Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 4, 1981

УДК 539.3

ОБ ЭНЕРГИИ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Бердичевский В. Л.

Показано, что общую геометрически нелинейную задачу трехмерной теории упругости для стержня можно расщепить на нелинейную «одномерную» задачу (одномерную теорию стержней) и линейную «двумерную» задачу. В уравнения одномерной теории входит ряд постоянных «эффективных» упругих характеристик стержня, для определения которых надо решить линейную двумерную задачу (задачу на сечении). Задача на сечении формулируется в общем случае неоднородности и анизотропии как задача о минимуме некоторого функционала (в этой части работы излагаются результаты, приведенные [1], причем используются соображения из [2]). Формулируются свойства задачи на сечении. Строится двойственная вариационная задача. Даются некоторые двусторонние оценки эффективных упругих модулей неоднородных стержней. Получен критерий справедливости сопроматовской формулы для вычисления эффективных модулей растяжения и изгиба неоднородного стержня.

1. Одномерная теория стержней. В классической теории стержень моделируется кривой Г, оснащенной орторепером τ_a (a, b, c = 1, 2, 3), один из векторов которого, для определенности τ_3, касателен к Г. При фиксированном положении кривой Г орторепер определяется с точностью до поворота вокруг касательного вектора. Соответствующая степень свободы служит для описания поворота поперечных сечений.

Деформированное состояние стержня задается компонентами $r^i(\xi)$ радиус-вектора точек кривой Г и компонентами $\tau_a{}^i(\xi)$ векторов τ_a (ξ — параметр на Г, индексы i, j, k соответствуют проекциям на декартовы оси системы координат наблюдателя и пробегают значения 1, 2, 3; величины с индексами, написанными вверху или внизу, совпадают; место индекса выбирается в соответствии с правилом суммирования по повторяющимся нижнему и верхнему индексам).

Величины $\tau_a{}^i$ удовлетворяют ограничениям

$$\tau_a^i \tau_{ib} = \delta_{ab}, \quad dr^i/ds = \tau_3^i \tag{1.1}$$

где s — длина дуги вдоль Г, δ_{ab} — символ Кронекера.

Деформированное состояние стержня имеет четыре функционально независимые степени свободы.

В недеформированном состоянии кривая Г занимает положение Γ_0, определяемое радиус-вектором с компонентами $r_{(0)}^i(\xi)$; компоненты векторов орторепера в начальном состоянии обозначаются через $\tau_{(0)a}{}^i(\xi)$. Подразумевается, что векторы $\tau_{(0)1}$ и $\tau_{(0)2}$ связаны с геометрией поперечного сечения (например, направлены по осям инерции поперечного сечения) или с физическими свойствами стержня. Параметр ξ будем считать длиной дуги на Γ_0, $0 \leqslant \xi \leqslant |\Gamma_0|$, $|\Gamma_0|$ — длина Γ_0. Растяжение стержня характеризуется величиной $\gamma = {}^1/_2\,(dr^i/d\xi \cdot dr_i/d\xi - 1)$.

Обозначим через ω^c и $\omega_0{}^c$ величины

$$\omega^c = {}^1/_2\, e^{abc}\tau_{ib}d\tau^i_a/ds, \quad \omega^c_{(0)} = {}^1/_2\, e^{abc}\tau_{(0)ib}d\tau_{(0)}{}^i_a/d\xi \tag{1.2}$$

где e^{abc} — символ Леви-Чивита.

Из первого равенства (1.1) и из (1.2) следует, что справедливы соотношения (аналог формул Френе)

$$d\tau^i_a/ds = e_{abc}\omega^c\tau^{ib}, \quad d\tau_{(0)}{}^i_a/d\xi = e_{abc}\omega^c_{(0)}\tau^{ib}_{(0)} \tag{1.3}$$

Определим меры деформации стержня $\overline{\Omega}^c$ равенствами

$$\overline{\Omega}^c = (1 + 2\gamma)^{1/2}\omega^c - \omega^c_{(0)} = {}^1/_2\, e^{abc}(\tau_{ib}d\tau^i_a/d\xi - \tau_{(0)ib}d\tau_{(0)}{}^i_a/d\xi) \tag{1.4}$$

Условимся, что малые греческие индексы пробегают значения 1, 2, а индекс 3, когда это не может вызвать недоразумений опускается (например, $\tau^i_3 \equiv \tau^i$, $\tau_{(0)3}^{\ i} \equiv \tau^i_{(0)}$, $\omega^3 \equiv \omega$, $\omega^3_{(0)} \equiv \omega_{(0)}$, $\overline{\Omega}^3 \equiv \overline{\Omega}$).

В классической теории величины $\overline{\Omega}^\alpha$ и $\overline{\Omega}$ используются как меры соответственно изгиба и кручения стержня.

Для упрощения тензорной формы записи дальнейших соотношений вместо $\overline{\Omega}^\alpha$ в качестве меры изгиба возьмем величины $\Omega_\beta = e_{\alpha\beta}\overline{\Omega}^\alpha$, где $e_{\alpha\beta}$ — двумерный символ Леви-Чивита ($e_{11} = e_{22} = 0$, $e_{12} = -e_{21} = 1$). Черта над мерой кручения опускается ($\Omega \equiv \overline{\Omega}$).

В классической теории функционал энергии стержня, на который действуют мертвые внешние силы, имеет вид

$$I = \int\limits_0^{|\Gamma_0|} \Phi(\gamma, \Omega_\alpha, \Omega)\,d\xi - L \tag{1.5}$$

где Φ — внутренняя энергия единицы длины стержня, L — работа внешних сил.

Выражение (1.5) будет выведено ниже в результате асимптотического анализа функционала энергии трехмерного упругого тела методом, изложенным в [1, 2]. Основной результат — формула для вычисления плотности энергии Φ по физическим характеристикам и геометрии поперечного сечения стержня. Плотность энергии Φ физически линейного анизотропного неоднородного стержня дается равенством

$$\Phi = {}^1/_2 \langle E\,(\gamma + \xi^\alpha\,\Omega_\alpha)^2 \rangle + \Psi\,(\gamma, \Omega_\alpha, \Omega) \tag{1.6}$$

где угловые скобки — интеграл по области поперечного сечения S, ξ^α — декартовы координаты в поперечном сечении, E — модуль Юнга, $\Psi\,(\gamma, \Omega_\alpha, \Omega)$ — минимальное значение некоторого функционала Θ — квадратичного функционала от трех функций y_α и y, определенных в области S, который зависит от γ, Ω_α и Ω как от параметров

$$\Psi\,(\gamma, \Omega_\alpha, \Omega) = \inf_{y_\alpha,\, y}\Theta\,(y_\alpha, y;\ \gamma, \Omega_\alpha, \Omega) \tag{1.7}$$

Функционал Θ есть сумма двух положительных квадратичных функционалов $\Theta_\angle$ и $\Theta_\perp$ вида

$$\Theta_\angle = {}^1/_2 \langle G^{\alpha\beta}(y_{|\alpha} + h\Omega e_{\sigma\alpha}\zeta^\sigma + C_\alpha(\gamma + h\Omega_\sigma\zeta^\sigma))(\alpha \to \beta)\rangle \tag{1.8}$$

$$\Theta_\perp = {}^1/_2 \langle C \qquad (y_{(\alpha|\beta)} + C_{\alpha\beta}(\gamma + h\Omega_\sigma\zeta^\sigma) + + C^\lambda_{\alpha\beta}(y_{|\lambda} + h\Omega e_{\sigma\lambda}\zeta^\sigma))(\alpha, \beta \to \gamma, \delta)\rangle \tag{1.9}$$

Здесь $G^{\alpha\beta}$, C_α, $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $C_{\alpha\beta}$, $C^\lambda_{\alpha\beta}$ — «двумерные проекции» тензора упругих модулей, h — диаметр поперечного сечения, $\zeta^\alpha = \xi^\alpha/h$, вертикальной чертой перед греческими индексами обозначается дифференцирование по ζ^α, символ $(\alpha \to \beta)$ означает предшествующую скобку с заменой индексов α на β. Функция y (ζ^α) имеет смысл безразмерной депланации поперечного сечения, функции y_α (ζ^β) — компонент перемещений в плоскости поперечного сечения. Функционал $\Theta_\angle$ не зависит от y_α.

В частном случае изотропного однородного стержня, как показано ниже, $\inf \Theta_\perp = 0$, а задача о минимуме функционала $\Theta_\angle$ эквивалентна задаче о кручении Сен-Венана. Функция Ψ дается равенством $\Psi = {}^1/_2 C\Omega^2$, где C— крутильная жесткость стержня; при этом формула (1.6) переходит в известную формулу сопротивления материалов. Для анизотропных или неоднородных стержней функция Ψ содержит дополнительные слагаемые, вычисление которых связано с решением вариационной задачи (1.7).

2. Трехмерный функционал. Рассмотрим упругое, неоднородное, анизотропное тело, занимающее в недеформированном состоянии область V_0. Область V_0 образована движением вдоль пространственной кривой Γ_0 (оси стержня) плоской фигуры S в каждой точке перпендикулярной оси. Введем в V_0 криволинейную систему координат ξ^α, ξ по формулам

$$x^i = r_{(0)}^{\ i}(\xi) + \tau_{(0)\alpha}^{\ \ i}\xi^\alpha \tag{2.1}$$

Предполагается, что $\xi^\alpha = 0$ — центр тяжести S, т. е. $< \xi^\alpha > = 0$. Координаты ξ^α, ξ считаются сопутствующими.

Значения компонент метрического тензора $g_{(0)\alpha\beta}$, $g_{(0)\alpha 3}$, $g_{(0)33}$ в системе координат ξ^α, ξ приведены, например, в работе [3].

Будем считать, что $\omega_{(0)}^a$ — непрерывно дифференцируемые функции ξ. Для достаточно малых чисел R справедливы неравенства

$$|\omega_{(0)}^a| \leqslant R^{-1}, \quad |d\omega_{(0)}^a/d\xi| \leqslant R^{-2} \tag{2.2}$$

Наилучшую постоянную в неравенствах (2.2) (максимальное из чисел R, для которых неравенства (2.2) имеют место) назовем характерным масштабом кривизны и кручения. Предполагается, что $h \ll R$.

Рассмотрим задачу о равновесии упругого стержня под действием мертвых поверхностных и объемных сил при условии, что на торцах стержня заданы положения частиц

$$x^i(\xi^\alpha, 0) = a^i + b^i_\alpha\xi^\alpha, \quad x^i(\xi^\alpha, |\Gamma_0|) = a^i_1 + b^i_{1\alpha}\xi^\alpha \tag{2.3}$$

Здесь x^i (ξ^α, ξ) — функции, определяющие положение частиц в деформированном состоянии, a^i, $a_1{}^i$, $b_\alpha{}^i$, $b_{1\alpha}{}^i$ — заданные постоянные.

Положения равновесия стержня соответствуют стационарным точкам функционала

(2.4) $$I = \int_{\Gamma_0} d\xi \left(\langle \varkappa U \rangle - \langle F_i x^i (\xi^\alpha, \xi) \rangle - \int_{\partial S} P_i x^i (\xi^\alpha, \xi)\, d\sigma \right)$$

на множестве функций $x^i(\xi^\alpha, \xi)$, которые удовлетворяют ограничениям (2.3). В (2.4) U — заданная функция от компонент тензора деформаций $2\varepsilon_{\alpha\beta} = x^i_{,\alpha} x_{i,\beta} - g_{(0)\alpha\beta}$, $2\varepsilon_{\alpha 3} = x^i_{,\alpha} x_{i,\xi} - g_{(0)\alpha 3}$, $2\varepsilon_{33} = x^i_{,\xi} x_{i,\xi} - g_{(0)33}$, запятой перед ξ в индексах обозначается дифференцирование по ξ, запятой перед греческими индексами — дифференцирование по ξ^α, $\varkappa$ — детерминант начальной метрики: $\varkappa = 1 + \omega_{(0)\alpha}\xi^\alpha$, F_i и P_i — компоненты объемных и поверхностных сил.

Требуется при малых h заменить задачу о нахождении стационарных точек функционала (2.4) приближенной «одномерной», в которой фигурируют только функции от ξ.

Ограничимся рассмотрением малых деформаций и начнем с исследования физически линейного упругого тела, когда U — квадратичная форма по деформациям.

Представим U в виде суммы трех положительно-определенных квадратичных форм

$$U = U_{\parallel} + U_{\angle} + U_{\perp}$$

(2.5) $$U_{\parallel} = {}^1/_2 E_{\parallel} \varepsilon_{33}^2, \quad U_{\angle} = {}^1/_2 G^{\alpha\beta}_{\angle} (2\varepsilon_{\alpha 3} + E_\alpha \varepsilon_{33}) (\alpha \to \beta)$$

$$U_{\perp} = {}^1/_2 E^{\alpha\beta\gamma\delta} (\varepsilon_{\alpha\beta} + E_{\alpha\beta}\varepsilon_{33} + E^\sigma_{\alpha\beta} 2\varepsilon_{\sigma 3}) (\alpha, \beta \to \gamma, \delta)$$

Из формул

$$U_{\parallel} = \min_{\varepsilon_{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha 3}} U, \quad U_{\angle} = \min_{\varepsilon_{\alpha\beta}} (U - U_{\parallel}), \quad U_{\perp} = U - U_{\parallel} - U_{\angle}$$

следует, что это представление единственно, а двумерные тензоры $E^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $G^{\alpha\beta}_{\angle}$, $E_{\alpha\beta}$, $E^\delta_{\alpha\beta}$, E_α, $E_{\parallel}$ можно рассматривать как независимые компоненты трехмерного тензора упругих модулей. Последние можно выразить через двумерные тензоры, если раскрыть скобки в (2.5).

Будем строить «одномерный» функционал при помощи предельного перехода $h \to 0$. Соответствующему асимптотическому анализу уравнений теории упругости посвящены работы [4—8]. Постановку задачи следует дополнить указанием зависимости от h характеристик внешних воздействий P_i и F_i и компонент тензора упругости модулей. Об этом будет сказано несколько позже.

Сделаем замену переменных $\xi^\alpha = h\zeta^\alpha$. После замены область изменения переменных ζ^α, ξ не зависит от h, а параметр h войдет в функционал явно. Область изменения переменных ζ^α, так же как и область изменения ξ^α, обозначается через S.

3. Замена искомых функций. Введем функции

(3.1) $$r^i(\xi) = \langle x^i(\xi^\alpha, \xi) \rangle / |S|$$

где $|S|$ — площадь поперечного сечения S.

Кривую $x^i = r^i(\xi)$ назовем деформированной осью стержня.

Оснастим кривую Г двумя единичными векторами $\tau_\alpha{}^i(\xi)$, которые ортогональны между собой и ортогональны вектору $\tau^i = dr^i/ds$.

Сделаем замену искомых функций $x^i(\xi^\alpha, \xi) \to y^i(\zeta^\alpha, \xi)$

$$x^i(\xi^\alpha, \xi) = r^i(\xi) + h\tau^i_\alpha(\xi)\zeta^\alpha + hy^i(\zeta^\alpha, \xi) \tag{3.2}$$

В силу определения $r^i(\xi)$ (3.1), функции y^i удовлетворяют ограничениям

$$\langle y^i\rangle = 0 \tag{3.3}$$

Дополнительная степень свободы, возникающая при задании τ^i_α, позволяет наложить на y^i еще одно ограничение. Для определенности, в качестве такого ограничения возьмем равенство

$$e^{\alpha\beta}\langle y_{\alpha|\beta}\rangle = {}^r, \quad y_\alpha \equiv \tau^i_\alpha y_i \tag{3.4}$$

Равенство (3.2) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между всеми функциями $x^i(\xi^\alpha, \xi)$ и всеми наборами $\{r^i(\xi), \tau_\alpha{}^i(\xi), y^i(\zeta^\alpha, \xi)\}$, подчиненными ограничениям (3.3) и (3.4) и условию ортонормированности репера τ_a (1.1).

Функции r^i и $\tau_\alpha{}^i$ на торцах стержня выберем в соответствии с краевыми условиями (2.1)

$$r^i(0) = a^i, \quad r^i(|\Gamma_0|) = a_1{}^i, \quad \tau^i_\alpha(0) = b^i_\alpha, \quad \tau^i_\alpha(|\Gamma_0|) = b^i_{1\alpha} \tag{3.5}$$

При этом

$$y^i(\zeta^\alpha, 0) = y^i(\zeta^\alpha, |\Gamma_0|) = 0 \tag{3.6}$$

4. Характерный масштаб. Определим амплитуду деформации изгиба—кручения ε_Ω и амплитуду растяжения оси ε_γ формулами

$$\varepsilon_\Omega = h\max_\xi(\Omega_a\Omega^a)^{1/2}, \quad \varepsilon_\gamma = \max_\xi|\gamma|$$

Величина $\varepsilon = \varepsilon_\Omega + \varepsilon_\gamma$ характеризует амплитуду деформаций.

Введем характерный масштаб изменения деформированного состояния l как наилучшую постоянную в системе неравенств

$$|\Omega_{a,\xi}| \leqslant \varepsilon_\Omega l^{-1}, \quad |\gamma_{,\xi}| \leqslant \varepsilon_\gamma l^{-1}, \quad |y_{i,\xi}| \leqslant l^{-1}\max_{\xi S}(y^i_{|\alpha}y_i^{|\alpha})^{1/2} \tag{4.1}$$

Масштаб l — функция ξ. Предположим, что в окрестности торцов $0 \leqslant \xi \leqslant b$, $|\Gamma_0| - b \leqslant \xi \leqslant |\Gamma_0|$, $b \sim h$, масштаб l сравним с h, а вдали от торцов $h_{**} = h/l \ll 1$.

5. Упругие модули и внешние силы. Компоненты тензоров $E^{\alpha\beta\gamma\delta}$ $G^{\alpha\beta}_\angle$, $E_\parallel$ имеют размерность модуля сдвига G, компоненты тензоров $E_{\alpha\beta}{}^\gamma$ $E_{\alpha\beta}$, E_α безразмерны. В силу положительной определенности $U_\parallel$, $U_\angle$ и $U_\perp$ тензоры $E^{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $G^{\alpha\beta}_\angle$ положительно определены, $E_\parallel$ — положительный скаляр. Безразмерные тензоры $E_{\alpha\beta}{}^\gamma$, $E_{\alpha\beta}$ и E_α могут принимать любые значения.

Предположим, что при $h \to 0$

$$\begin{gathered} E_\parallel = E(\zeta^\alpha, \xi) + O(Gh_*), \quad G^{\alpha\beta}_\angle = G^{\alpha\beta}(\zeta^\alpha, \xi) + O(Gh_*) \\ E^{\alpha\beta\gamma\delta} = C^{\alpha\beta\gamma\delta}(\zeta^\alpha, \xi) + O(Gh_*), \quad E^\sigma_{\alpha\beta} = C^\sigma_{\alpha\beta}(\zeta^\alpha, \xi) + O(Gh_*) \\ E_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}(\zeta^\alpha, \xi) + O(Gh_*), \quad E_\alpha = C_\alpha(\zeta^\alpha, \xi) + O(Gh_*), \quad h_* \equiv h/R \end{gathered} \tag{5.1}$$

Если упругие свойства симметричны относительно плоскости, перпендикулярной к оси стержня, то двумерные тензоры с нечетным числом индексов обращаются в нуль: $C_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = C_{\alpha} = 0$. Если дополнительно упругие свойства инвариантны относительно вращений в плоскости поперечного сечения (трансверсально изотропное тело), то согласно общей теории тензорных функций [9]

$$C^{\alpha\beta\gamma\sigma} = \lambda\delta^{\alpha\beta}\delta^{\gamma\sigma} + \mu(\delta^{\alpha\gamma}\delta^{\beta\sigma} + \delta^{\alpha\sigma}\delta^{\beta\gamma}), \quad G^{\alpha\beta} = G\delta^{\alpha\beta}, \quad C^{\alpha\beta} = \nu\delta^{\alpha\beta}$$

Упругие свойства такого тела определяются параметрами E, G, λ, μ, ν, причем E, G, μ и $\lambda + \mu$ положительны, а величина ν произвольна. Для изотропного тела $E = 2\mu(1 + \nu)$ — модуль Юнга, $G = \mu$ — модуль сдвига, $\nu = {}^1/_2\lambda(\lambda + \mu)^{-1}$ — коэффициент Пуассона. В анизотропном случае E естественно назвать продольным модулем Юнга, $G^{\alpha\beta}$ — тензором модулей сдвига, $C^{\alpha\beta}$ — тензором (поперечных) коэффициентов Пуассона.

Обратим внимание на то, что «допредельные» двумерные тензоры нечетного ранга в силу криволинейности системы координат отличны от нуля даже для изотропного тела — это видно из выражений, приведенных для них в работе [3].

Относительно внешних сил примем условия

$$P_i = O(G\varepsilon h_{**}), \quad F_i = O(G\varepsilon l^{-1}) \tag{5.2}$$

и для простоты ограничимся рассмотрением внешних объемных сил, которые постоянны по поперечному сечению.

6. Асимптотический анализ функционала энергии. Будем строить теорию стержней в первом приближении. Это означает, что пренебрегается всеми величинами порядка ε, h_* и h_{**} по сравнению с единицей.

Зафиксируем $r^i(\xi)$ и $\tau_\alpha{}^i(\xi)$ и будем искать y^i в первом приближении. Предположим что $y^i \sim \varepsilon$. Тогда для компонент деформации в первом приближении справедливы равенства

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = y_{(\alpha|\beta)}, \quad 2\varepsilon_{\alpha 3} = y_{|\alpha} + h\Omega e_{\sigma\alpha}\zeta^\sigma, \quad \varepsilon_{33} = \gamma + h\Omega_\sigma\zeta^\sigma \tag{6.1}$$

Здесь $y = (1 + 2\gamma)^{1/2}\tau^i y_i$, круглыми скобками в индексах отмечается симметрирование. Производные y^i по ξ не входят в функционал, он «не удерживает» краевые условия (3.6), и отыскание y и y_α сводится к минимизации при каждом ξ величины $\Theta = \Theta_\angle + \Theta_\perp$, где $\Theta_\angle$ и $\Theta_\perp$ даются формулами (1.8), (1.9).

Минимум ищется по всем функциям y_α и y, удовлетворяющим согласно (3.3) и (3.4) ограничениям

$$\langle y\rangle = 0, \quad \langle y_\alpha\rangle = 0, \quad e^{\alpha\beta}\langle y_{\alpha|\beta}\rangle = 0 \tag{6.2}$$

Работа внешних сил отброшена в силу оценок (5.1). Очевидно, что минимизирующие функции функционала Θ имеют порядок ε. Это обосновывает законность сделанного предположения.

Минимальное значение Ψ функционала Θ — некоторая квадратичная форма параметров γ, Ω_α и Ω. Согласно (2.5), (5.1), (6.1) линейная плотность энергии стержня, в которой удержаны только члены порядка $Gh^2\varepsilon^2$, дается формулой (1.6).

Первое слагаемое в (1.6) характеризует энергии растяжения и изгиба, второе — энергию кручения и дополнительный вклад в энергии растяжения и изгиба, обусловленный поперечной деформацией.

7. Исследование задачи на сечении. Однородные стержни. Нахождение минимизирующих функций функционала Θ эквивалентно решению краевой задачи Неймана для системы трех эллиптических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами относительно y_α, y. Она эквивалентна смешанной краевой задаче для системы уравнений второго и четвертого порядка относительно y и функции напряжений χ, которая получается переходом по общему правилу [10] к двойственной вариационной задаче. Приведем ее формулировку

$$\Psi(\gamma, \Omega_\alpha, \Omega) = \inf_y \sup_\chi [\Theta_\angle(y) + \Theta_\perp^*(\chi, y)] \tag{7.1}$$

$$\Theta_\perp^*(\chi, y) = \langle e^{\alpha\mu} e^{\beta\nu} \chi_{|\mu\nu} [C_{\alpha\beta}(\gamma + h\Omega_\sigma \zeta^\sigma) + C_{\alpha\beta}^\lambda (y_{|\lambda} + h\Omega e_{\sigma\lambda}\zeta^\sigma)] -$$
$$- {}^1/_2\, C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{-1} e^{\alpha\mu} e^{\beta\nu} e^{\gamma\lambda} e^{\delta\varkappa} \chi_{|\mu\nu} \chi_{|\lambda\varkappa} \rangle$$

где верхняя грань ищется по всем функциям χ, удовлетворяющим на границе области S условиям

$$\chi_{|\alpha} = \mathrm{const} \tag{7.2}$$

а $C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{-1}$ — тензор, обратный к $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ в том смысле, что $C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{-1} C^{\gamma\delta\mu\nu} = \delta_{(\alpha}^\mu \delta_{\beta)}^\nu$.

Как правило, сформулированные вариационные задачи могут быть решены только численными методами. Имеются отдельные случаи, некоторые из них будут рассмотрены, когда удается элементарными средствами получить довольно существенную информацию.

Ниже в этом пункте излагаются в вариационных терминах и тензорной форме результаты работ [11, 12] (см. также монографию [13]).

Пусть стержень однороден в поперечных направлениях, т. е. $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $G^{\alpha\beta}$, $C_{\alpha\beta}{}^\lambda$, $C_{\alpha\beta}$ и C_α не зависят от ζ^α. Тогда для стержня с произвольной геометрией поперечного сечения и анизотропией общего вида Ψ не зависит от γ, а меры изгиба и кручения входят в Ψ в виде комбинации $\Omega_* = \Omega - {}^1/_2\, e^{\mu\nu} C_\mu \Omega_\nu$, при этом

$$\Psi = {}^1/_2 C \Omega_*^2 \tag{7.3}$$

Здесь крутильная жесткость C — минимальное значение функционала

$$C = \inf_{z, z_\alpha} h^2 \langle G^{\alpha\beta}(z_{|\alpha} + e_{\sigma\alpha}\zeta^\sigma)(\alpha \to \beta) +$$
$$+ C^{\alpha\beta\gamma\delta}(z_{(\alpha|\beta)} + C_{\alpha\beta}^\lambda z_{|\lambda})(\alpha, \beta \to \gamma, \delta) \rangle \tag{7.4}$$

Действительно, сделаем замену искомых функций

$$y = -C_\alpha \gamma \zeta^\alpha - {}^1/_2 C_\alpha h\Omega_\beta (\zeta^\alpha \zeta^\beta - \langle \zeta^\alpha \zeta^\beta \rangle / |S|) + h\Omega_* z \tag{7.5}$$
$$y_\alpha = -(C_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta}^\lambda C_\lambda)\gamma \zeta^\beta - {}^1/_2 a_{\alpha\beta\gamma} (\zeta^\beta \zeta^\gamma - \langle \zeta^\beta \zeta^\gamma \rangle / |S|) + h\Omega_* z_\alpha$$

В качестве постоянных $a_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\gamma\beta}$ возьмем решения линейной системы уравнений

$$a_{(\alpha\beta)\gamma} \equiv {}^1/_2 (a_{\alpha\beta\gamma} + a_{\beta\alpha\gamma}) = C_{\alpha\beta} h\Omega_\gamma - C_{\alpha\beta}^\sigma h\Omega_{(\sigma} C_{\gamma)} - C_{\alpha\beta}^\sigma h\Omega e_{\gamma\sigma} \tag{7.6}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что для любого тензора третьего ранга $a_{\alpha\beta\gamma}$, симметричного по двум последним индексам имеет место тождество

$$a_{\alpha\beta\gamma} = a_{(\alpha\beta)\gamma} + a_{(\alpha\gamma)\beta} - a_{(\beta\gamma)\alpha} \tag{7.7}$$

Равенство (7.7) дает решение системы уравнений (7.6)

Подстановка (7.5) в (1.7) и (1.8) с учетом уравнений (7.6) приводит к соотношениям (7.3), (7.4). Остается еще заметить, что ограничения (3.3) и (3.4) несущественны для вычисления нижней границы функционала Θ, поскольку он инвариантен относительно замен $y \to y + c$, $y_\alpha \to y_\alpha + c_\alpha + \omega e_{\alpha\beta}\zeta^\beta$, c, c_α, ω — постоянные.

Эллиптический стержень. Пусть S задается уравнением $b_{\alpha\beta}\zeta^\alpha\zeta^\beta \leqslant 1$, $b_{\alpha\beta}$ — симметричный положительно-определенный тензор. Минимизирующие функции нетрудно угадать: они удовлетворяют уравнениям (a — постоянная)

$$G^{\alpha\beta}(z_{|\beta} + e_{\sigma\beta}\zeta^\sigma) = ae^{\alpha\lambda}b_{\lambda\mu}\zeta^\mu, \quad z_{(\alpha|\beta)} + C^\lambda_{\alpha\beta}z_{|\lambda} = 0$$

Отсюда

$$z = {}^1\!/_2\,(aG^{-1}_{\beta\alpha}e^{\alpha\lambda}b_{\lambda\mu} - e_{\mu\beta})(\zeta^\mu\zeta^\beta - \langle\zeta^\mu\zeta^\beta\rangle / |S|) \tag{7.8}$$
$$a = 2\,(G^{-1}_{\alpha\beta}e^{\alpha\lambda}e^{\mu\beta}b_{\lambda\mu})^{-1},$$
$$z_\alpha = {}^1\!/_2\bar{a}_{\alpha\beta\gamma}(\zeta^\alpha\zeta^\gamma - \langle\zeta^\beta\zeta^\gamma\rangle / |S|)$$

где $G_{\alpha\beta}{}^{-1}$ — тензор, обратный к $G^{\alpha\beta}$, $\bar{a}_{\alpha\beta\gamma}$ — решение линейной системы уравнений $\bar{a}_{(\alpha\beta)\gamma} = -\,C_{\alpha\beta}{}^\lambda\,(aG_{\sigma\lambda}{}^{-1}e^{\sigma\varkappa}b_{\varkappa\mu} - e_{\mu\lambda})$, которое дается равенствами (7.7). В результате $C = a^2G^{-1}_{\alpha\beta}e^{\alpha\lambda}e^{\beta\varkappa}b_{\lambda\mu}b_{\varkappa\nu}I^{\mu\nu}$, $I^{\mu\nu} = \langle\xi^\mu\xi^\nu\rangle$ или, учитывая, что для эллипса $b_{\alpha\beta} = {}^1\!/_4\,|\,S\,|\,h^2I^{-1}_{\alpha\beta}$ $(I^{-1}_{\alpha\beta}I^{\beta\gamma} = \delta_\alpha{}^\gamma)$, имеем

$$C = 4\,[G^{-1}_{\alpha\beta}e^{\alpha\mu}e^{\beta\nu}I^{-1}_{\mu\nu}]^{-1} \tag{7.9}$$

Обратим внимание на то, что значение крутильной жесткости получено без предположения о соосности тензоров $G_{\alpha\beta}$ и $I_{\alpha\beta}$.

Оценка крутильной жесткости однородного анизотропного стержня произвольного поперечного сечения. Для крутильной жесткости справедлива оценка

$$C \leqslant 4\,(G^{-1}_{\alpha\beta}e^{\alpha\mu}e^{\beta\nu}I^{-1}_{\mu\nu}]^{-1} \tag{7.10}$$

Она является обобщением на анизотропный случай неравенства [14], которое в тензорном виде записывается следующим образом:

$$C \leqslant 4\mu\,[\,I^{-1\alpha}_{\alpha}]^{-1} \tag{7.11}$$

Для вывода неравенства (7.11) из (7.10) следует вспомнить, что в изотропном случае $G^{-1}_{\alpha\beta} = \mu^{-1}\delta_{\alpha\beta}$.

Подставим в функционал (7.4) в качестве пробных функций (7.8), в которых $b_{\alpha\beta}$— произвольные параметры. Это приводит к оценке

$$C \leqslant 4\overline{G}^{\mu\nu}b_{\mu\lambda}b_{\nu\varkappa}I^{\lambda\varkappa}\,[\overline{G}^{\mu\nu}b_{\mu\nu}]^{-2} \tag{7.12}$$

Здесь введено временное обозначение $\overline{G}^{\mu\nu} = G^{-1}_{\alpha\beta}\,e^{\alpha\mu}e^{\beta\nu}$.

Минимизируем теперь правую часть (7.12) по $b_{\alpha\beta}$. Это эквивалентно минимизации квадратичной формы $\overline{G}^{\mu\nu}b_{\mu\lambda}b_{\nu\varkappa}I^{\lambda\varkappa}$ при ограничении $\overline{G}^{\mu\nu}b_{\mu\nu} = 1$. Можно показать, что минимум достигается на $b_{\alpha\beta} = I^{-1}_{\alpha\beta}(\overline{G}^{\lambda\varkappa}I^{-1}_{\lambda\varkappa})^{-1}$, что и доказывает высказанное утверждение.

Оценка аналогичная (а возможно и эквивалентная) (7.10), была построена в [12], однако она имеет гороздо более сложную форму.

8. Неоднородные стержни. При рассмотрении неоднородных стержней ограничимся случаем, когда стержень имеет плоскость упругой симметрии, перпендикулярную оси. При этом $C_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = C_\alpha = 0$ и задача о минимуме функционала Θ распадается на две независимые — задачу о минимуме функционала $\Theta_\angle(y)$ по y и задачу о минимуме функционала $\Theta_\perp(y_\alpha)$ по y_α. Первая из них представляет собой по существу задачу Сен-Венана о кручении [15, 16]. Минимизирующая функция $\Theta_\angle(y)$, очевидно, пропорциональна Ω и $\Psi_\angle = \inf_y \Theta_\angle(y) = {}^1/_2 C\Omega^2$. Вторая задача соответствует некоторой плоской задаче линейной теории упругости, которая в изотропном случае исследовалась Н. И. Мусхелишвили [17]. Минимизирующие функции линейно зависят от γ и Ω_α, поэтому минимальное значение $\Psi_\perp$ функционала $\Theta_\perp$ будет неотрицательной квадратичной формой по γ и Ω_α

$$\Psi_\perp = \inf_{y_\alpha} \Theta_\perp = {}^1/_2 |S| (E_\perp \gamma^2 + 2E_\perp^\alpha \gamma \Omega_\alpha + E_\perp^{\alpha\beta}\Omega_\alpha\Omega_\beta) \tag{8.1}$$

Центрально-симметричные сечения. Говорят, что поперечное сечение центрально симметрично, если наряду с каждой точкой с координатами ζ^α оно содержит точку с координатами $-\zeta^\alpha$. Для функций, определенных в центрально-симметричных областях, можно ввести понятие четности; каждую функцию можно представить в виде суммы нечетной и четной (они отмечаются соответственно штрихом и двумя штрихами).

Пусть $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $C^{\alpha\beta}$ — четные функции ζ^α. Тогда функционал $\Theta_\perp$ распадается на сумму двух функционалов

$$\Theta_\perp' = {}^1/_2 \langle C^{\alpha\beta\gamma\delta}(y'_{(\alpha|\beta)} + C_{\alpha\beta}\gamma)(\alpha, \beta \to \gamma, \delta)\rangle$$
$$\Theta_\perp'' = {}^1/_2 \langle C^{\alpha\beta\gamma\delta}(y''_{(\alpha|\beta)} + C_{\alpha\beta}h\Omega_\sigma\zeta^\sigma)(\alpha, \beta \to \gamma, \delta)\rangle$$

Их можно минимизировать независимо. Нижняя грань $\Theta_\perp'$ пропорциональна γ^2, нижняя грань $\Theta_\perp''$ — $\Omega_\alpha{}^2$. Итак, при сделанных предположениях $E_\perp^\alpha = 0$. Такой же вывод получается, если $C^{\alpha\beta}$ — нечетные функции ζ^α.

Неоднородный стержень с постоянными коэффициентами Пуассона. Оказывается, что при $C_{\alpha\beta} = \mathrm{const}$ имеет место следующее замечательное равенство:

$$\Psi_\perp = 0 \tag{8.2}$$

Для доказательства воспользуемся тем, что вычисление $\Theta_\perp$ на каких-нибудь функциях y_α дает оценку $\Psi_\perp$ сверху. Положим

$$y_\alpha = -C_{\alpha\beta}\gamma\zeta^\beta - {}^1/_2 a_{\alpha\beta\gamma}(\zeta^\beta\zeta^\gamma - \langle\zeta^\beta\zeta^\gamma\rangle/|S|)$$

где $a_{\alpha\beta\gamma}$ — решение системы уравнений $a_{(\alpha\beta)\gamma} = C_{\alpha\beta}h\Omega_\gamma$. На этих функциях $\Theta_\perp = 0$. Следовательно, $\Psi_\perp \leqslant 0$. В силу неотрицательности $\Psi_\perp$ отсюда следует (8.2).

Минимизирующие функции y_α функционала $\Theta_\perp$ имеют универсальную форму для произвольного поперечного сечения и произвольной зависимости от координат упругих модулей $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$; она находится при помощи (7.7)

$$y_\alpha = -C_{\alpha\beta}\gamma\zeta^\beta - (C_{\alpha\beta}h\Omega_\gamma - {}^1/_2 C_{\beta\gamma}h\Omega_\alpha)(\zeta^\beta\zeta^\gamma - \langle\zeta^\beta\zeta^\gamma\rangle/|S|)$$

Критерий обращения $\Psi_\perp$ в нуль. Квадратичная форма $\Psi_\perp$ тождественно равна нулю не только для стержней с постоянными коэффициентами Пуассона, но также и для некоторых стержней с переменными коэффициентами Пуассона.

Справедливо следующее утверждение.

Пусть область S разделена на две части S_1 и S_2 дифференцируемой линией L. В каждой части коэффициенты Пуассона непрерывны, а на линии L терпят разрыв. Тогда для обращения в нуль квадратичной формы $\Psi_\perp$ необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $c\,(\zeta^\alpha)$, такая, что в области непрерывности $C_{\alpha\beta}$

$$C_{\alpha\beta} = c_{|\alpha\beta} \tag{8.3}$$

а на линии разрыва

$$[c_{|\alpha}] = \mathrm{const} \tag{8.4}$$

Символом $[\cdot]$ обозначается разность значений функции на двух сторонах разрыва.

Доказательство. Достаточность. Положим

$$y_\alpha = -c_{|\alpha}(\gamma + h\Omega_\sigma\zeta^\sigma) + ch\Omega_\alpha + a_\alpha + \omega e_{\alpha\sigma}\zeta^\sigma$$

где a_α, ω — постоянные, значения которых в S_1 и S_2 различны. Подберем эти постоянные так, чтобы выполнялось условие $[y_\alpha] = 0$ на L. Привлекая условие кинематической совместности $d\,[c]/d\sigma = r_\alpha d\zeta^\alpha/d\sigma\,(r_\alpha \equiv [c_{\,|\,\alpha}]$, σ — параметр на L), из которого следует, что $[c] = r_\alpha\zeta^\alpha + r$, $r = \mathrm{const}$, найдем, что $[y_\alpha] = 0$ при $[a_\alpha] = r_\alpha\gamma + rh\Omega_\alpha$, $\omega] = e^{\sigma\alpha}r_\sigma h\Omega_\alpha$. Построенные функции y_α являются допустимыми и на них $\Theta_\perp = 0$, следовательно, $\Psi_\perp = 0$.

Необходимость. Пусть $\Psi_\perp = 0$. Тогда в силу неотрицательности $U_\perp U_\perp \equiv 0$ и плоские «деформации» $C_{\alpha\beta}$ и $C_{\alpha\beta}\zeta^\sigma$ должны быть совместны. Из условий совместности в плоской задаче следует, что $C_{\alpha\beta}$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\Delta C_{\alpha\beta} + C^\lambda_{\lambda|\alpha\beta} - C^\mu_{\alpha|\beta\mu} - C^\mu_{\beta|\alpha\mu} = 0 \tag{8.5}$$

$$2C_{\alpha\beta|\lambda} + (C^\nu_{\nu|\alpha} - C^\nu_{\alpha|\nu})\,\delta_{\lambda\beta} + (C^\nu_{\nu|\beta} - C^\nu_{\beta|\nu})\,\delta_{\lambda\alpha} - C_{\alpha\lambda|\beta} - C_{\beta\lambda|\alpha} = 0 \tag{8.6}$$

Сворачивая (8.6) по α, β, получим $C^\nu_{\nu|\lambda} = C^\nu_{\lambda|\nu}$. Отсюда и из (8.6)

$$2C_{\alpha\beta|\lambda} = C_{\alpha\lambda|\beta} + C_{\beta\lambda|\alpha} \tag{8.7}$$

Выразим $C_{\alpha\lambda|\beta}$ в (8.7) по формуле, полученной из (8.7) заменой индексов $\beta \rightleftarrows \lambda$. Учитывая симметрию $C_{\alpha\beta}$, получим $C_{\beta\alpha|\lambda} = C_{\beta\lambda|\alpha}$. Следовательно, существует вектор $c_\alpha\,(\zeta^\beta)$, такой, что $C_{\alpha\beta} = c_{\alpha|\beta}$. Условие симметрии $C_{\alpha\beta}$ означает, что вектор c_α потенциальный: $c_\alpha = c_{|\alpha}$ и, следовательно, имеют место равенства (8.3). Уравнения (8.5), (8.6) при этом удовлетворены. Из (8.3) и условия $U_\perp = 0$ вытекают выписанные выше формулы для y_α и можно убедиться, что требование непрерывности y_α приводит к условиям (8.4).

Приведем ряд элементарных следствий сформулированного критерия.

Следствия. 1°. Если для неоднородного анизотропного стержня с разрывными коэффициентами Пуассона $\Psi_\perp = 0$, то на линии разрыва коэффициенты Пуассона удовлетворяют условию

$$[C_{\alpha\beta}]\,\tau^\beta = 0 \tag{8.8}$$

где τ^β — касательный вектор к линии разрыва.

2°. Для трансверсально-изотропного стержня $\Psi_\perp \equiv 0$ тогда и только тогда, когда коэффициент Пуассона ν постоянен.

3°. Если для неоднородного анизотропного стержня с кусочно-постоянными коэффициентами Пуассона $\Psi_\perp \equiv 0$, то: 1) $\det \| [C_{\alpha\beta}] \| = 0$ и

2) линии разрыва — прямые, перпендикулярные к той из главных осей тензора $[C_{\alpha\beta}]$, для которой соответствующее собственное значение $[C_{\alpha\beta}]$ отлично от нуля.

Некоторые оценки $\Psi_\perp$. Точных решений задачи о минимуме функционала $\Theta_\perp$ известно мало, поэтому особое значение приобретают двусторонние оценки $\Psi_\perp$, устанавливающие вилки для эффективных коэффициентов одномерной энергии. Приведем некоторые простейшие оценки для неоднородных стержней.

Оценка сверху. Возьмем пробные функции y_α в виде

$$y_\alpha = a\zeta_\alpha + (\delta_{\alpha\beta}a_\gamma - {}^1/_2\delta_{\beta\gamma}a_\alpha)(\zeta^\beta\zeta^\gamma - \langle\zeta^\beta\zeta^\gamma\rangle / |S|),$$
$$a, a_\alpha = \mathrm{const}$$

Вычисление $\Theta_\perp$ как функции параметров a и a_α и минимизация по a и a_α приводит к неравенству

$$\begin{aligned}(8.9)\qquad \Psi_\perp \leqslant {} & 2[\langle(\lambda+\mu)\nu^2\rangle - \langle(\lambda+\mu)\nu\rangle^2\langle\lambda+\mu\rangle^{-1} - \\ & - D_{\alpha\beta}(\langle(\lambda+\mu)\nu\zeta^\alpha\rangle - \langle(\lambda+\mu)\nu\rangle\langle(\lambda+\mu)\zeta^\alpha\rangle\langle\lambda+\mu\rangle^{-1})\times \\ & \times(\alpha\to\beta)]\gamma^2 + 2[\langle(\lambda+\mu)\nu^2\zeta^\alpha\zeta^\beta\rangle - \\ & - \langle(\lambda+\mu)\nu\zeta^\alpha\rangle\langle(\lambda+\mu)\nu\zeta^\beta\rangle\langle\lambda+\mu\rangle^{-1} - D_{\gamma\delta}(\langle(\lambda+\mu)\nu\zeta^\gamma\zeta^\alpha\rangle - \\ & - \langle(\lambda+\mu)\zeta^\gamma\rangle\langle(\lambda+\mu)\nu\zeta^\alpha\rangle\langle\lambda+\mu\rangle^{-1})(\gamma\to\delta, \alpha\to\beta)]h^2\Omega_\alpha\Omega_\beta + \\ & + 4[\langle(\lambda+\mu)\nu^2\zeta^\alpha\rangle - \langle(\lambda+\mu)\nu\rangle\langle(\lambda+\mu)\nu\zeta^\alpha\rangle\langle\lambda+\mu\rangle^{-1} - \\ & - D_{\beta\gamma}(\langle(\lambda+\mu)\nu\zeta^\beta\rangle - \langle(\lambda+\mu)\nu\rangle\langle(\lambda+\mu)\zeta^\beta\rangle\langle\lambda+\mu\rangle^{-1})\times \\ & \times(\langle(\lambda+\mu)\nu\zeta^\gamma\zeta^\alpha\rangle - \langle(\lambda+\mu)\zeta^\gamma\rangle\langle(\lambda+\mu)\nu\zeta^\alpha\rangle\langle\lambda+\mu\rangle^{-1})]\gamma h\Omega_\alpha\end{aligned}$$

Здесь через $D_{\alpha\beta}$ обозначен тензор, обратный к тензору

$$\langle(\lambda+\mu)\zeta^\alpha\zeta^\beta\rangle - \langle(\lambda+\mu)\zeta^\alpha\rangle\langle(\lambda+\mu)\zeta^\beta\rangle\langle\lambda+\mu\rangle^{-1}$$

Рассмотрим, в частности, стержень с центрально-симметричным поперечным сечением и четными функциями λ и μ. Тогда $\langle(\lambda+\mu)\nu\zeta^\alpha\rangle = 0$ и оценка (8.9) для добавки $E_\perp$ к эффективному модулю Юнга дает

$$(8.10)\qquad E_\perp \leqslant 4\,(\langle(\lambda+\mu)\nu^2\rangle - \langle(\lambda+\mu)\nu\rangle^2\langle\lambda+\mu\rangle^{-1}) / |S|$$

Пусть стержень состоит из двух однородных материалов, упругие характеристики которых отмечаются индексами 1 и 2, а занимаемые относительные площади α и $1-\alpha$. Неравенство (8.10) принимает форму

$$(8.11)\qquad E_\perp \leqslant 4\alpha(1-\alpha)(\nu_2-\nu_1)^2[\alpha(\lambda_2+\mu_2)^{-1} + (1-\alpha)(\lambda_1 + \mu_1)^{-1}]^{-1}$$

Приведем для сравнения точное значение $E_\perp$, найденное [17] для круглого стержня, у которого при $|\xi^1|^2 + |\xi^2|^2 \leqslant R_1^2$ параметры Ламе имеют значения λ_1, μ_1, а при $R_1 \leqslant |\xi^1|^2 + |\xi^2|^2 \leqslant R_2$ — значения λ_2, μ_2

$$(8.12)\qquad E_\perp = 4\alpha(1-\alpha)(\nu_2-\nu_1)^2[\alpha(\lambda_2+\mu_2)^{-1} + (1-\alpha)(\lambda_1+\mu_1)^{-1} + \mu_2^{-1}]^{-1}$$

Сравнение (8.11) и (8.12) показывает, что оценка асимптотически точна при $\mu_1/\mu_2 \to 0$ и ее погрешность растет вместе с μ_1/μ_2.

Оценка снизу. В отличие от оценок сверху не удается построить оценки снизу при помощи двойственной вариационной задачи (7.1) для любого поперечного сечения, поскольку функция χ должна удовлетворять краевым условиям (7.2) на границе сечения. Для иллюстрации применения двойственной задачи получим оценку снизу $E_\perp$ для изотропного круглого стержня с произвольно меняющимися по сечению параметрами λ, μ. Возьмем функцию χ в виде $\chi = a\,(\zeta_\alpha\zeta^\alpha - {}^1/_4)^2$. Условия (7.2) при этом удовлетворены. Подстановка в (7.1) и максимизация по параметру a дает

$$E_\perp \geqslant 4\,\langle\nu\,(\zeta_\alpha\zeta^\alpha - {}^1/_8)\rangle^2\,[{}^1/_4\,\langle\mu^{-1}(\zeta_\alpha\zeta^\alpha)^2\rangle + \langle(\lambda+\mu)^{-1}(\zeta_\alpha\zeta^\alpha - {}^1/_8)^2\rangle]^{-1}\,|S|^{-1}$$

Заметим, что $\langle\nu\,(\zeta^\alpha\zeta_\alpha - {}^1/_8)\rangle = \langle(\nu - \langle\nu\rangle\,|S|^{-1})\,\zeta_\alpha\zeta^\alpha\rangle$ и правая часть оценки снизу при $\nu = \mathrm{const}$, как и должно быть, обращается в нуль.

9. Энергия стержня из физически линейного материала. Деформация стержня полностью определяется γ, Ω_α и Ω, поэтому в первом приближении надо удержать в выражении для плотности энергии Φ главные члены по γ, Ω_α и Ω и главные перекрестные члены. Главные члены по γ, Ω_α и Ω содержатся в выражении (1.6). Перекрестные члены в (1.6), как видно из результатов п. 7 и п. 8, могут обращаться в нуль и главные перекрестные члены оказываются среди слагаемых энергии порядка $\mu h^2\,(\varepsilon^3 + h_*\varepsilon^2 + h_{**}\varepsilon^2)$. Рассмотрим сначала энергию Φ (1.6), имеющую порядок $\mu h^2\varepsilon^2$, а затем займемся вычислением перекрестных членов.

Однородные анизотропные стержни. Из (1.6) и (7.3) получим

$$2\Phi = E\,|S|\,\gamma^2 + EI^{\alpha\beta}\Omega_\alpha\Omega_\beta + C\,(\Omega - {}^1/_2 e^{\mu\nu}C_\mu\Omega_\nu)^2 \tag{9.1}$$

Если упругие свойства стержня симметричны относительно плоскости, перпендикулярной оси, то выражение (9.1) переходит в классическое

$$2\Phi = E\,|S|\,\gamma^2 + EI^{\alpha\beta}\,\Omega_\alpha\Omega_\beta + C\Omega^2 \tag{9.2}$$

В противном случае в выражение для энергии входит слагаемое $-Ce^{\mu\nu}C_\mu\Omega_\nu\Omega$, описывающее перекрестное взаимодействие между кручением и изгибом, а эффективные изгибные жесткости определяются не только тензором моментов инерции сечения ($EI^{\alpha\beta}$ — как в классическом случае), но и добавкой, связанной с крутильной жесткостью. Изгибные жесткости имеют вид $EI^{\alpha\beta} + {}^1/_4\,Ce^{\mu\alpha}e^{\nu\beta}C_\mu C_\nu$. Отметим, что перекрестное взаимодействие и увеличение изгибной жесткости возникает лишь для изгибов в плоскости, перпендикулярной вектору C_α.

Дальше будем рассматривать стержни, упругие свойства которых симметричны относительно плоскости, перпендикулярной оси.

Неоднородные стержни. Согласно (1.6) и (8.1)

$$2\Phi = [(\langle E\rangle + E_\perp|S|)\,\gamma^2 + 2\,(\langle E\xi^\alpha\rangle + E_\perp^\alpha|S|)\,\gamma\Omega_\alpha + (\langle E\xi^\alpha\xi^\beta\rangle + E_\perp^{\alpha\beta}|S|)\,\Omega_\alpha\Omega_\beta] + C\Omega^2 \tag{9.3}$$

С этим равенством и формулой (8.2) связано одно интересное замечание, установленное для изотропного случая Н. И. Мусхелишвили [17]. Пусть имеется два стержня с одинаковыми значениями $\langle E\rangle$, $\langle E\xi^\alpha\rangle$ и $\langle E\xi^\alpha\xi^\beta\rangle$ и разными значениями коэффициентов Пуассона $C_{\alpha\beta}$, причем у одного стержня коэффициенты Пуассона постоянны. Тогда изгибная жесткость и модуль Юнга больше у стержня, коэффициенты Пуассона которого переменны (если последние не удовлетворяют при этом критерию вырождения $\Psi_\perp$ (8.3), (8.4); Н. И. Мусхелишвили рассматривал кусочно-однородные изотропные стержни, для которых согласно следствию 2 п. 8 вырождения $\Psi_\perp$ быть не может).

Для стержней с центрально-симметричным поперечным сечением и четными упругими свойствами $\langle E\xi^\alpha\rangle = E_\perp{}^\alpha = 0$ и перекрестный эффект между растяжением и изгибом исчезает.

Перекрестные члены. Ограничимся анализом однородных анизотропных стержней с центрально-симметричным сечением и примем $h_* \ll \varepsilon$, так, что членами порядка $h_*\varepsilon^2$ можно пренебречь по сравнению с членами порядка ε^3; последнее предположение справедливо, в частности, для стержней, прямых в недеформированном состоянии. Перекрестные члены порядка $h_*\varepsilon^2$ строились в работах [3, 18].

Можно проверить, что в силу центральной симметрии поперечного сечения и свойств четности y и y_α в энергию дадут вклад только следующие слагаемые выражения для деформаций:

$$(9.4)\qquad 2\varepsilon_{\alpha 3} = y_{|\alpha} + h\Omega\,(1 - C^\mu_\mu\gamma)\, e_{\sigma\alpha}\zeta^\sigma - h\,\frac{d\gamma}{ds}\,C_{\alpha\sigma}\zeta^\sigma$$

$$\varepsilon_{33} = \gamma + [\delta_{\alpha\beta} + (\delta_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta})\,\gamma]\, h\Omega^\alpha\zeta^\beta + {}$$
$$+ {}^1\!/_2 h^2(\Omega_\alpha\zeta^\alpha)^2 + {}^1\!/_2 h^2\Omega^2\zeta_\alpha\zeta^\alpha$$

Выражения (9.4) содержат поправки порядка ε и h_{**} по сравнению с единицей.

В соответствии с общей схемой вариационно-асимптотического метода [2] для построения всех поправок порядка ε и h_{**} надо представить y и y_α в виде $y = y_0 + y'$, $y_\alpha = y_{0\alpha} + y_\alpha'$, где y_0, $y_{0\alpha}$ — минимизирующие функции функционала Θ, оставить в выражении плотности энергии трехмерного тела главные члены по y', y_α' и главные перекрестные члены и затем минимизировать полученный функционал по y', y_α'. Можно проверить, что при этом величина y_α' окажется порядка ε^2 и может быть отброшена, так как в силу уравнений Эйлера функционала $\Theta_\perp$ в выражение для энергии не войдут перекрестные члены между $y_{0\alpha}$ и y_α', а определение энергии с учетом поправок порядка ε и h_{**} эквивалентно замене задачи о кручении «уточненной» задачей о кручении

$$(9.5)\qquad {}^1\!/_2 G^{\alpha\beta}\,\langle (y_{|\alpha} + h\Omega\,(1 - C^\mu_\mu\gamma)\, e_{\sigma\alpha}\zeta^\sigma - C_{\alpha\sigma}\zeta^\sigma h\,d\gamma/ds)\,(\alpha \to \beta)\rangle \to \inf_y$$

Замена $y \to z$

$$y = {}^1\!/_2 C_{\alpha\beta}\,(\zeta^\alpha\zeta^\beta - \langle\zeta^\alpha\zeta^\beta\rangle / |S|)\, h\,d\gamma/ds + h\Omega\,(1 - C^\mu_\mu\gamma) z$$

сводит ее к задаче о кручении. Поэтому минимум функционала (9.5) равен ${}^1\!/_2 C\Omega^2\,(1 - C^\mu_\mu\gamma)^2$. Учитывая выражение для ε_{33} (9.4), для плотности энергии стержня найдем

$$(9.6)\qquad \Phi = {}^1\!/_2\,(E\,|S|\,\gamma^2 + EI^{\alpha\beta}\Omega_\alpha\Omega_\beta + C\Omega^2) + B\gamma\Omega^2 + B^\alpha_\beta I_{\alpha\sigma}\gamma\Omega^\beta\Omega^\sigma$$

Постоянные B и $B_\beta{}^\alpha$ характеризуют перекрестные эффекты между растяжением и кручением, растяжением и изгибом и даются формулами

$$B = {}^1\!/_2 EI^\alpha_\alpha - C^\alpha_\alpha C, \quad B^\alpha_\beta = E\,({}^3\!/_2\delta^\alpha_\beta - C^\alpha_\beta)$$

Погрешность формулы (9.6) есть $O\,(\mu h^2\,(h_{**}\varepsilon^3 + \varepsilon^4))$. Выражение (9.6) не содержит перекрестного члена между кручением и изгибом, поскольку он имеет порядок $\mu h^2 h_{**}\varepsilon^3$.

В изотропном случае тензор $B_\beta{}^\alpha$ шаровой и положительно-определенный. Постоянная B, как следует из оценки (7.11) и неравенства $(I^{-1\alpha}{}_\alpha)^{-1} \leqslant {}^1\!/_4 I^\alpha_\alpha$, положительна. Это означает, что закручивание стержня вызывает его укорачивание, если концы свободны, и растягивающее усилие, если концы заделаны. Однако так будет только для изотропных стержней. В анизотропном случае за счет произвольности G, E и ν постоянная B может быть положительной, а может быть и отрицательной.

Это можно пояснить следующим образом. Перекрестное взаимодействие между растяжением и кручением обусловлено двумя геометрически-нелинейными эффектами. При закручивании возникает удлинение волокон, параллельных оси. Оно порождает увеличение энергии стержня (первое слагаемое в коэффициенте B). С другой стороны, продольное удлинение за счет эффекта Пуассона сопровождается поперечной деформацией, которая вызывает (геометрически — нелинейный эффект!) дополнительную сдвиговую деформацию, уменьшающую (при $C^{\mu}_{\mu} > 0$) энергию сдвига (второе слагаемое в коэффициенте B). В изотропном случае преобладает первый фактор и энергия увеличивается, для анизотропных стержней может произойти обратное.

Приведем значение постоянной B для круглого изотропного стержня радиуса: R: $B = {}^1/_4\pi R^4 E\,(1-\nu)\,/\,(1+\nu)$.

Одномерный функционал. Положение равновесия упругого стержня в первом приближении можно искать из условия стационарности функционала (1.5) на множестве функций $r^i\,(\xi)$ и $\tau^i_\alpha\,(\xi)$, удовлетворяющих ограничениям (1.1) и условиям заделки на торцах (3.5). В (1.5), согласно (2.4), (3.2), (5.2) и оценке $y^i = O\,(\varepsilon)$, работа внешних сил имеет вид

$$L = \int\limits_0^{|\Gamma_0|} (Q_i r^i + Q_i^\alpha \tau^i_\alpha)\, d\xi, \quad Q_i = h \int\limits_{\partial S} P_i\, d\sigma + F_i\,|S|,$$

$$Q_i^\alpha = h^2 \int\limits_{\partial S} P_i \zeta^\alpha\, d\sigma$$

10. Энергия стержня из материала Мурнагана и Муни. При учете в одномерной энергии перекрестных членов порядка ε^3 вклады порядка ε^3 естественно сохранить и в энергии трехмерного тела. При помощи вариационно-асимптотического метода можно найти, что соответствующие изменения в Φ сведутся к добавлению значений членов порядка ε^3 энергии трехмерного тела, вычисленных на деформациях (6.1). При этом для энергии получится выражение вида (9.6) с коэффициентами B и $B_\beta{}^\alpha$, которые для материала Мурнагана (l, m, n — постоянные Мурнагана [19]) даются формулами

$$B = {}^1/_2\, EI_\mu{}^\mu + C\,({}^1/_2\,(1-2\nu)\, m\mu^{-1} + {}^1/_2 \nu n \mu^{-1} - 2\nu)$$
$$B_\beta{}^\alpha = \delta_\beta{}^\alpha\,[({}^3/_2 - \nu)\, E + (1-2\nu)^3\,(l-m) + 3\,(1-2\nu) \times$$
$$\times\,(1+2\nu^2)\, m + 3\nu^2 n]$$

Соответствующие выржения для материала Муни имеют вид (c — постоянная Муни [19])

$$B = {}^1/_2\, EI_\mu{}^\mu - {}^1/_4\,(7+c)C, \quad B_\beta{}^\alpha = {}^1/_2\, E\,(1+c)\, C$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бердичевский В. Л.* Об уравнениях теории анизотропных неоднородных стержней.— Докл. АН СССР, 1976, т. 228, № 3, с. 558.
2. *Бердичевский В. Л.* Вариационно-асимптотический метод построения теории оболочек.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 4, с. 664.
3. *Бердичевский В. Л., Старосельский Л. А.* К теории естественно закрученных стержней.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 6, с. 103.

4. *Понятовский В. В.* Применение асимптотического метода интегрирования к задаче равновесия тонкого бруса, произвольно нагруженного по боковой поверхности.— Инж. ж. МТТ, 1968, № 5, с. 139.
5. *Rigolot A.* Theorie asymptotique des milieux curvilignes et equilibre élastique d'un cylindre infiniment élancé.— C. r. Acad. sci., 1971, t. 272, No 11, p. 753.
6. *Понятовский В. В.* Асимптотическая теория изгиба кривого бруса.— В кн.: Исследования по упругости и пластичности. Вып. № 9. Л.: Изд-во ЛГУ, 1973, с. 81.
7. *Елисеев В. В.* Применение асимптотического метода в задаче о равновесии криволинейного стержня.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 3, с. 145.
8. *Ladevêze J.*, *Ladevêze P.*, *Mantion M.*, *Pécastaings F.*, *Pelle J.-P.* Sur les fondements de la theorie lineare des poutres élastiques. I.— J. Méc., 1979, v. 18, No. 1; p. 129.
9. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1 — М.: Наука, 1976, 535 с.
10. *Бердичевский В. Л.* Об одном вариационном принципе.— Докл. АН СССР, 1974, т. 215, № 6, с. 1329.
11. *Voigt W.* Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig — Berlin: Teubner, 1928. 978S.
12. *Илюхин А. А.* Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. Киев: Наукова думка, 1979. 216 с.
13. *Лехницкий С. Г.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М.: Наука, 1971. 240 с.
14. *Николаи Е. Л.* Труды по механике. М.: Гостехтеориздат, 1955, 584 с.
15. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.: Глав. ред. общетехн. лит-ры и номогр., 1935. 674 с.
16. *Арутюнян Н. Х.*, *Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963, 686 с.
17. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966, 707 с.
18. *Старосельский Л. А.* Об уравнениях, описывающих колебания криволинейных упругих стержней.— Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 1, с. 63.
19. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.

Москва

Поступила в редакцию 23.X.1979