэффициенты $f_1, f_2, f_3$ обращаются в нуль. В результате функция $U$ (1.6) принимает вид

$$U=Ar^{a+2}\chi(z)\exp(b\theta)+\varphi(z) \tag{2.7}$$

Здесь $a, b, E_0$ — произвольные действительные постоянные, $A$ — комплексная постоянная.

Если внести $E$ по формуле (2.6) в исходное уравнение (1.5), то в отличие от случая, рассмотренного в [3], придем к ураненню с переменными коэффициентами

$$r^2\Delta\Delta U+(a^2+b^2)\Delta U-2\left(ar\frac{\partial}{\partial r}\Delta U+b\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta U\right)=0 \tag{2.8}$$

Вещественная и мнимая части функции $U$ в (2.7) и их линейные комбинации являются действительными решениями линейного уравнения (1.5), (2.8).

Формулы (1.2) и (1.3) с учетом (2.7) запишем в виде

$$\nu+1=[c_1+c_2r\sin(\theta+c_3)]\,r^a\exp(b\theta) \tag{2.9}$$

$$\sigma_r=\operatorname{Re}\left\{Ar^a[(a+b^2+2)\chi+(1+2ib)\chi'-\chi'']\exp(b\theta)+\right.$$
$$\left.+\frac{\varphi'-\varphi''}{r^2}\right\} \tag{2.10}$$

$$\tau=-\operatorname{Re}\left\{Ar^a[(a+1)b\chi+(b+i(a+1))\chi'+i\chi'']\exp(b\theta)+\right.$$
$$\left.+\frac{i(\varphi'-\varphi'')}{r^2}\right\} \tag{2.11}$$

$$\sigma_\theta=\operatorname{Re}\left\{Ar^a[(a+1)(a+2)\chi+(2a+3)\chi'+\chi'']\exp(b\theta)+\right.$$
$$\left.+\frac{\varphi''-\varphi'}{r^2}\right\} \tag{2.12}$$

Отметим, что аналогичным путем можно убедиться, что функции

$$E=\frac{E_0}{r^2},\quad (\nu+1)r^2=c_1+c_2r\sin(\theta+c_3),\quad U=\bar{z}\chi(z)+\varphi(z) \tag{2.13}$$

удовлетворяют уравнению (1.1). Здесь $z = \ln r - i\theta$, а $\chi(z), \varphi(z)$ — произвольные аналитические функции комплексного аргумента $z$. Функция $U$ в (2.13) имеет тот же вид, что и известное решение Мусхелишвили для однородного тела [6].

3. *Примеры*. Проиллюстрируем метод определения $\chi$ и $\varphi$ в (2.10) — (2.12) на примере радиального распределения напряжений ($\tau = \sigma_\theta = 0$). Для этого случая из (2.11) приходим к трем равенствам

$$(a+1)\chi + \chi' = 0, \quad (a+1)\chi' + \chi'' = 0, \quad \varphi'' - \varphi' = 0$$

Интегрируя и затем учитывая, что $z = \ln r + i\theta$, получим

$$\chi = Ar^{-(a+1)} \exp[-i(a+1)\theta], \quad \varphi = D_1 r \exp(i\theta) + D_2 \tag{3.1}$$

Здесь $A$, $D_1$, $D_2$ — произвольные постоянные (в общем случае комплексные).

Подстановкой (3.1) в (2.10) и (2.12) находим

$$\sigma_\theta = 0, \ \sigma_r = \operatorname{Re}\left\{\frac{A}{r}[b^2 - a^2 - 2a - 2ib(a+1)] \exp[b - i(a+1)\theta]\right\} \tag{3.2}$$

$$A = A_1 + iA_2$$

Выделяем в (3.2) вещественную часть. В результате получим

$$\sigma_r = g(\theta)/r \tag{3.3}$$

$$g(\theta) = [a_1 \cos(a+1)\theta + a_2 \sin(a+1)\theta] \exp(b\theta) \tag{3.4}$$

$$a_1 = (b^2 - a^2 - 2a)A_1 + 2b(a+1)A, \quad a_2 = (b^2 - a^2 - 2a)A_2 - 2b(a+1)A_1$$

Функция (3.3) характеризует радиальное распределение напряжений. В [1, 2, 7] приведены примеры для такого рода напряжений и указан способ определения постоянных $A_1$, $A_2$. Не вдаваясь в подробности, укажем, что, например, для задачи Вахарта о клине (см. [1], рис. 25) эти постоянные находятся из условий равновесия части клина, вырезанной дугой произвольного радиуса, которые определяются формулами (см. также [2, 7])

$$\int_{\theta_1}^{\theta^2} r\sigma_r \cos\theta d\theta = -p_1, \quad \int_{\theta_1}^{\theta_2} r\sigma_r \sin\theta d\theta = -p_2 \tag{3.5}$$

Здесь $\theta_1$, $\theta_2$ — углы, отсчитываемые от оси $0x$, направленной вниз при несимметричном расположении клина относительно оси $0x$, $p_1$, $p_2$ — составляющие заданного давления в вершине упругого клина.

Интегралы (3.5) с учетом (3.3) вычисляются в элементарных функциях, и определение постоянных не вызывает затруднений. Аналогичным путем могут быть решены задачи об изгибе клина [7, 8] и кривого бруса [2].

Условие (1.4) для коэффициента Пуассона $\nu$ может быть удовлетворено различными способами путем подбора постоянных $c_1$, $c_2$, $c_3 a$, $b$ в формулах (1.3), (2.6)

$$\nu + 1 = [c_1 + c_2 r \sin(\theta + c_3)]r^a \exp(b\theta) \tag{3.6}$$

Например, пусть в случае усеченного клина $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$ заданы $\nu$ в трех угловых точках на границе этого клина $M_1(r_1, \theta_1; \nu_1)$, $M_2(r_2, \theta_2; \nu_2)$, $M_3(r_1, \theta_2; \nu_3)$ Внося эти значения в (3.6) и разрешая соответствующую систему трех уравнений относительно $c_1$, $c_2$, $c_3$, получим

$$c_1 = \frac{(\nu_3+1)\, r_2^{a+1} - (\nu_2+1)\, r_1^{a+1}}{(r_2 - r_1)\, r_1^a r_2^a} \exp(-b\theta_2)$$

$$\operatorname{tg} c_3 = \frac{B\sin\theta_2 - A\sin\theta_1}{A\cos\theta_1 - B\cos\theta_2}$$

$$A = \frac{\nu_3+1}{r_1^a}\exp(-b\theta_2) - c_1, \quad B = \frac{\nu_1+1}{r_1^a}\exp(-b\theta_1) - c_1$$

$$c_2 = \left[\frac{\nu_2 + 1}{r_2^a} \exp(-b\theta_2) - c_1\right] [r_2 \sin(\theta_2 + c_3)]^{-1}$$

Полагая здесь для простоты счета $a = 1$, $b = 1$, $r_2 = 1$, $r_1 = 0{,}9$, $\nu_1 = 0{,}04$, $\nu_2 = 0{,}2$, $\nu_3 = 0{,}26$, $\theta_1 = -15°$, $\theta_2 = 30°$, найдем $c_1 = 1{,}89$, $c_2 = -1{,}31$, $c_3 = 0{,}599$. Для этого случая рельеф функции $\nu(r, \theta)$ характеризуется таблицей, где приведены значения $\nu \cdot 10^3$. Соответствующие таблицы могут быть составлены для модулей Юнга $E$ и сдвига $G$ по формулам (1.3), (2.6).

| $r$ | $\theta=-15°$ | $-10°$ | $-5°$ | $0°$ | $5°$ | $10°$ | $15°$ | $20°$ | $25°$ | $30°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,00 | 121 | 134 | 144 | 151 | 156 | 159 | 166 | 173 | 180 | 200 |
| 0,98 | 109 | 122 | 134 | 142 | 151 | 157 | 168 | 177 | 192 | 215 |
| 0,96 | 86 | 107 | 121 | 134 | 144 | 154 | 169 | 182 | 200 | 228 |
| 0,94 | 71 | 90 | 109 | 119 | 138 | 151 | 169 | 184 | 208 | 241 |
| 0,92 | 56 | 72 | 97 | 113 | 130 | 146 | 167 | 188 | 214 | 250 |
| 0,90 | 40 | 63 | 82 | 98 | 123 | 142 | 165 | 189 | 219 | 262 |

Отметим, что если в (2.6) и (3.6) положить $c_1 = 0$, $a = -1$, то $\nu$ будет зависеть только от угла $\theta$, а модуль Юнга — от $r$ и $\theta$. В этом случае постоянные $c_2$ и $c_3$ определяются через заданные углы в задаче о клине (3.3), (3.4), для которого функция $g(\theta)$ примет простой вид

$$g(\theta) = (b^2 - 3)A_1 \exp(b\theta)$$

Рассмотрим иной подход. Пусть по-прежнему функция $\varphi(z)$ определена формулой (3.1), а функцию $\chi(z)$ в формулах (2.10) — (2.12) будем отыскивать в виде комплексного ряда Фурье

$$\chi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n' + iA_n'') \exp(n\omega z) \tag{3.7}$$

Здесь $\omega$ — фиксированное характерное число конкретной задачи. Постоянные $A_n'$, $A_n''$ должны быть определены из краевых условий.

Составляем соответствующие производные от (3.7), вносим их в выражения (2.10) — (2.12) и затем выделяем вещественные части. В результате получим

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \exp b\theta \sum_{n=1}^{\infty} r^{a+n\omega} [(\Delta_1 A_n' - 2bn\omega A_n'') \cos n\omega\theta - \\
&\quad - (\Delta_1 A_n'' + 2bn\omega A_n') \sin n\omega\theta] \\
\tau &= \exp b\theta \sum_{n=1}^{\infty} r^{a+n\omega} [(\Delta_2 A_n' - \Delta_3 A_n'') \cos n\omega\theta - \\
&\quad - (\Delta_2 A_n'' + \Delta_3 A_n') \sin n\omega\theta] \\
\sigma_\theta &= \exp b\theta \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_4 r^{a+n\omega} (A_n' \cos n\omega\theta - A_n'' \sin n\omega\theta)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\Delta_1 = a + b^2 + 2 + n\omega(1 - n\omega), \quad \Delta_2 = b(a + 1 + n\omega)$$
$$\Delta_3 = n\omega(a + 1 + n\omega), \quad \Delta_4 = (a + 1)(a + 2) + n\omega(2a + 3 + n\omega)$$

При $a + n\omega \neq -1$ эти формулы могут быть использованы для случая, когда в вершине клина ($r = 0$) напряжения отсутствуют. Формулы (3.8) содержат $2n$ ($n = 1, 2, \ldots$) произвольных постоянных $A_n'$, $A_n''$, при определении которых в области клина $0 \leqslant r \leqslant R$, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$ может быть сформулирована, например, такая задача: $\sigma_r = F_1(\theta)$, $\tau = F_2(\theta)$ при $r = R$.

В этом случае необходимо использовать обычный метод Фурье с той только разницей, что в ряды Фурье по синусам и косинусам с аргументом $n\omega\theta$ в интервале $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant$

$\leqslant \theta_2$ нужно разлагать заданные функции $F_1(\theta)$ и $F_2(\theta)$, предварительно умноженные на $\exp(-b\theta)$.

Если в ряд (3.7) дополнительно внести член $(B_n' + iB_n'')\exp(-n\omega z)$, то появится возможность формулировать аналогичные краевые условия для усеченного конуса.

В заключение отметим, что если в формулах (3.8) потребовать, чтобы $\sigma_\theta = \tau = 0$ (радиальное распределение напряжений), то равенство $\Delta_2 = 0$ приведет к условию $n\omega = -(a+1)$. Тогда $\Delta_3 = 0$, $\Delta_4 = 0$, $\Delta_1 = b^2 - a^2 - 2a$. В результате знаки сумм в (3.7), (3.8, нужно опустить и получим уже рассмотренные формулы (3.3) и (3.4).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976, с. 214—230.
2. *Колчин Г. Б.* Плоские задачи теории упругости неоднородных тел. Кишинев: Штиинца, 1977, с. 68—111.
3. *Tedorescu P. P., Predeleanu M.* Über das ebene Problem nichthomogener elastischer Körper.— Acta techn. Acad. sci. hung., 1959, v. 27, No. 3, 4, p. 349—368.
4. *Назаров Г. И., Пучков А. А., Пучкова Н. Г.* Дифференциальная и интегральная формы решения линейного уравнения в частных производных четвертого порядка.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Т. 7, № 6. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1976, с. 96—110.
5. *Кашталян Ю. А.* Характеристики упругости материалов при высоких температурах. Киев: Наукова думка, 1970, с. 5.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1949, с. 135.
7. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. Л.— М.: Гостехиздат, 1934, с. 91.
8. *Wieghardt K.* Über des Spalten und Zerreissen elastischer Körper.— Z. Math. und Physik, 1907, B. 55, p. 1.

Киев

Поступила в редакцию
1.X.1979