

УДК 536.46

ЗАЖИГАНИЕ ПЛОСКОГО КЛИНА НАКАЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Берман В. С., Шевцова В. М.

Предложен метод асимптотического анализа количественных характеристик процесса зажигания неплоских областей, занятых реагирующей средой. Для учета влияния шероховатости реагирующих поверхностей исследуется модельная задача зажигания плоского клина, грани которого поддерживаются при одинаковой постоянной температуре.

Предполагается, что энергия активации химической реакции достаточно велика, что справедливо для большинства экзотермически реагирующих веществ.

В тепловой теории зажигания накаленной поверхностью классическими являются задачи, в которых не учитывается многомерность зажигаемых образцов горючего вещества [1, 2]. Обычно изучается зажигание полупространства, занимаемого реагирующей средой, температура поверхности которой поддерживается постоянной. Однако в реальных системах поджигаемая поверхность реакционной среды может иметь различные неровности (выступы, царапины и т. п.), которые играют роль лидеров или аутсайдеров при протекании процесса. Для выступов условия зажигания более благоприятны, чем для плоских участков поверхности зажигания, так как поток тепла от боковых поверхностей направлен внутрь выступа. Для углублений на поверхности реагирующей среды характерна противоположная ситуация.

1. Основные уравнения. Рассматривается двумерная область в форме клина с углом раствора α , заполненная веществом, способным к химическому экзотермическому превращению. На поверхности клина поддерживается температура T_+ . Определим характеристики зажигания и распределения температуры в клиновидной области, занятой реагирующим веществом. Пренебрегая выгоранием реагентов, представим задачу, описывающую распределение температуры в угле, в виде

$$(1.1) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \Delta \Theta + \varepsilon^{-1} \exp \left[\frac{\varepsilon^{-1} (1 + \sigma) (\Theta - 1)}{\Theta + \sigma} \right]$$

$$(1.2) \quad \Theta(0, \eta, \varphi) = \Theta(t, \infty, \varphi) = 0$$

$$\Theta(t, \eta, 0) = \Theta(t, \eta, \alpha) = 1$$

$$\Theta = \frac{T - T_-}{T_+ - T_-}, \quad t = \frac{t'}{\Delta t}, \quad X = \frac{x'}{\Delta x}, \quad Y = \frac{y'}{\Delta x}, \quad \eta = \frac{\rho}{\Delta x}$$

$$(\Delta x)^2 = \frac{\lambda}{\rho c \Delta t}, \quad \Delta t = \frac{E(T_+ - T_-)}{T_+^2 k Q} \exp \left(\frac{E}{RT_+} \right)$$

$$\varepsilon = \frac{RT_+^2}{E(T_+ - T_-)}, \quad \sigma = \frac{T_-}{T_+ - T_-}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Здесь x' и y' — ортогональные декартовы координаты, ось x' совпадает с одной из сторон клина, α — угол раствора клина, ρ' и φ — полярные координаты, t' — время, T — температура, ρ — плотность, c — тепло-

емкость, λ — теплопроводность, Q — тепловой эффект химической реакции, E — энергия активации, k — предэкспоненциальный множитель, R — газовая постоянная.

Предположим, что $0 < \varepsilon \ll 1$ и $RT_+/E \ll 1$. Будем искать решение системы (1.1)—(1.2) в виде

$$(1.3) \quad \Theta(t, \eta, \varphi, \varepsilon) = \Theta_i(t, \eta, \varphi) + U(t, \eta, \varphi, \varepsilon)$$

Здесь Θ_i — решение инертной задачи $\partial\Theta_i/\partial t = \Delta\Theta_i$ с начальными и граничными условиями (1.2), которое имеет вид [3] ($J_\nu(Z)$ — функция Бесселя)

$$\Theta_i(t, \eta, \varphi) = 1 - \frac{4}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \sin[(2n+1)\nu\varphi] \int_0^{\infty} \xi^{-1} \exp(-\xi^2) \times \\ \times J_{(2n+1)\nu}(\xi\eta t^{-1/2}) d\xi, \quad \nu = \frac{\pi}{\alpha}$$

В частности, при $\alpha = \pi/2$ ($\nu = 2$)

$$(1.4) \quad \Theta_i(t, X, Y) = 1 - \operatorname{erf}(X/2\sqrt{t}) \operatorname{erf}(Y/2\sqrt{t}) \\ \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-s^2) ds$$

Функция U является решением задачи

$$(1.5) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \Delta U + \varepsilon^{-1} \exp\left[\frac{(1+\sigma)(\Theta_i + U - 1)}{\varepsilon(\Theta_i + U + \sigma)}\right] \\ U(0, \eta, \varphi) = U(t, \infty, \varphi) = U(t, \eta, 0) = U(t, \eta, \alpha) = 0$$

Наиболее интенсивно реакция протекает при $0 < \alpha < \pi$, поэтому будем исследовать область изменения параметров $1 \leq \nu$.

При $\nu = 1$ задача сводится к исследованию зажигания плоской накаливаемой поверхностью, выполненному в работах [1, 2]. Асимптотическое исследование этой задачи¹ показывает, что вид решения (1.1)—(1.2) существенно меняется при $t > t_i$, где

$$(1.6) \quad t_i(\varepsilon) = (2\pi)^{-1} + o(1)$$

Указанное время принимается за время зажигания. Подобная ситуация возникает и при $1 < \nu$ на достаточно большом удалении от вершины клина.

Наиболее естественным образом за время зажигания клина можно принять момент времени, при котором температура в какой-либо внутренней точке клина превысит единицу.

В окрестности вершины возможно ускорение процесса. Как следует из вида последнего члена правой части уравнения (1.5), он играет существенную роль, только если $(\Theta_i - 1)\varepsilon^{-1} = O(1)$.

¹ Берман В. С. Некоторые вопросы теории распространения зоны с экзотермическими химическими реакциями в газовой и конденсированной средах: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. М.: ИПМ АН СССР, 1974, 151 с.

При $\eta \rightarrow 0$ и фиксированных t и φ имеем

$$(1.7) \quad \Theta_i(t, \eta \rightarrow 0, \varphi) = 1 - \frac{4^{(1-\nu)}}{\sqrt{\pi}} \Gamma^{-1} \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \left(\frac{\eta}{\sqrt{t}} \right)^\nu \sin(\nu\varphi) + \\ + o \left(\left(\frac{\eta}{\sqrt{t}} \right)^\nu \sin(\nu\varphi) \right)$$

Здесь $\Gamma(t)$ — гамма-функция.

Введем в окрестности вершины новую пространственную переменную $r = \eta/\varepsilon$ и будем рассматривать процесс на временах масштаба $\delta^{-1}(\varepsilon)$, для чего введем новую временную переменную

$$(1.8) \quad \tau = t\delta(\varepsilon), \quad \delta \gg 1$$

Будем искать решение $U(t, \eta, \varphi)$ в этой области в виде

$$(1.9) \quad U = \varepsilon U_1(\tau, r, \varphi) + \varepsilon^2 U_2(\tau, r, \varphi) + o(\varepsilon^2)$$

Из (1.5) и (1.7)–(1.9) следует

$$(1.10) \quad \varepsilon\delta \frac{\partial U_1}{\partial \tau} = \varepsilon^{-1} \Delta_r U_1 + \varepsilon^{-1} \exp[U_1 - ar^\nu \sin(\nu\varphi)] \varepsilon^{\nu-1} \delta^{\nu/2} \\ a(\tau) = \frac{4^{1-\nu}}{\sqrt{\pi}} \Gamma^{-1} \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \tau^{-\nu/2} \\ \Delta_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Следовательно, для того, чтобы химическая реакция играла существенную роль в развитии процесса, т. е. последнее слагаемое в правой части уравнения (1.10) было $O(1)$, необходимо выбрать

$$(1.11) \quad \delta(\varepsilon) = \varepsilon^{-2(\nu-1)/\nu}$$

Отметим сильную зависимость характерного времени протекания процесса химической реакции в вершине клина от величины угла раствора. Из (1.10) имеем

$$(1.12) \quad \Delta_r U_1 + \exp[U_1 - ar^\nu \sin \nu\varphi] = 0$$

Решение $U_1(\tau, r, \varphi)$ должно удовлетворять граничному условию при $r \rightarrow 0$ и оставаться ограниченным при $r \rightarrow \infty$. Это условие соответствует физическому требованию, заключающемуся в том, что наибольший химический разогрев имеет место в области, прилегающей к вершине клина. Нельзя требовать, чтобы решение уравнения (1.12) обращалось в нуль при $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$, так как разложение (1.7) и, следовательно, (1.10) справедливо в области, исключаяющей достаточно близкое приближение к плоскостям клина.

2. Решение уравнения (1.16). В уравнении (1.12) время входит в качестве параметра. Введем новую функцию

$$(2.1) \quad V(\tau, r, \varphi) = U_1 - ar^\nu \sin \nu\varphi$$

Учитывая, что второй член в правой части (2.1) является гармонической функцией, имеем

$$(2.2) \quad \Delta_r V + \exp(V) = 0$$

Как было обнаружено впервые Лиувиллем [4], это уравнение имеет

общее решение, различные формы которого приводятся в ряде работ (см., например, [5—7]). В данном случае воспользуемся отличной от известных формой решения, которая для решения U_1 уравнения (1.12) приводит к выражению

$$(2.3) \quad u_1 = ar^\nu \sin \nu\varphi + \ln 2 + 2 \ln |\nabla_r g| - 2 \ln \operatorname{ch} g$$

$$|\nabla_r g|^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)^2$$

Здесь $g(\tau, r, \varphi)$ — гармоническая функция. Как известно [8], если $\Delta_r g = 0$, то

$$(2.4) \quad \Delta_r (\ln |\nabla_r g|) = 0$$

Используя тождество (2.4), убеждаемся, что выражение (2.3) является решением уравнения (1.12). Таким образом, необходимо найти такую гармоническую функцию $g(\tau, r, \varphi)$, чтобы при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$ удовлетворялись условия, накладываемые на $U_1(\tau, r, \varphi)$.

Следовательно, решение краевой задачи для нелинейного уравнения (2.2) (или (1.12)) сводится к отысканию гармонической функции, удовлетворяющей нелинейным граничным условиям. Эту задачу можно свести к решению нелинейного интегрального уравнения.

Найдем приближенное решение уравнения (2.2). Будем искать решение для g в виде ряда

$$(2.5) \quad g(\tau, r, \varphi) = A(\tau) + B(\tau) \ln r + C(\tau) \varphi +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} [G_{\pm i}(\tau) \sin(\nu_i \varphi) + F_{\pm i}(\tau) \cos(\nu_i \varphi)] r^{i\nu}$$

Здесь $A(\tau)$, $B(\tau)$, $C(\tau)$, $G_{\pm i}(\tau)$, $F_{\pm i}(\tau)$ — неизвестные функции, которые должны определиться из соответствующих граничных условий. Учитывая, что

$$|g| \rightarrow \infty, \quad \ln \operatorname{ch} g = |g| - \ln 2 + o(1)$$

$$r \rightarrow \infty, \quad \ln |\nabla g|^2 = \operatorname{const} \cdot \ln r$$

имеем

$$F_{\pm i}(\tau) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad G_{\pm j} \equiv 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Рассмотрим частный случай $\nu = 2$ ($\alpha = \pi/2$). Ограничимся только тремя членами в выражении (2.5), а именно

$$(2.6) \quad g(\tau, r, \varphi) = A(\tau) + B(\tau) \ln r + r^2 D(\tau) \sin(2\varphi)$$

$$|\nabla_r g|^2 = B^2(\tau) r^{-2} + 2B(\tau) D(\tau) \sin(2\varphi) + 4D^2(\tau) r^2$$

Из (2.6) и (2.3), полагая $r \rightarrow \infty$, имеем

$$(2.7) \quad U_1(\tau, r \rightarrow \infty, \varphi) = [a(\tau) - 2D(\tau)] r^2 \sin(2\varphi) +$$

$$+ 2[1 - B(\tau)] \ln r + 3 \ln 2 - 2A(\tau) + \ln [4D^2(\tau)] + o(1)$$

Для выполнения условия ограниченности U_1 необходимо положить

$$(2.8) \quad D(\tau) = a(\tau)/2, \quad B(\tau) = 1$$

Удовлетворим теперь условию при $r \rightarrow 0$. Из (2.3) и (2.6) имеем

$$(2.9) \quad U_1(\tau, r \rightarrow 0, \varphi) = 3 \ln 2 + 2A(\tau) + o(1)$$

Отсюда получаем

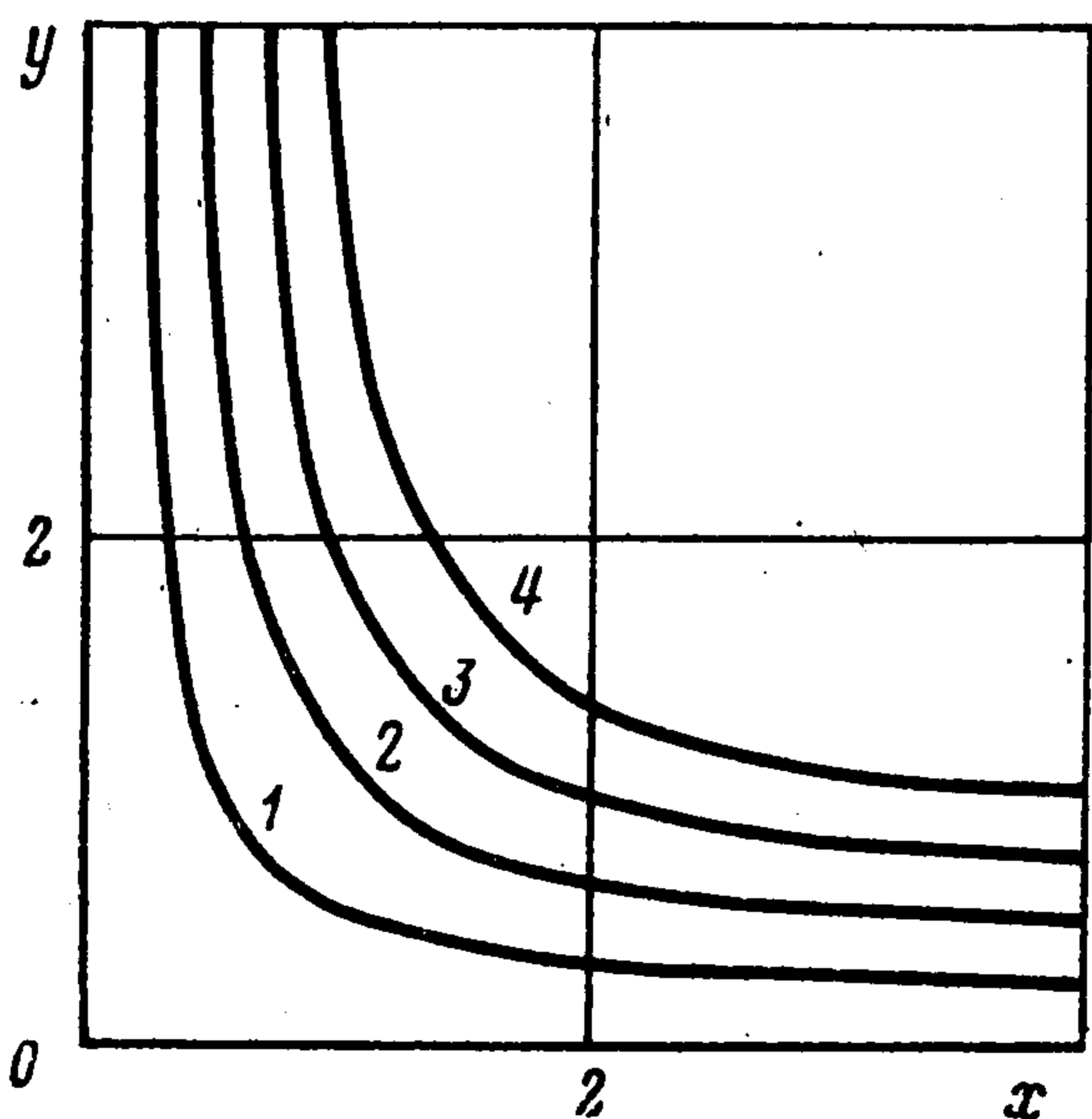
$$(2.10) \quad A(\tau) = -^{3/2} \ln 2$$

$$(2.11) \quad g(\tau, r, \varphi) = ^{1/2} [\ln(r^2/8) + ar^2 \sin(2\varphi)]$$

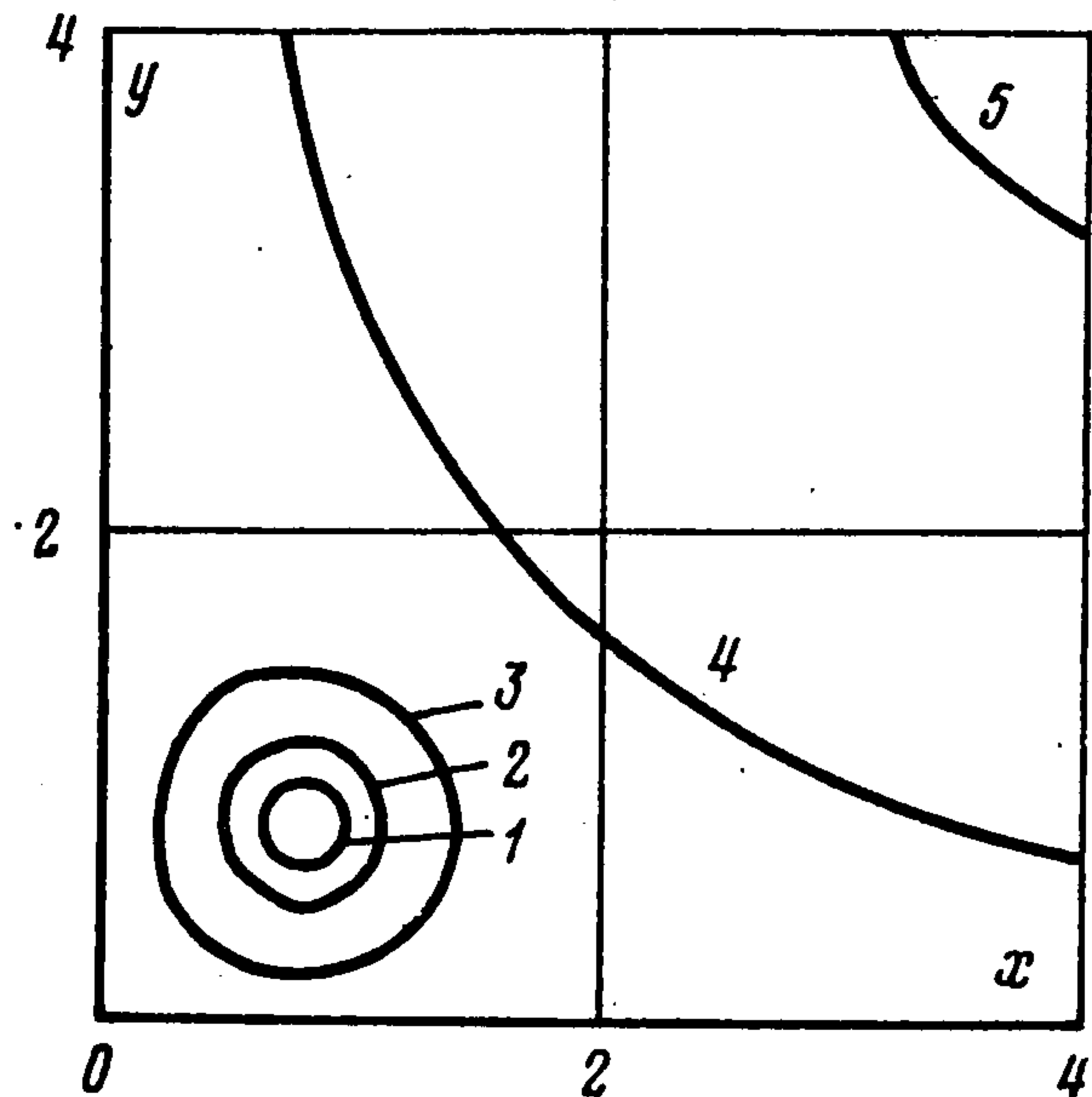
Из (2.7) найдем

$$(2.12) \quad U_1(\tau, r \rightarrow \infty, \varphi) = 2 \ln [8a(\tau)]$$

Из физических соображений ясно, что функция $U_1(\tau, r, \varphi)$, описывающая химический разогрев, должна быть неотрицательной. Исследуя



Фиг. 1



Фиг. 2

решение (2.3) с функцией $g(\tau, r, \varphi)$ вида (2.11), получим, что это условие будет выполнено при

$$(2.13) \quad a(\tau) \geq ^{1/8}$$

Так как при $\nu = 2$ $a(\tau) = 1/(2\pi\tau)$, то из неравенства (2.13) получаем, что решение (2.3) с функцией $g(\tau, r, \varphi)$, определенной в (2.11), неотрицательно при

$$(2.14) \quad r \rightarrow \infty, \quad 0 \leq \tau \leq 4/\pi$$

В данном случае за характерное время зажигания примем время, при котором происходит качественное изменение решения

$$(2.15) \quad \tau_i = 4/\pi$$

Таким образом, процесс зажигания в области в виде прямого угла протекает существенно быстрее по сравнению с зажиганием плоского полупространства ($\varepsilon \ll 1$), т. е.

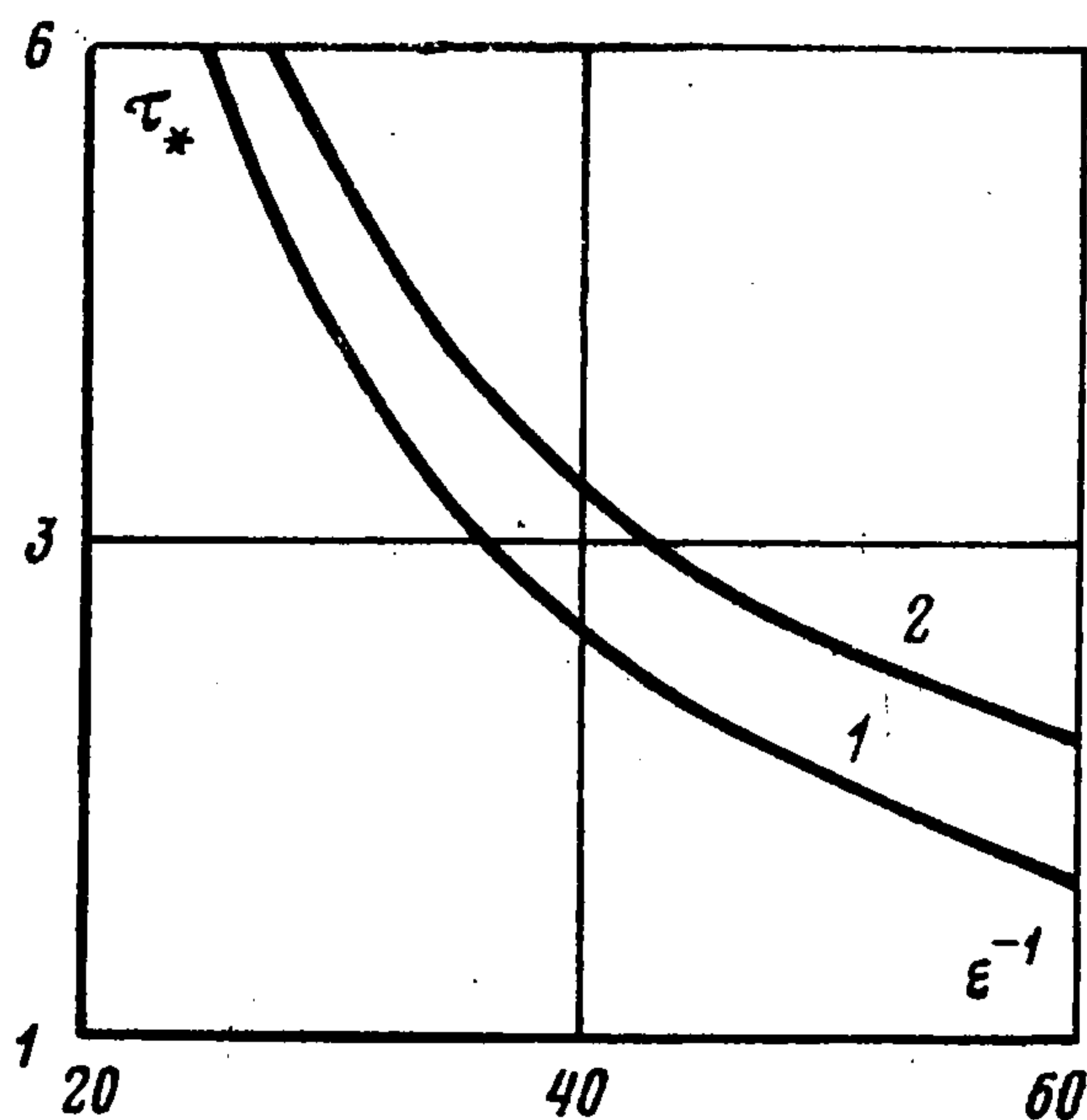
$$(2.16) \quad t_i(\nu = 1)/t_i(\nu = 2) = \varepsilon^{-1/8} \geq 1$$

Следовательно, неровности поджигаемой поверхности, размер которых представляет несколько характерных стационарных зон прогрева, могут играть определяющую роль в развитии процесса зажигания.

Отметим, что решение (2.3) и (2.11) не удовлетворяет условиям на гранях клина. В этих областях необходимо ввести новые «растянутые» переменные, характерные для данного пограничного слоя, и построить решение, удовлетворяющее условиям на гранях и сращиваемое с решением (2.3).

Попытка удовлетворить обоим условиям при $r \rightarrow \infty$ и $r = 0$ в случае $\nu \neq 2$ и $\nu \neq 1$ с использованием выражения (2.5) не привела к положительным результатам. Это объясняется, по-видимому, необходимостью введения у вершины клина дополнительной «растянутой» области, сращения решения в ней с решением (2.3) и удовлетворением условия при $r = 0$. Выше эта область не исследована.

Для проверки результатов, полученных на основе асимптотического подхода, исходная задача (1.5)–(1.6) при $\alpha = \pi/2$ решалась численными методами. На фиг. 1 и 2 представлены изотермы в разные моменты времени. Фигура 1 характеризует распределение температуры до момента зажигания при $\varepsilon^{-1} = 40$. Кривые 1–4 соответствуют $\Theta = 0,9; 0,8; 0,7; 0,6$. Фигура 2 иллюстрирует поведение изотерм после момента зажигания. Кривые 1–5 соответствуют $\Theta = 2,1, 0,7, 0,3, 0,9, 0,5$. Момент зажигания проявляется в виде возникновения замкнутых изотерм, окружающих наиболее горячую область внутри клина. Время возникновения этой «горячей точки», полученное численными методами при конечных величинах $\varepsilon^{-1} = O(10)$, совпадает по порядку величины с характерным временем (2.15). На фиг. 3 (здесь $\tau_* = 10^2 \tau_i$) показана зависимость времени зажигания от ε^{-1} , полученная численным (1) и асимптотическими методами (2).



Фиг. 3

Хорошее соответствие обоих решений друг другу указывает на то, что асимптотический подход позволяет получить не только качественную картину явления, но и рассмотреть количественные изменения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. К теории зажигания. — Докл. АН СССР, 1963, т. 150, № 2, с. 283.
2. Берман В. С., Рязанцев Ю. С. Асимптотический анализ зажигания газа накаливаемой поверхностью. — ПМТФ, 1977, № 1, с. 68.
3. Карлсруй Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964, 487 с.
4. Liouville J. Sur l'équation aux différences partielles $\partial^2 \log \lambda / \partial u \partial v \pm \lambda / 2a^2 = 0$. — J. Math., 1853, v. 18, No. 1, p. 71.
5. Ames W. F. Nonlinear partial differential equations in engineering. New York — London: Acad. Press, 1965. 511 p.
6. Stuart J. T. On finite amplitude oscillations in laminar mixing layers. — J. Fluid Mech., 1967, v. 29, p. 3, p. 417.
7. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
8. Фукс Б. А., Шабат Б. В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. М.: Наука, 1964, 387 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.V.1980