

УДК 541.24:532.5

ГИДРОДИНАМИКА ПРОЦЕССА ОБРАЗОВАНИЯ ПЕНЫ ИЗ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ

В о и н о в О. В.

Рассматривается процесс расширения большого числа газовых пузырьков в несжимаемой вязкой жидкости. Для достаточно малых скоростей определяется форма свободных границ. Исследуется формирование жидких пленок при сближении двух газовых пузырьков. В модели правильной упаковки пузырей рассчитан процесс их деформаций и образования пленок.

Основы термодинамики и статических моделей пен были заложены в трудах Гиббса, Плато и Релея [1—3]. Гидродинамика пен изучена мало.

1. Постановка задачи. Пусть в несжимаемой вязкой жидкости находится большое число газовых пузырей одного и того же объема V , растущего со временем из-за расширения газа или за счет выделения газа из жидкости. Считаем функцию $V(t)$ известной. Задача состоит в определении формы свободных границ в зависимости от времени. Необходимо определить, как образуются жидкие пленки, какова их форма и толщина.

Можно попытаться построить приближенное описание задачи в случае достаточно малых скоростей изменения объемов пузырьков, когда малы капиллярное число и число Вебера

$$(1.1) \quad \frac{\mu}{\sigma} \frac{dR_v}{dt} \ll 1, \quad \frac{\rho R_v}{\sigma} \left(\frac{dR_v}{dt} \right)^2 \ll 1$$

(R_v — радиус сферы объема V). Тогда на начальной стадии роста пузырьков, пока расстояние между их границами не мало по сравнению с радиусами, их форма мало отличается от сферы. Условия (1.1) выражают малость динамических напряжений по сравнению с капиллярными силами. При малых числах Рейнольдса $(dR/dt)R/\nu$ достаточно принять одно первое условие (1.1).

Если расстояние между поверхностями значительно меньше радиусов, $h \ll R$, то в области наибольшего сближения границ применимо приближение тонкого слоя. Динамика пленки, симметричной относительно плоскости x_1, x_2 , описывается уравнениями [4]:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} h\rho dv_i/dt &= hF_i + h\nabla_i (1/2\sigma\Delta h + \Pi) + 2\nabla_j P_{ij}^{(s)} + \\ &+ \nabla_j [h\mu (2\delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{v} + \nabla_i v_j + \nabla_j v_i)]; \quad i, j = 1, 2 \\ 6\mu u_i &= -h\nabla_j P_{ij}^{(s)}, \quad P_{ij}^{(s)} = \sigma\delta_{ij} + \lambda_s \operatorname{div} \mathbf{v}\delta_{ij} + \mu_s (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) \\ \operatorname{div} (hu + hv) &= -\partial h/\partial t \end{aligned}$$

Здесь v — скорость поверхности, u — средняя по сечению пленки скорость жидкости относительно поверхности, σ — коэффициент поверхностного натяжения, Π — расклинивающее давление (см., например,

[5]), μ_s, λ_s — коэффициенты вязкости поверхностного слоя. Уравнения (1.2) верны при условиях, что толщина слоя медленно изменяется вдоль координат, $h \ll l$, где l — характерный масштаб изменения h и параметров течения, приведенное число Рейнольдса $h^2 u / (\nu l) \ll 1$, характерное время $\tau \gg h^2 / \nu$. Сила тяжести действует вдоль пленки либо протяженность пленки достаточно мала $r \ll \sigma / (R \rho g)$ и искривления ее срединной поверхности не существенны.

Уравнения замыкаются дополнительными соотношениями для определения значений поверхностного натяжения σ , переменных из-за влияния поверхностно-активных веществ. Будем считать это влияние столь значительным, что изменения элемента площади поверхности пленки не зависят от ее динамики. Этому соответствует постоянная вдоль поверхности скорость расширения поверхности, $\text{div } \mathbf{v} = \text{const}$. При этом первое уравнение (1.2) будет аналогично уравнению Навье—Стокса, а уравнение неразрывности будет служить для определения толщины h . По сравнению с плоской задачей для уравнения Навье—Стокса для определения движения здесь на границе необходимо задать два дополнительных скалярных условия, потому что уравнения имеют четвертый порядок по h . Например, вдоль некоторой линии Γ могут быть заданы четыре значения $v_1, v_2, h, \Delta h$.

Граничные условия для уравнений (1.2) в рассматриваемой задаче заранее неизвестны. Они должны быть определены из условия сращивания решения с решением уравнений в области больших расстояний между поверхностями пузырьков.

Форма свободной поверхности на достаточном удалении от поверхности соседнего пузырька (внешняя область) при условиях (1.1) описывается уравнением равновесия

$$(1.3) \quad \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = p_\sigma = p_g - p_f^{(0)} + \rho (U - U_{(0)})$$

Здесь p_σ — разность давлений в газе p_g и в жидкости p_f , U — потенциал внешних массовых сил, индекс (0) соответствует некоторой точке поверхности, R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны.

Уравнение (1.3) может быть нарушено в области малых расстояний между поверхностями пузырьков, где необходимо рассматривать (1.2). Пусть пленка между пузырьками имеет протяженность r , значительно превосходящую ее толщину, а также величину \sqrt{Rh} . Тогда можно ввести границу пленки Γ — плоский контур, вдоль которого расстояние между поверхностями пузырей обращается в нуль по отношению к большому характерному значению этого расстояния R во внешней области.

Если поверхность пузырька подходит к краю пленки под достаточно малым углом α , то приближение тонкого слоя пригодно не только внутри контура Γ , но и в некоторой области вне его. На границе внешней области Γ для уравнения (1.3) должны быть заданы условия

$$(1.4) \quad h|_\Gamma = 0, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial n} |_\Gamma = \text{tg } \alpha$$

Для определения движения пленки необходимо потребовать, чтобы вне Γ в пределе $h/h_0 \rightarrow \infty$ величина h стремилась к решению следующего

уравнения с граничным условием на Γ :

$$(1.5) \quad \frac{1}{2}\sigma\Delta h = p_\sigma, \quad h|_\Gamma = 0$$

Это соответствует заданию двух граничных условий для (1.2). Еще два условия получатся из условия сращивания скорости v со значениями во внешней области.

2. Скачок капиллярного давления. В естественных безразмерных обозначениях в граничном условии (1.5)

$$(2.1) \quad h = h_0 h', \quad x = lx', \quad l = \sqrt{h_0 \sigma / (2p_\sigma)}$$

где h_0 — малая толщина пленки внутри Γ , появляется малый масштаб $l \sim \sqrt{Rh}$. Величина $l \ll r$, потому что собственно пленка существует только при этом условии [4, 6]. Переход от внешней области к собственно пленке (внутренняя область) происходит в узкой области, т. е. имеется скачок.

Анализируя первое уравнение (1.2) в переменных малого масштаба (2.1) и опуская малые величины порядка числа Вебера, h^2/l^2 , l/r и l/R , получим

$$(2.2) \quad h \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \Pi \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} P_{xx}^{(s)} = 0, \quad P_{xx}^{(s)} = \sigma + (\lambda_s + 2\mu_s) \frac{\partial v_n}{\partial x}$$

Можно показать, что изменение поверхностного натяжения вдоль пленки мало, $\Delta\sigma \ll \sigma$. Поэтому в условии для нормального напряжения на поверхности коэффициент $\sigma = \text{const}$.

Уравнение (2.2) допускает интеграл

$$(2.3) \quad 2\sigma + \frac{\sigma h}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\sigma}{4} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \int h \frac{\partial \Pi}{\partial h} dh + 2(\lambda_s + 2\mu_s) \frac{\partial v_n}{\partial x} = \text{const}$$

Касательная к Γ скорость на скачке всегда непрерывна $v_\tau = \text{const}$, как это можно видеть из теоремы сохранения импульсов в интегральной форме.

Для уравнения неразрывности в (1.2) на скачке, как и в (2.2), достаточно одномерной аппроксимации. Вычисляя значение u , найдем (x — расстояние по нормали к Γ):

$$(2.4) \quad \frac{\partial h}{\partial t} - w_n \frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} (hw_n) - \frac{\sigma}{24\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3 \partial^3 h}{\partial x^3} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right)$$

Уравнение записано в системе, движущейся по нормали к Γ вместе с точкой $x = 0$ контура Γ ; величина w_n — нормальная скорость точки контура Γ . Для замыкания системы (2.2), (2.3) необходимо либо указать уравнения, связывающие σ с параметрами движения, и считать v_n переменной, либо рассмотреть случай несжимаемой поверхности. В последнем случае замыкающее соотношение: $v_n = \text{const}$ по координате.

Условие сращивания решения с решением задачи во внутренней области

$$(2.5) \quad h \rightarrow h_0, \quad x/l \rightarrow -\infty$$

Условие перехода к внешнему решению записывается на основе (1.5)

$$(2.6) \quad h \rightarrow h^{(e)}, \quad x/l \rightarrow \infty$$

причем в силу (1.5) и определения линии Γ внешнее решение равно

$$(2.7) \quad h^{(e)} = \begin{cases} (p_\sigma/\sigma) x^2 + h_{\min}^{(e)}, & h_{\min}^{(e)} > 0 \\ (p_\sigma/\sigma) x^2 + 2 \operatorname{tg} \alpha x, & h_{\min}^{(e)} < 0 \end{cases}$$

Линия Γ определяется как линия равенства нулю толщины $h^{(e)}$ или как линия минимума этой толщины ($h_{\min}^{(e)} = O(h_0)$).

Изменение σ вдоль скачка и полное изменение σ на скачке запишем на основании (2.3), (2.5) и (2.6), не учитывая для краткости поверхностную вязкость

$$(2.8) \quad \sigma - \sigma_{(e)} + \frac{\sigma}{4} h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\sigma}{8} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \int_h^\infty h \frac{\partial \Pi}{\partial h} dh = \Delta$$

$$\sigma_{(i)} - \sigma_{(e)} = \Delta + \frac{1}{2} \int_{h_0}^\infty h \frac{\partial \Pi}{\partial h} dh$$

$$\Delta = 1/2 h_{\min}^{(e)} p_\sigma, \quad \Delta > 0; \quad \Delta = -1/2 \sigma \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad \Delta < 0$$

При образовании пленки, когда контур Γ расширяется ($w_n > 0$) или когда контур Γ неподвижен и происходит утоньшение пленки [6], поверхность пленки внутри контура Γ обычно более растянута, чем снаружи, так что в соответствии с [1] величина $\sigma_{(i)} > \sigma_{(e)}$. При этом, как видно из (2.7) и (2.8) для случая $\Pi \approx 0$, внешняя поверхность подходит по касательной к пленке на масштабе R , величина угла $\alpha \equiv 0$ в граничном условии (1.4).

Угол $\alpha \neq 0$ возможен только при $\Delta < 0$, когда $\sigma_{(i)} < \sigma_{(e)}$. При $\Pi \approx 0$ (пленка макроскопической толщины) это обычно возможно при сжатии поверхности внутри Γ . Однако даже в том случае, когда угол α можно определить из уравнений скачка ($\sigma_{(i)} < \sigma_{(e)}$), его значение остается пренебрежимо малым для постановки задачи равновесия (1.3), если справедливо приближение тонкого слоя.

Важно, что в силу (2.8) малым значениям толщин пленок h_0 и малым углам α всегда соответствуют малые значения изменения поверхностного натяжения на скачке: $\Delta \sim h_0 p_\sigma$ или $\Delta \sim \sigma \alpha^2$.

Квазистационарное приближение. Переходя к безразмерным обозначениям (2.1) и времени $t' = t/\tau$, где τ — временной масштаб изменения контура Γ и капиллярного давления p_σ , найдем условие справедливости квазистационарного приближения: $\tau |v_n - w_n| \gg l$. Характерные время τ , масштаб s и скорость w_n перемещения контура Γ связаны, $s \sim w_n \tau$, поэтому последнее условие эквивалентно неравенству

$$(2.9) \quad l/s \ll (w_n - v_n)/w_n$$

Это выполнено, если скорость движения контура Γ меняется на большом расстоянии $s \gg l$ и если относительная скорость не слишком мала по сравнению с w_n . При образовании пленки ее размер $r \gg l$ и условие (2.9) должно быть выполнено ($s \sim r$).

Пренебрегая явной зависимостью от времени в (2.4), получим с учетом (2.5)

$$(2.10) \quad w_n (h - h_0) = v_n h - v_{n0} h_0 + \frac{\sigma}{24\mu} h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial \Pi}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x}$$

Здесь v_{n0} — значение v_n на границе внутренней области (при $x/l \rightarrow -\infty$), v_n — вообще говоря, переменная величина.

Рассмотрим предельный случай несжимаемой поверхности, $v_n = \text{const}$. Ограничимся также макроскопической по толщине пленкой, $\Pi = 0$ (для $\Pi \neq 0$ аналогичные задачи рассмотрены в [6]). Замена переменных (2.1) в (2.10), (2.5), (2.7), причем так, что

$$(2.11) \quad l = \sqrt{\frac{\sigma h_0}{2p_\sigma}} = \frac{h_0}{\sqrt{c}} \left(\frac{\sigma}{24\mu (w_n - v_n)} \right)^{1/3}$$

где величина c пока неизвестна, приводит к следующей задаче определения неизвестной c :

$$y^3 y''' - y + 1 = 0, \quad y|_{-\infty} = 1, \quad y''|_{+\infty} = c$$

Аналогичная задача рассмотрена в [3] для стационарного течения. Численный расчет дает $c = 0,6429$ и из (2.11) следует

$$(2.12) \quad h_0 = 2,675 \frac{\sigma}{p_\sigma} \left(\frac{\mu (w_n - v_n)}{\sigma} \right)^{2/3}, \quad w_n - v_n > 0$$

Если выполнено последнее неравенство, то толщина пленки определяется единственным образом, в противном случае имеется один произвольный параметр в решении, соответствующий тому, что значение h_0 во внутренней области уже не определяется, а задается.

3. Уравнения вне скачка. Рассмотрим области внутри и вне контура Γ . Размер внутренней области много больше масштаба, $r \gg l$. Масштаб изменения функций по координате во внутренней области равен r , по времени $\sim r/w$, характерное значение толщины $\sim h_0$. Сравнение с учетом этого уравнения (1.2) во внутренней области с уравнением на скачке (2.2) дает, что с точностью до малых $\sim l^2/r^2$ можно опустить вклад Δh в (1.2). Опуская также малые величины порядка числа Вебера, запишем

$$(3.1) \quad hF_i + h\nabla_i \Pi + 2\nabla_j P_{ij}^{(s)} = 0$$

Если малы массовые силы ($\rho g r R \ll 2\sigma$) и поверхностные вязкие напряжения, то (3.1) интегрируется

$$(3.2) \quad 2\sigma + \int h \frac{\partial \Pi}{\partial h} dh = \text{const}$$

Для макроскопических пленок интегралом в (3.2) следует пренебречь, и поверхностное натяжение во внутренней области постоянно. Изменение натяжения $\Delta\sigma_{(i)}$ асимптотически мало по сравнению с изменением натяжения на скачке Δ :

$$(3.3) \quad \Delta\sigma_{(i)} = O\left(\frac{l^2}{r^2} \Delta\right), \quad \Delta = (\sigma_{(i)} - \sigma_{(e)})|_\Gamma$$

Отметим, что уравнение (3.1) может нарушаться в некоторых участках внутренней области, где $h \gg h_0$.

Уравнение сохранения массы

$$(3.4) \quad \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\sigma}{24\mu} \text{div}(h^3 \text{grad} \Delta h) - \text{div}(vh)$$

упрощается, если имеется малый параметр

$$(3.5) \quad \Omega = \frac{h_0^3}{s^4} \frac{\sigma\tau}{24\mu} \ll 1$$

Здесь s — масштаб изменения параметров движения контура пленки Γ , τ — соответствующее время изменения ($\tau \sim s/w_n$). В области масштаба s уравнение (3.4) в главном приближении по малому параметру Ω примет вид

$$(3.6) \quad \partial h / \partial t = -\operatorname{div} (h \mathbf{v})$$

Уравнение (3.6) определяет толщину пленки во внутренней области, где $s \sim r$. Условие (3.5) можно представить в более удобной форме, если учесть (2.11)

$$(3.7) \quad \Omega \sim \frac{l^3}{s^3} \frac{w_n - v_n}{w_n} \ll 1$$

Так как $|w_n - v_n| \lesssim |w_n|$, то условие (3.7) выполнено, если справедливо условие квазистационарности скачка (2.9).

Во внешней к контуру Γ области, где расстояние между свободными границами велико, движение определяется уравнениями Навье — Стокса в области с границей, заданной уравнениями равновесия (1.3). Учитывая, что масштаб изменения функций имеет порядок размера области R , оценим максимальную величину изменения поверхностного натяжения σ под действием касательного напряжения

$$(3.8) \quad \Delta \sigma_{(e)} \sim \mu v \sim \sqrt{h/R} (\sigma_{(i)} - \sigma_{(e)})|_{\Gamma} \ll (\sigma_{(i)} - \sigma_{(e)})|_{\Gamma}$$

Из (3.8) следует, что для тонких пленок натяжение во внешней области постоянно, $\sigma_{(e)} = \text{const}$. Таким образом, основное изменение поверхностного натяжения имеет место в области скачка. При этом в силу (3.3) величина $\sigma_{(i)} - \sigma_{(e)}$ вдоль Γ постоянна. Это дополнительное условие, налагаемое на решение на скачке, приводит к постоянству основных параметров вдоль границы пленки, если $w_n - v_n > 0$:

$$(3.9) \quad (w_n - v_n)|_{\Gamma} = \text{const}, \quad h_0|_{\Gamma} = \text{const}$$

В этом случае величина $h_0|_{\Gamma}$ определяется, если известна величина $w_n - v_n$. В случае, если на Γ величина $w_n - v_n < 0$, решение на скачке включает дополнительный параметр и величина h_0 может изменяться вдоль Γ и может считаться задаваемой.

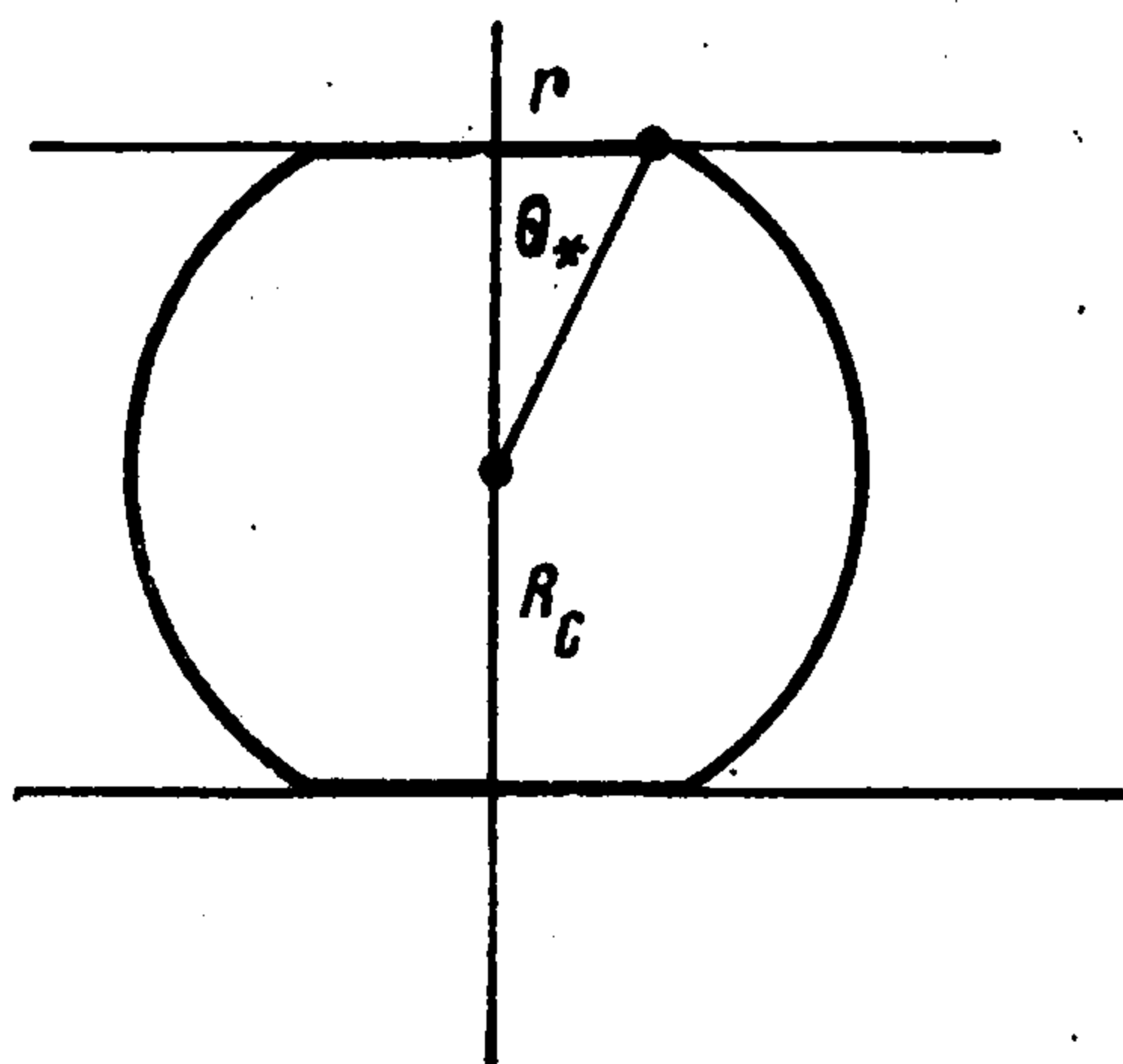
Движение жидкости во внешней области вызывается изменением формы свободной поверхности, описываемой квазистатическим уравнением (1.3) с переменными параметрами. Движение зависит от значений нормальной скорости поверхности $v_n^{(e)}$ на линии возврата свободной поверхности Γ . Касательная скорость на Γ должна быть ограниченной, она определяется из решения задачи, если поверхностная вязкость равна нулю. Если поверхностная вязкость отлична от нуля, то касательную скорость на Γ следует задавать.

4. Замыкающие соотношения. В общем случае необходимо рассматривать уравнения переноса поверхностно-активных веществ, привлекать изотермы адсорбции и поверхностного натяжения. Но в важных предельных случаях можно обойтись без этих уравнений. Если влияние поверхностно-активных веществ велико и поверхность несжимаема по отношению

к воздействиям вязких напряжений, причем свойства поверхности пленки по отношению к изменению ее площади не отличаются от свойств поверхности жидкости бесконечной глубины, то скорость изменения элементов площади поверхности будет всюду постоянной и соответствующей скорости изменения площади поверхности пузырька S . В частности, в области пленки

$$(4.1) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = S^{-1} dS/dt$$

Во втором случае поверхностное натяжение в области пленки из-за ее малой толщины может намного более сильно зависеть от изменений эле-



Фиг. 1

мента площади, чем в случае поверхности жидкости бесконечной глубины. Тогда элементы площади поверхности пленки изменяться не будут

$$(4.2) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

Формулы (1.3), (1.4) с $\alpha = 0$, (2.10) или в случае несжимаемой поверхности (2.12), (3.6) и (3.9), а также (4.1) или (4.2) дают замкнутое описание в случае одномерной задачи. В неоднородной задаче эти формулы позволяют определить полное количество жидкости в пленке и толщину вдоль

ее края в зависимости от времени в процессе ее формирования.

5. Форма поверхности во внешней области. В системе с плотноупакованными пузырями малой деформации сферического пузыря отвечает малый радиус контура Γ площади контакта. При этом пленка имеет малый размер. Так имеет место, в частности, в начале образования любой пленки.

Используя малость деформаций, рассмотрим линеаризованную задачу о сжатии пузыря фиксированного объема V силами F_α ($\alpha = 1, 2, \dots, 2N$), направленными вдоль радиуса и представляющими результирующие однородного дополнительного давления p_σ , приложенного на малых плоских площадках радиуса r :

$$|F_\alpha| = \pi r^2 p_\sigma; \quad F_\alpha = -F_{\alpha+N}, \quad \alpha = 1, \dots, N$$

Нормальное перемещение поверхности пузыря

$$(5.1) \quad U = \sum_{\alpha=1}^N U_\alpha$$

где U_α — перемещение, вызванное сжатием пузыря между двумя плоскостями силами $F_\alpha, F_{\alpha+N}$.

Далее рассматриваются достаточно малые пузыри, когда можно не учитывать возмущение их формы силой тяжести ($\rho g R^2 \ll 2\sigma$).

Задача о деформации пузыря между двумя плоскостями обладает осевой симметрией (фигура), поэтому в полярных координатах R, θ в области $\theta \in (\theta_*, \pi - \theta_*)$ уравнение (1.3) примет вид

$$(5.2) \quad \frac{R^2 + 2R_\theta'^2 - RR_{\theta\theta}''}{(R^2 + R_\theta'^2)^{3/2}} + \frac{1 - \operatorname{ctg} \theta R_\theta'/R}{(R^2 + R_\theta'^2)^{1/2}} = \frac{p_\sigma}{\sigma} = \operatorname{const}$$

Функция $R(\theta)$ должна быть симметричной относительно $\pi/2$, $R(\theta - \pi/2) = R(-\theta + \pi/2)$, а при $\theta = \theta_*$ наклон касательной равен нулю. Следовательно

$$(5.3) \quad \operatorname{ctg} \theta R_{\theta}' = R, \quad \theta = \theta_*, \quad R(\theta_*) \cos \theta_* = R_c$$

Здесь R_c — половина расстояния между плоскостями. Величина объема пузыря задана

$$\frac{2\pi}{3} \int_{\theta_*}^{\pi-\theta_*} R^3 \sin \theta d\theta = V$$

Для малых деформаций пузырька $|R_{\theta}'/R| \ll 1$ и величина R близка к R_0 :

$$R = R_0 + \delta, \quad |\delta| \ll R_0, \quad R_0 = 2\sigma/p\sigma$$

Уравнение (5.2) в линейном приближении

$$\delta_{\theta}'' + \delta_{\theta}' \operatorname{ctg} \theta + 2\delta = 0$$

имеет решение, симметричное относительно $\pi/2$

$$\delta = a \left(\frac{\cos \theta}{2} \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} - 1 \right)$$

С учетом (5.3)

$$a = -R_c \theta_*^2, \quad R_0 = R_c (1 + \theta_*^2 \ln(2/\theta_*) - 1/2 \theta_*^2)$$

В формулах учитываются только асимптотически главные при $\theta_* \rightarrow 0$ члены. Величины R_0 и R_c выражаются через радиус сферы эквивалентного объема $R_v = (3V/(4\pi))^{1/3}$:

$$(5.4) \quad R_0 = (1 - 1/3 \theta_*^2) R_v, \quad R_c = (1 - \theta_*^2 \ln(2/\theta_*) + 1/6 \theta_*^2) R_v$$

Нормальное перемещение площади контакта равно

$$(5.5) \quad U_{\alpha} = R_c - R_v = (1/6 \theta_*^2 - \theta_*^2 \ln(2/\theta_*)) R_v \quad (\theta < \theta_*)$$

Нормальное перемещение поверхности вдали от площади контакта

$$(5.6) \quad U_{\alpha} = - \left(\frac{\cos \theta}{2} \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} - \frac{2}{3} \right) \theta_*^2 R_v \quad (\theta \geq \theta_*)$$

Линеаризованное уравнение отличается от точного (5.2) на малую при $\theta_* \rightarrow 0$ величину порядка $\theta_*^2 \ln(1/\theta_*)$.

6. Образование пленок в правильной упаковке пузырей. Пусть центры пузырей расположены в узлах правильной решетки, отдельная ячейка с пузырем является двенадцатигранником. По мере расширения газовых пузырей система жидкость плюс пузыри испытывает однородное расширение. При симметричном расположении пузырей, при малых числах Рейнольдса вязкие силы будут действовать симметрично, с нулевой результирующей силой и не вызовут относительных перемещений пузырей.

В ромбододекаэдре (все грани — ромбы) нормаль к грани образует угол 60° с линиями нормалей четырех пар противоположных граней и угол 90° с одной такой линией. Поэтому из формул (5.1), (5.5) и (5.6) перемещение площадки контакта равно

$$(6.1) \quad U = R_c - R_v = - \left(\ln \frac{6R_v}{r} - \frac{7}{2} \right) \frac{r^2}{R_v}$$

Учитывая, что объем ячейки $4\sqrt{2}R_c^3$ равен $V + V_*$, где V_* — объем жидкости, найдем из (6.1)

$$(6.2) \quad \frac{dr}{dt} = \frac{R_v(1 - \pi/3\sqrt{2})}{2r(\ln(6R_v/r) - 4)} \frac{dR_v}{dt}$$

Для малых значений r скорость v_n на Γ , определяемая расширением поверхности пузыря, имеет малый порядок r , поэтому

$$(6.3) \quad (w_n - v_n)|_{\Gamma} = dr/dt + O(rR_v/R_v)$$

Из (6.2), (6.3) и (2.12) следует формула для толщины образующейся пленки в зависимости от расстояния до ее центра

$$(6.4) \quad h_0 = 0,685R_v \left(\frac{\mu}{\sigma} \frac{dR_v}{dt} \right)^{2/3} \left(\frac{R_v/r}{\ln(6R_v/r) - 4} \right)^{2/3}$$

Из (6.4) следует, что толщина пленки существенно изменяется вдоль радиуса, в центре пленка сильно утолщена. Максимальная толщина определяется условием, когда появляется скачок, $\sqrt{h_0 R_v} \sim r$. Отсюда же находится характерный минимальный размер r , с которого образуется пленка. По порядку величины

$$\max h_0 \sim R_v \left(\frac{\mu}{\sigma} \frac{dR_v}{dt} \right)^{1/2}, \quad \min r \sim R_v \left(\frac{\mu}{\sigma} \frac{dR_v}{dt} \right)^{1/4}$$

Из (6.4) вытекает, что для получения толстых пленок должна быть достаточно велика скорость сближения поверхностей пузырьков в момент их столкновения. Чем выше скорость выделения газа, тем больше толщина получающихся пленок. В той же мере влияет вязкость жидкости μ .

7. Формирование пленок в развитой пене. В предельном случае сильно деформированных пузырей жидкость сосредоточена в узких нитях (канала Плато — Гиббса) вдоль ребер многогранников. За исключением вершин, всюду один радиус кривизны много меньше второго, $R_1 \ll R_2$. С учетом (1.3) для $\rho g R_1^2 \ll \sigma$ и (1.4) с углом $\alpha = 0$ (п. 2) следует, что в сечении поверхность каналов представляет три соприкасающихся окружности одного радиуса R_1 , так же, как это имеет место в статической задаче [1, 3].

Входящие в формулы объемы жидкости в ячейке V_* и объем пузырька V удобно также представлять через начальное значение n_0 (когда $V = 0$) или текущее значение n числа пузырей в единице объема, а также через объемную долю жидкости γ :

$$(7.1) \quad n_0 V_* = 1, \quad n(V + V_*) = 1, \quad \gamma = V_*/(V + V_*), \quad n = \gamma n_0$$

Рассмотрим пену с ячейками в виде правильных многогранников. При $R_1 \ll R_v$ для половины расстояния между противоположными пленками в ячейке R_c и объема жидкости в ячейке приближенно имеем

$$R_c = \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{6} \right)^{1/3} R_v + O\left(\frac{R_1^2}{R_v} \right), \quad V_* = 6\sqrt{2} \left(1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \right) R_1^2 R_c$$

Для случая, когда расширение поверхности пленки происходит со скоростью расширения поверхности газового пузыря (п. 4), подсчет дает

$$(7.2) \quad (w_n - v_n)|_{\Gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{R_1}{R_v} \frac{dR_v}{dt}, \quad R_v = \left(\frac{3}{4\pi} V \right)^{1/3}$$

Для случая нерастяжимой пленки (п. 4)

$$(7.3) \quad (w_n - v_n)|_{\Gamma} = \left(\frac{(\pi/3\sqrt{2})^{1/3}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{R_1}{R_v} \right) \frac{dR_v}{dt}$$

Формулы (7.2) или (7.3) и (2.12) дают выражение для толщины формируемой пленки, отличающееся от (6.4) тем, что переменность толщины связана теперь только с изменением со временем R_1/R_v и R_v . В случае (7.2) изменение толщины происходит также за счет однородного расширения пленки.

Важно, что в случае нерастяжимой поверхности пленки (7.3) ее толщина получается значительно больше (в $\sim (R_v/R_1)^{2/3}$ раз), чем в случае всюду однородно расширяющейся поверхности пузыря (7.2).

Формирование пленок заканчивается, когда скорость R_v падает настолько, что условие (2.9) перестает выполняться. После этого необходимо решать задачу утоньшения пленки [6].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Gibbs J. W.* Collected works, V. 1. New York: Longmans Green, 1931, 434 p.
2. *Rayleigh J. W.* Scientific papers. V. 3. Cambridge; Univ. Press, 1902, 596 p.
3. *Mysels K. J., Shinoda K., Frankel S.* Soap films. London: Pergamon Press, 1959. 116 p.
4. *Воинов О. В.* Уравнения движения свободных жидких пленок и модель их плоско-параллельного утоньшения.— Докл. АН СССР, 1974, т. 216, № 2, с. 285.
5. *Зонтаг Г., Штрэнге К.* Коагуляция и устойчивость дисперсных систем. Л.: Химия, 1973. 151 с.
6. *Воинов О. В.* К теории утоньшения свободных пленок вязкой жидкости.— ПМТФ, 1974, № 3, с. 67.

Москва

Поступила в редакцию
19.XII.1980