

УДК 532.529

РЕЗОНАНСНЫЕ СВОЙСТВА ПАРОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ

Хабеев Н.С.

Рассматриваются паровые пузырьки в жидкости, совершающие радиальные пульсации под действием акустического поля. Показано, что резонансная частота больших паровых пузырьков практически совпадает с собственной частотой адиабатических газовых пузырьков, определяемой формулой Миннаërта, а для мелких паровых пузырьков наличие капиллярных эффектов и фазовых переходов приводит к появлению новой резонансной частоты, отличной от миннаëртовской. Получена простая аналитическая формула, связывающая резонансную частоту парового пузырька с его радиусом, хорошо согласующаяся с результатами численного решения задачи. Указаны диапазоны размеров пузырьков и частот акустического поля, в которых справедливы различные аппроксимации зависимости резонансной частоты от радиуса пузырька. Приведены численные расчеты резонансной частоты от радиуса парового пузырька и резонансного размера пузырька от частоты поля. Показано, что в некотором диапазоне размеров пузырьков и частот акустического поля существуют две резонансные частоты и два резонансных размера парового пузырька.

В работах [1, 2] при расчете динамики паровых пузырьков в акустическом поле было обнаружено существование двух резонансных размеров паровых пузырьков. В [1] также установлено существование новой резонансной частоты парового пузырька, отличной от миннаëртовской [3].

Вопрос о резонансных свойствах однородных, равновесных паровых пузырьков рассматривался в [4], но резонансные частоты пузырька определялись не вполне корректно. В [5] сделана попытка аналитического определения резонансных размеров паровых пузырьков и физического объяснения природы второго резонанса. Однако пренебрежение поверхностным натяжением и другие неточности привели автора [5] к ошибочной формуле, не описывающей реальных значений резонансных размеров паровых пузырьков, например в вариантах, рассчитанных в [1, 2].

1. Колебания паровых пузырьков в акустическом поле. Постановка задачи о сферически симметричных процессах около парогазовых пузырьков изложена в [6]. Система уравнений, описывающих колебания неравновесного, температурно-неоднородного, гомобаричного парового пузырька в вязкой жидкости приведена в [7]. В [1] в рамках линейного представления получены аналитические решения задачи о свободных и вынужденных колебаниях пузырька. Воспользуемся этим решением для исследования резонансных свойств паровых пузырьков.

Предполагаем амплитуду давления акустического поля p_A , частоты ω малой по сравнению со статическим давлением в жидкости p_∞ :

$$(1.1) \quad p(\infty) = p_\infty + p_A e^{i\omega t}, \quad p_A \ll p_\infty$$

В этом случае радиус пузырька можно описать действительной частью выражения

$$(1.2) \quad R = R_0 (1 + \alpha e^{i\omega t})$$

где α — комплексное число, $|\alpha| \ll 1$. Для паровых пузырьков в несжимаемой жидкости полученное в [1] решение имеет вид

$$(1.3) \quad \alpha = p_A/S, \quad S = \rho_l \omega^2 R_0^2 + 2\sigma/R_0 - 4i\omega\mu_l - 3/Q$$

$$(1.4) \quad Q = \frac{1 - ia_v [BG(1 - \kappa) + k(1 + EZ^{1/2})]/(\omega R_0^2)}{\gamma p_0 + i\omega a_v \rho_{v0} [BG\kappa - k(1 + EZ^{1/2})]/3}$$

$$\kappa = c_p T_0/l, \quad Z = i\omega R_0^2/a_v, \quad E = (a_v/a_l)^{1/2}$$

$$B = Z^{1/2} \operatorname{cth} Z^{1/2} - 1, \quad a_v = \lambda_v/\rho_{v0}c_p, \quad a_l = \lambda_l/\rho_l c_l$$

$$p_0 = p_\infty + 2\sigma/R_0, \quad T_0 = T_S(p_0)$$

$$G = 3(\gamma - 1)(1 - \kappa), \quad k = 3(\gamma - 1)\kappa^2\lambda_l/\lambda_v$$

Здесь S — резонансная функция, Q — сжимаемость пузырька, γ — показатель адиабаты пара, ρ — плотность, l — удельная теплота парообразования, μ , σ , λ — соответственно коэффициенты вязкости, поверхностного натяжения, теплопроводности, c_p — теплоемкость пара при постоянном давлении. $T_S(p)$ — температура насыщения, нижние индексы l и v относятся соответственно к параметрам жидкости и пара, индекс 0 — к параметрам в равновесном состоянии. В записи (1.3) предполагается, что пар описывается простейшим уравнением состояния идеального газа. Анализ выражения (1.3) показывает, что

$$(1.5) \quad \lim_{R_0 \rightarrow 0} |\alpha| = \lim_{R_0 \rightarrow \infty} |\alpha| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |\alpha| = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} |\alpha| \frac{p_\infty}{p_A} = \frac{R_0 p_\infty}{2\sigma}$$

$$\lim_{R_0 \rightarrow 0} \beta = \lim_{R_0 \rightarrow \infty} \beta = \lim_{\omega \rightarrow 0} \beta = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \beta = 0$$

где β — сдвиг по фазе между колебаниями радиуса пузырька и давления на бесконечности. При $\sigma = 0$:

$$\lim_{R_0 \rightarrow 0} |\alpha| \frac{p_\infty}{p_A} = \frac{p_\infty}{4\omega\mu_l}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} |\alpha| \frac{p_\infty}{p_A} = \infty$$

Из (1.5) следует, что при $\sigma \neq 0$ для любой конечной частоты существует хотя бы один такой размер пузырька, при котором $|\alpha|$ достигает максимального значения. Это показывает несостоятельность результатов [4], согласно которым для достаточно высоких частот акустического поля не существует резонансных паровых пузырьков.

Анализ выражения (1.3) показывает, что при отсутствии фазовых превращений

$$\lim_{R_0 \rightarrow 0} \beta = \lim_{\omega \rightarrow 0} \beta = \pi$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |\alpha| \frac{p_\infty}{p_A} = \left[3\gamma + (3\gamma - 1) \frac{2\sigma}{R_0 p_\infty} \right]^{-1}$$

Заметим, что в [8] для газового пузырька постоянной массы получено

$$\lim_{R_0 \rightarrow 0} \beta = \lim_{\omega \rightarrow 0} \beta = 0$$

Эти соотношения, а также установленное в [8] существование двух резонансных размеров газовых пузырьков имеет место лишь при искусственном фиксировании давления в пузырьках:

$$p_0 = p_\infty + 2\sigma/R_0 = \text{const}$$

Но тогда статическое давление в жидкости p_∞ должно уменьшаться с уменьшением R_0 и для мелких пузырьков (в воде при $R_0 \lesssim 1$ мкм) стать отрицательным. При этом такой «резонанс» реализуется при отрицательном давлении в жидкости $p_\infty \approx \approx -2p_0$, что практически невыполнимо.

Выражение для сжимаемости пузырька (1.4) можно значительно упростить, если учесть, что для большинства веществ в широком диапазоне варьируемых параметров справедливы оценки

$$(1.6) \quad 0 < G < 1, \quad 0 < \kappa < 1, \quad k \sim 1, \quad E \gg 1 \\ \omega \rho_0 a_v k |1 + EZ^{1/2}| / p_0 \ll 1 \\ |B| \ll k |1 + EZ^{1/2}|$$

Физический смысл последнего неравенства состоит в том, что при наличии фазовых переходов внутренняя тепловая задача становится во многих случаях несущественной.

После упрощения получим

$$Q = [Z + k(1 + EZ^{1/2})] / \gamma p_0 Z$$

Рассмотрим случай

$$|Z| \gg k, \quad |Z| \gg kE |Z^{1/2}|$$

Если справедливы оценки (1.6), то последнее из этих неравенств более сильное и при выполнении его, т. е. когда

$$(1.7) \quad R_0 \gg ka_v (a_l \omega)^{-1/2}$$

выражение для резонансной функции имеет вид

$$(1.8) \quad S = \rho_l \omega^2 R_0^2 + 2\sigma/R_0 - 4i\omega\mu_l - 3\gamma p_0 (1 - kEZ^{-1/2})$$

Резонансная частота находится решением уравнения

$$(1.9) \quad \partial |S| / \partial \omega = 0$$

и проверки условия

$$(1.10) \quad \partial^2 |S| / \partial \omega^2 > 0$$

Условие (1.7) предполагает, что пузырьки достаточно крупные и влияние процессов тепло- и массообмена на их динамику мало; поэтому будем искать решение уравнения (1.9) в виде

$$(1.11) \quad \omega = \omega_0 (1 + \varepsilon), \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad \omega_0 = (3\gamma p_0 / \rho_l)^{1/2} R_0^{-1}$$

где ω_0 — собственная частота адиабатического газового пузыря, совершающего радиальные колебания в идеальной жидкости [3]. Подставив (1.11) в (1.9) и используя малость ε , капиллярных и вязких эффектов, получим

$$(1.12) \quad \varepsilon = -\frac{1}{2} ka_v (2a_l R_0)^{-1/2} (3\gamma p_0 / \rho_l)^{-1/4}$$

Полученная поправка для резонансной частоты крупных паровых пузырей характеризует влияние процессов тепломассообмена на их динамику. Естественно, что она возрастает с уменьшением R_0 .

Аналогично, при выполнении условия (1.7) можно получить формулу для резонансного размера паровых пузырьков, колеблющихся на достаточно низких частотах акустического поля.

Для этого решаем уравнение

$$(1.13) \quad \partial |S| / \partial R_0 = 0$$

причем решение ищем в виде

$$(1.14) \quad R_0 = R_M (1 + \delta), \quad |\delta| \ll 1, \quad R_M = \omega^{-1} (3\gamma p_\infty / \rho_l)^{1/2}$$

Подставив (1.8) в (1.13) и используя малость δ , получим

$$(1.15) \quad \delta = -\frac{ka_v}{2} \left(\frac{6\gamma p_\infty a_l}{\omega \rho_l} \right)^{-1/2}$$

Оценим диапазон размеров пузырьков и частот акустического поля, для которых резонансные частоты и размер пузырька определяются полученными соотношениями. При этом заметим, что условия

$$(1.16) \quad 4\omega \mu_l \ll 3\gamma p_\infty, \quad 2\sigma/R_0 \ll 3\gamma p_\infty$$

для реальных жидкостей обычно заведомо выполняются при выполнении условия (1.7). Подставив (1.11), (1.14) в (1.7) получим

$$(1.17) \quad R_0^{1/2} \gg ka_v (3\gamma p_\infty a_l^2 / \rho_l)^{-1/4}, \quad \omega^{1/2} \ll (3\gamma p_\infty a_l / \rho_l)^{1/2} / (ka_v)$$

Для воды при $p_\infty = 0,1$ МПа эти оценки дают

$$(1.18) \quad R_0 \gtrsim 10^{-2} \text{ м}, \quad f = \omega/2\pi \lesssim 100 \text{ Гц}$$

Подставляя (1.12), (1.15) в (1.8), можно определить значения амплитуды $|\alpha| p_\infty / p_A$ на резонансной частоте (M_ω) и при резонансном размере (M_R):

$$(1.19) \quad M_\omega = (3\gamma)^{-3/4} (p_\infty / \rho_l)^{1/4} (2R_0 a_l)^{1/2} / (ka_v) \\ M_R = (2a_l p_\infty / (3\gamma \omega \rho_l))^{1/2} / (ka_v)$$

В другом предельном случае достаточно мелких пузырьков, когда выполнены условия

$$(1.20) \quad |Z| \ll k |1 + EZ^{1/2}|, \quad E |Z^{1/2}| \gg 1 \\ \rho_l \omega^2 R_0^2 \ll 2\sigma/R_0, \quad 4\omega \mu_l \ll AR_0 \omega^{1/2}$$

выражение для резонансной функции имеет вид

$$(1.21) \quad S = 2\sigma/R_0 - AR_0 \omega^{1/2} (1 + i), \quad A = l^2 \rho_{v0}^2 (a_l/2)^{1/2} / (\lambda_l T_0)$$

В работах [4, 5] резонансная частота парового пузырька находилась решением уравнения $\text{Re}(S) = 0$. Некорректность такого подхода для определения резонансной частоты, связанная с тем, что наряду с действительной частью $\text{Re}(S)$ мнимая часть резонансной функции также является функцией радиуса пузырька и частоты акустического поля, не приводит к существенным ошибкам в [4] лишь в области больших значений радиуса пузырька и малых частот акустического поля, когда справедлива формула Миннаерта. Эта же неточность в [5] привела к ошибочной формуле, связывающей резонансную частоту пузырька с его радиусом.

При выполнении условий (1.20) можно получить простое соотношение, связывающее резонансную частоту парового пузырька с его радиусом. Решая для (1.21) уравнение (1.9) с последующей проверкой условия (1.10), получим [9]

$$(1.22) \quad \omega = (\sigma/A)^2 R_0^{-4}$$

Заметим, что T_0 , ρ_{v0} , l , а следовательно, и A — функции равновесного давления в пузырьке p_0 , которое при постоянном гидростатическом давлении в жидкости p_∞ меняется с изменением R_0 . Однако, если выполнено условие $2\sigma/R_0 \lesssim p_\infty$, то зависимость $A(R_0)$ слабая и можно считать $\omega \sim \sim R_0^{-4}$. В этом случае при помощи решения для (1.21) уравнения (1.13) можно определить также зависимость резонансного размера пузырька от частоты акустического поля

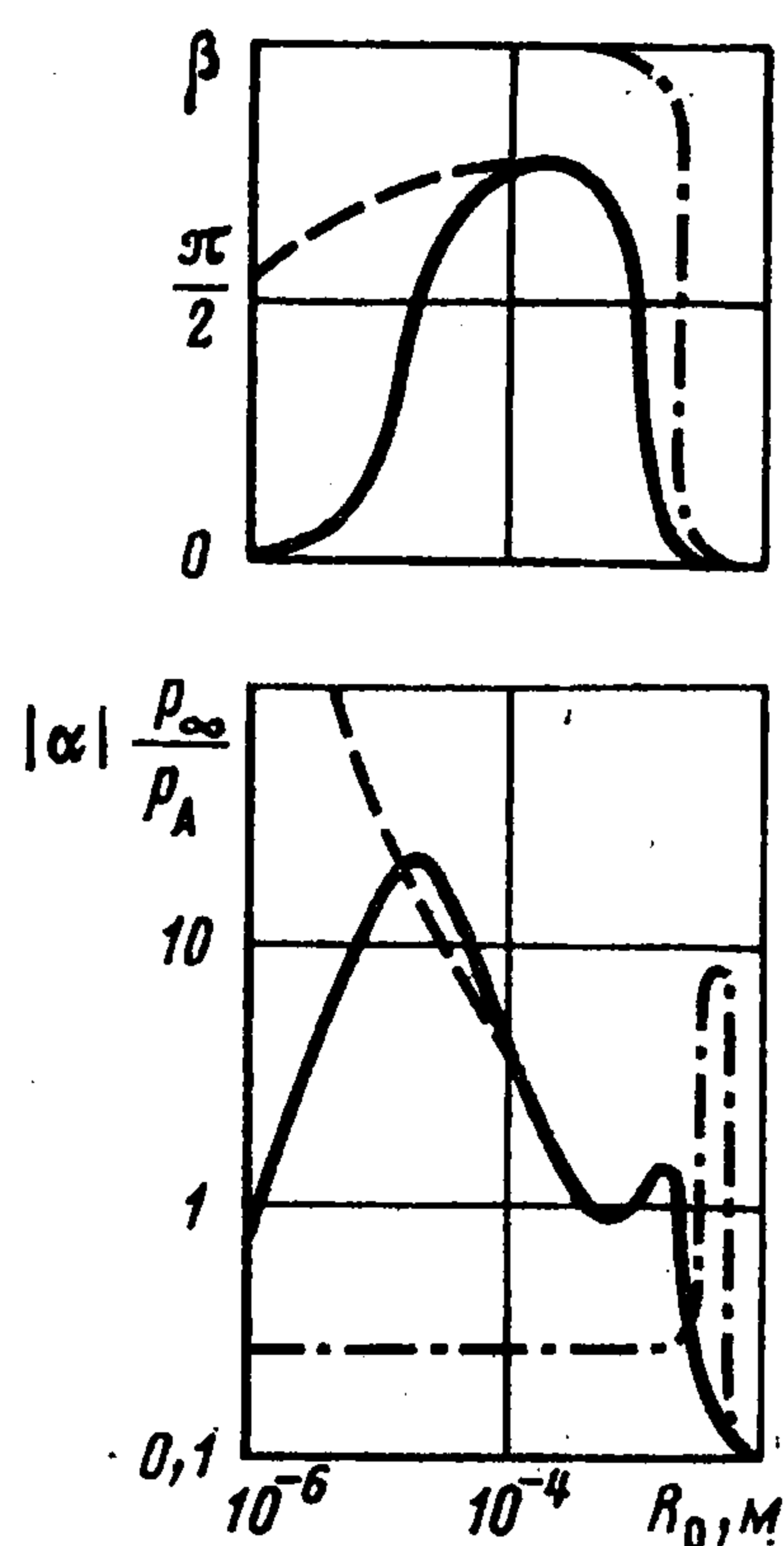
$$(1.23) \quad R_0^4 = 2 (\sigma/A)^2 \omega^{-1}$$

Полученная зависимость не является в точности обратной по отношению к (1.22), отличаясь числовым коэффициентом.

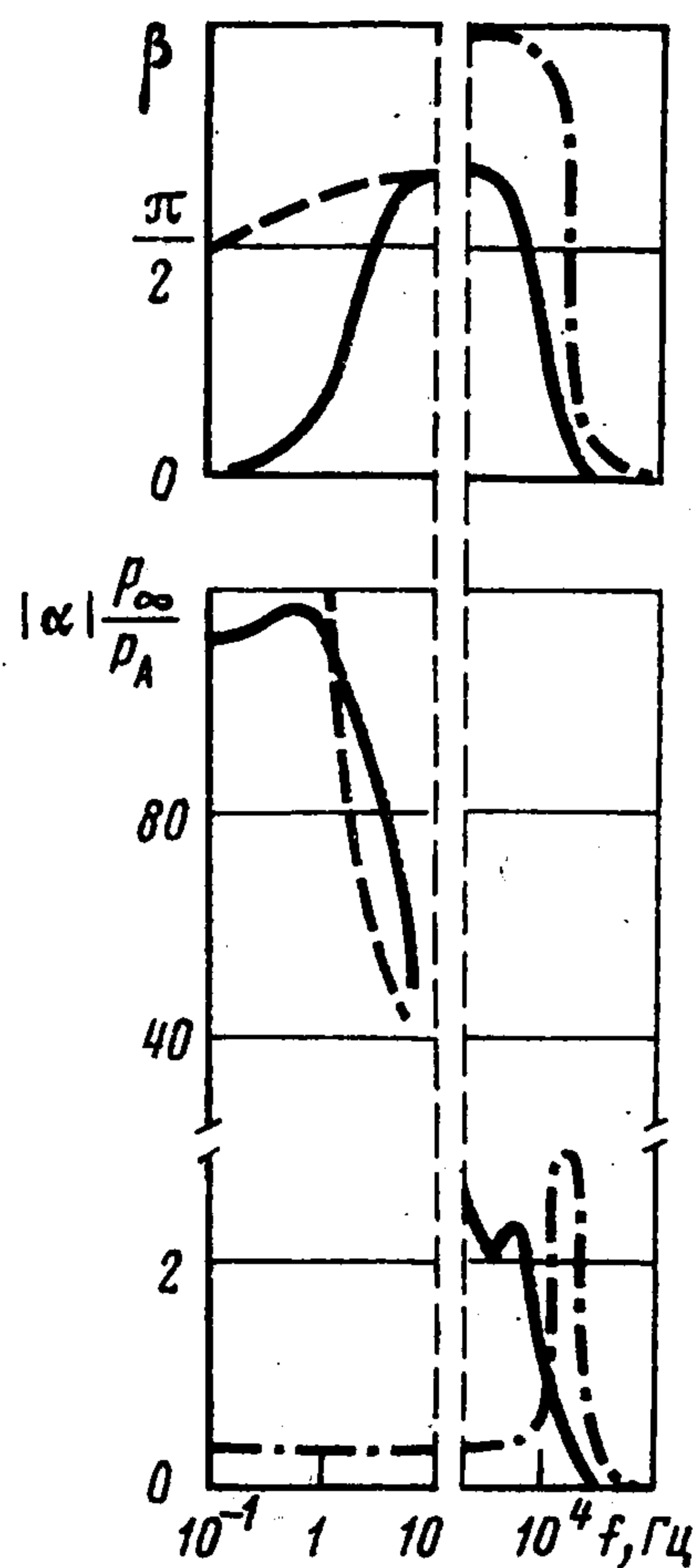
Подставляя (1.22), (1.23) в (1.21), можно определить резонансные значения амплитуды колебаний $|\alpha| p_\infty/p_A$:

$$(1.24) \quad M_\omega = \frac{p_\infty R_0}{\sqrt{2}\sigma}, \quad M_R = \frac{p_\infty \omega^{-1/4}}{2 [A\sigma(\sqrt{2}-1)]^{1/2}}$$

Существование двух резонансов паровых пузырьков вызвано частотной дисперсией, так как сжимаемость мелких паровых пузырьков в отличие



Фиг. 1



Фиг. 2

от газовых существенно зависит от частоты колебаний. Этим объясняется и то, что паровой пузырек в отличие от газового колеблется на низких частотах в фазе с давлением жидкости вдали от пузырька.

Оценивая диапазон размеров пузырьков и частот акустического поля, для которых справедливы формулы (1.22), (1.23), получим, что для воды при $p_\infty = 0,1$ МПа эти оценки дают

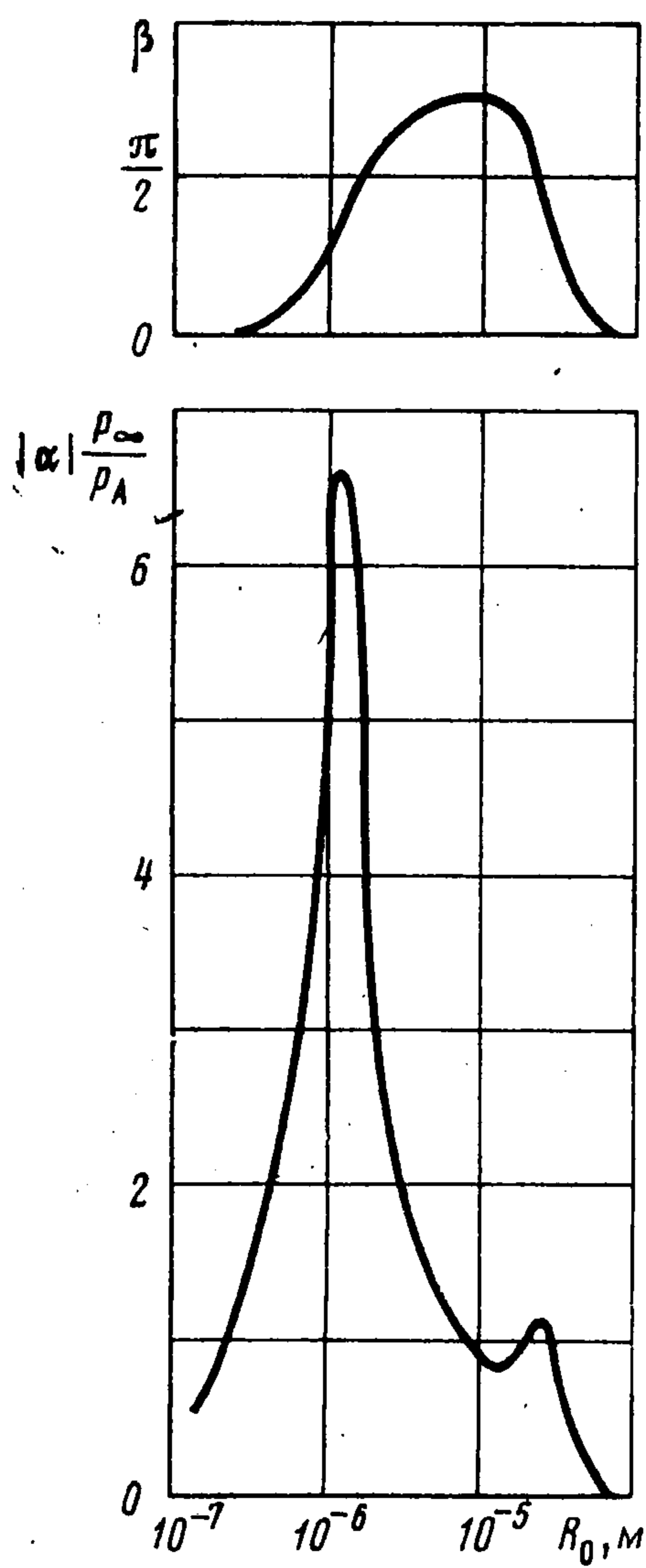
$$(1.25) \quad 10^{-5} \text{ м} \lesssim R_0 \lesssim 10^{-4} \text{ м}, \quad 10 \text{ Гц} \lesssim f \lesssim 10^4 \text{ Гц}$$

Интервалы (1.18) и (1.25) имеют пересечение. Таким образом, для воды при $p_\infty = 0,1$ МПа в интервале частот акустического поля от 10 до 100 Гц заведомо существуют два резонансных размера пузырька, определяемых формулами (1.14) и (1.23). В действительности диапазон частот, в котором существуют два резонансных размера пузырька, значительно шире.

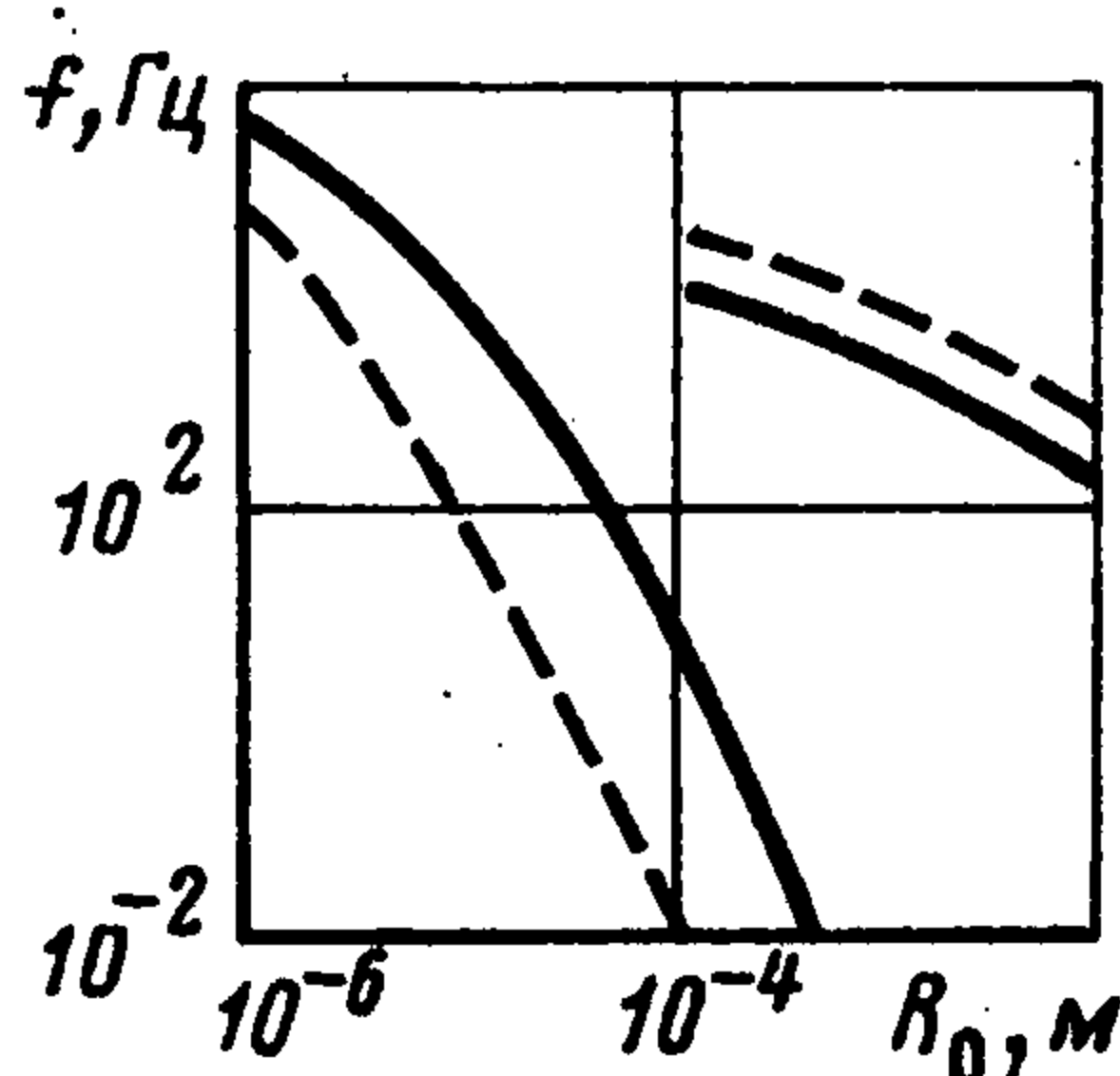
На фиг. 1 приведена зависимость амплитуды колебаний $|\alpha| p_\infty/p_A$ и фазы β от радиуса пузырька при пульсациях его в воде при атмосферном давлении на частоте $f = 1$ кГц.

На фиг. 2 приведена зависимость амплитуды и фазы колебаний пузырька $R_0 = 0,13$ мм в воде при $p_\infty = 0,1$ МПа как функция частоты акустического поля.

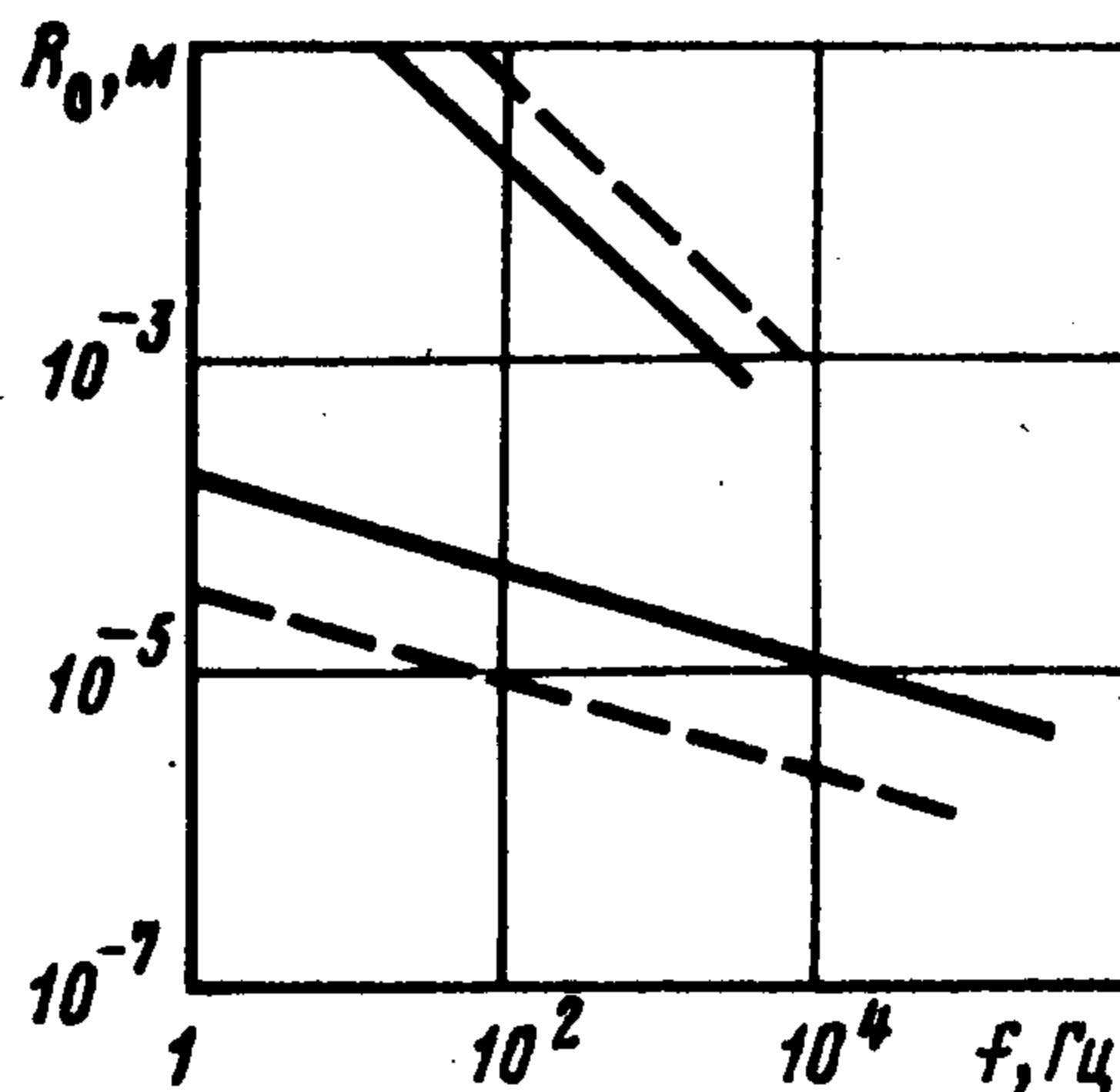
Расчеты показали, что для крупных паровых пузырьков (в воде при $p_\infty = 0,1$ МПа для $R_0 \geq 10^{-3}$ м) существует лишь миннаэрттовский резонанс, а для пузырьков $R_0 \lesssim 10^{-4}$ м — резонанс, вызванный капиллярными эффектами и фазовыми переходами. В промежуточной области существуют два слабых резонанса с малой добротностью, причем резонанс, обусловленный капиллярным эффектом и фазовыми переходами, реализуется при очень низких частотах акустического поля и имеет низкую добротность



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

по частоте. Штриховые кривые на фиг. 1 и 2 соответствуют случаю $\sigma = 0$. В этом случае при стремлении частоты поля или размера парового пузырька к нулю амплитуда колебаний его радиуса неограниченно растет, что можно интерпретировать как резонанс. Штрихпунктирные кривые соответствуют случаю газового пузырька. В этом случае второго резонанса нет. Расчеты показали, что, хотя основные формулы данной работы получены при некоторых ограничениях на теплофизические параметры системы, они справедливы не только для воды, но и для других жидкостей, в частности криогенных, в широком диапазоне давлений и температур. На фиг. 3 приведена зависимость амплитуды и фазы колебаний от радиуса парового пузырька при пульсациях его в

жидком азоте при атмосферном давлении на частоте $f = 100$ кГц. Видно, что на одну частоту откликаются два размера пузырька, а при малых R_0 имеем $\beta \approx 0$.

Отметим, что при фиксированном гидростатическом давлении в жидкости p_∞ учет поверхностного натяжения и требование, чтобы система жидкость — паровой пузырек при отсутствии акустического поля находилась в тепловом и механическом равновесии, приводят к тому, что температура жидкости вдоль кривых на фиг. 1, 3, строго говоря, переменна, так как $T_0 = T_S(p_0)$, $p_0 = p_\infty + 2\sigma/R_0$. Однако изменение температуры, например, для фиг. 3 в интервале 10^{-6} , 10^{-4} м составляет лишь 1,5 К.

На фиг. 4 приведены рассчитанные по формуле (1.3) зависимости резонансной частоты парового пузырька в воде и жидком азоте (соответственно сплошная и штриховая линия) от его радиуса при $p_\infty = 0,1$ МПа. Обе кривые имеют две ветви. Левые ветви кривых в области малых R_0 возникают лишь при совместном учете капиллярных эффектов и фазовых переходов. В интервале 10^{-5} м $\lesssim R_0 \lesssim 10^{-4}$ м расчетные зависимости хорошо согласуются с решением (1.22). Миннаэрттовский резонанс существует для $R_0 \gtrsim 10^{-4}$ м. Добротность миннаэрттовского резонанса, убывая с уменьшением R_0 , в области $R_0 \lesssim 10^{-4}$ м становится меньше единицы [10].

На фиг. 5 приведена зависимость резонансного размера пузырька от частоты поля в воде и жидком азоте при $p_\infty = 0,1$ МПа. В широком диапазоне частот функция $R_0(f)$ двузначная и обе ветви кривой хорошо описываются формулами (1.14) и (1.23). Кривые подтверждают отмечавшееся выше обстоятельство, что для каждой частоты акустического поля существует хотя бы один резонансный размер пузырька.

2. Свободные колебания. В случае малых свободных колебаний парового пузырька его радиус может быть описан действительной частью выражения

$$R = R_0 (1 + \delta e^{ht}), \quad |\delta| \ll 1$$

Характеристическое уравнение для этого случая получено в [1].

Для пузырьков в идеальной несжимаемой жидкости при состояниях, далеких от критических, когда $\rho_v \ll \rho_l$, оно имеет вид

$$(2.1) \quad \begin{aligned} H + 3\gamma NH/(H^2 - N\Sigma) + M &= 0 \\ H &= hR_0^2/a_v, \quad N = p_0 R_0^2/(\rho_l a_v)^2, \quad \Sigma = 2\sigma/(R_0 p_0) \\ M &= k(1 + EH^{1/2}) + 3(\gamma - 1)(1 - \kappa)^2(H^{1/2} \operatorname{cth} H^{1/2} - 1) \end{aligned}$$

В связи с установленным выше фактом существования двух резонансных размеров пузырька, а в некотором диапазоне размеров пузырька и двух резонансных частот естественно возникает вопрос о количестве собственных частот парового пузырька. Используя принцип аргумента аналогично тому, как это сделано в [11], можно показать, что учет неоднородности температуры в пузырьке даже в случае отсутствия фазовых переходов [12], когда характеристическое уравнение (2.1) упрощается и имеет вид

$$(2.2) \quad H + 3\gamma NH/(H^2 - N\Sigma) + 3(\gamma - 1)(H^{1/2} \operatorname{cth} H^{1/2} - 1) = 0$$

приводит к тому, что последнее имеет бесконечное число корней в левой полуплоскости ($\operatorname{Re} H < 0$). Это происходит из-за периодичности функции котангенса, описывающей распределение температуры в пузырьке [1, 12] и входящей в (2.2). Можно, однако, показать, что все корни уравнения (2.2), кроме двух комплексно-сопряженных, действительны и по абсолютной величине значительно превосходят действительную часть комплексных корней, показав тем самым корректность результатов [1, 12], где характеристические уравнения решались численно, а вопрос о числе и структуре корней не анализировался.

В случае однородного парового пузырька уравнение (2.1) можно привести к полиному

$$(2.3) \quad \begin{aligned} x^6 + kEx^5 + kx^4 + (3\gamma - \Sigma)Nx^2 - kEN\Sigma x - kN\Sigma &= 0 \\ x &= H^{1/2} \end{aligned}$$

Анализ показывает, что уравнение (2.3) имеет в левой комплексной полуплоскости H лишь пару комплексно-сопряженных корней, т. е. однородный паровой пузырек имеет лишь одну собственную частоту. В то же время в случае вынужденных колебаний в некотором диапазоне размеров амплитуда колебаний радиуса однородного парового пузырька имеет максимумы при двух частотах акустического поля.

Для очень мелких паровых пузырьков ($N \ll 1$) уравнения (2.1), (2.3) могут в некоторых случаях иметь действительные отрицательные корни ($H < 0$). Это означает, что второму резонансу, проявляющемуся при колебаниях мелких пузырьков, соответствует нулевая собственная частота.

Автор благодарит Седова Л. И. и Нигматулина Р. И. за ценные советы и внимание к работе, Айдагулова Р. Р. и Нагиева Ф. Б. за помощь в проведении расчетов, а Мигулина В. В. и Юшина В. П. за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хабеев Н. С. Эффекты теплообмена и фазовых переходов при колебаниях паровых пузырьков.— Акуст. ж., 1975, т. 21, № 5, с. 815.
2. Wang T. Effects of evaporation and diffusion on an oscillating bubble.— Phys. Fluids, 1974, v. 17, No. 6, p. 1121.
3. Minnaert M. On musical air-bubbles and the sound of running water.— Philos Mag. Ser. 7, 1933, v. 16, No. 104, p. 235.
4. Finch R. D., Neppiras E. A. Vapor bubble dynamics.— J. Acoust. Soc. Amer., 1973, v. 53, No. 5, p. 1402.
5. Hsieh D. Y. Resonances of oscillating vapor bubbles.— Phys. Fluids, 1976, v. 19, No. 4, p. 599.
6. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
7. Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С. Динамика паровых пузырьков.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 3, с. 59.
8. Macedo I. C., Yang W. J. Acoustically forced oscillations of gas bubbles in liquids.— Japan. J. Appl. Phys., 1972, v. 11, No. 8, p. 1124.
9. Хабеев Н. С. Резонансные свойства паровых пузырьков.— В кн.: Докл. 9-й Всес. акуст. конф. Сер. Б. М.: Изд-е Акуст. ин-та АН СССР, 1977, с. 95.
10. Акуличев В. А. Ультразвуковые волны в жидкости с паровыми пузырьками.— Акуст. ж., 1975, т. 21, № 3, с. 351.
11. Айдагулов Р. Р., Хабеев Н. С., Шагапов В. Ш. Структура ударных волн в жидкости с пузырьками газа с учетом нестационарного межфазного теплообмена.— ПМТФ, 1977, № 3, с. 67.
12. Chapman R. B., Plesset M. S. Thermal effects in the free oscillation of gas bubbles.— Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Engr., 1971, v. 93, No. 3, p. 373.

Москва

Поступила в редакцию
30.VI.1980