

УДК 533.6.011

**ДИФРАКЦИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ПРИ ЕЕ НОРМАЛЬНОМ ПАДЕНИИ  
НА СВОБОДНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ ЖИДКОСТИ,  
СОДЕРЖАЩЕЙ КЛИН С ВЕРШИНОЙ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА**

**Бежанов К. А.**

Рассматривается нормальное падение плоской ударной волны в газе на свободную поверхность сжимаемой жидкости, ее отражение и преломление в случае, когда жидкость занимает часть нижней полуплоскости, а остальную часть занимает клин с вершиной на невозмущенной границе раздела. В частном случае одна из сторон клина может совпадать с линией уровня свободной поверхности или составлять с ней угол, близкий к развернутому.

В силу линейности задачи в жидкости и в газе разделяются: течение жидкости определяется по давлению за ударной волной, отраженной от твердой стенки, а по полученной форме свободной поверхности определяется возмущенное течение газа [1].

Задача о нерегулярном взаимодействии ударной волны со свободной поверхностью жидкости рассматривалась в [1], отражение ударной волны от угла, близкого к развернутому, — в [2], а задача о движении поршня, имеющего форму двугранного угла, близкого к развернутому, — в [3].

**1. Постановка задачи.** Пусть плоская ударная волна произвольной интенсивности двигается по покоящемуся газу и в начальный момент времени встречается со свободной поверхностью жидкости, плотность которой существенно больше, чем плотность газа. Тогда в жидкость пойдет слабая преломленная волна сжатия, а в газ отразится ударная волна. Если в жидкости находится клин с вершиной на невозмущенной границе раздела, то имеет место сложная картина взаимодействия с зонами дифракции в жидкости и в газе (фигура). В качестве основных невозмущенных параметров в газе берутся параметры за ударной волной, отраженной от твердой стенки: давление  $P$ , плотность  $R_1$  и скорость звука  $a_1$ , а в жидкости: плотность  $R_2$  и скорость звука  $a_2$  [4]. Рассматриваемая задача линейна из-за малости параметра  $\varepsilon = R_1/R_2$ , и возмущения давлений, в физических переменных  $(X, Y, t)$  удовлетворяют волновым уравнениям, которые после перехода к автомодельным координатам  $x = X / (a_1 t)$ ,  $y = Y / (a_2 t)$  ( $i = 1, 2$ ) перейдут в уравнение

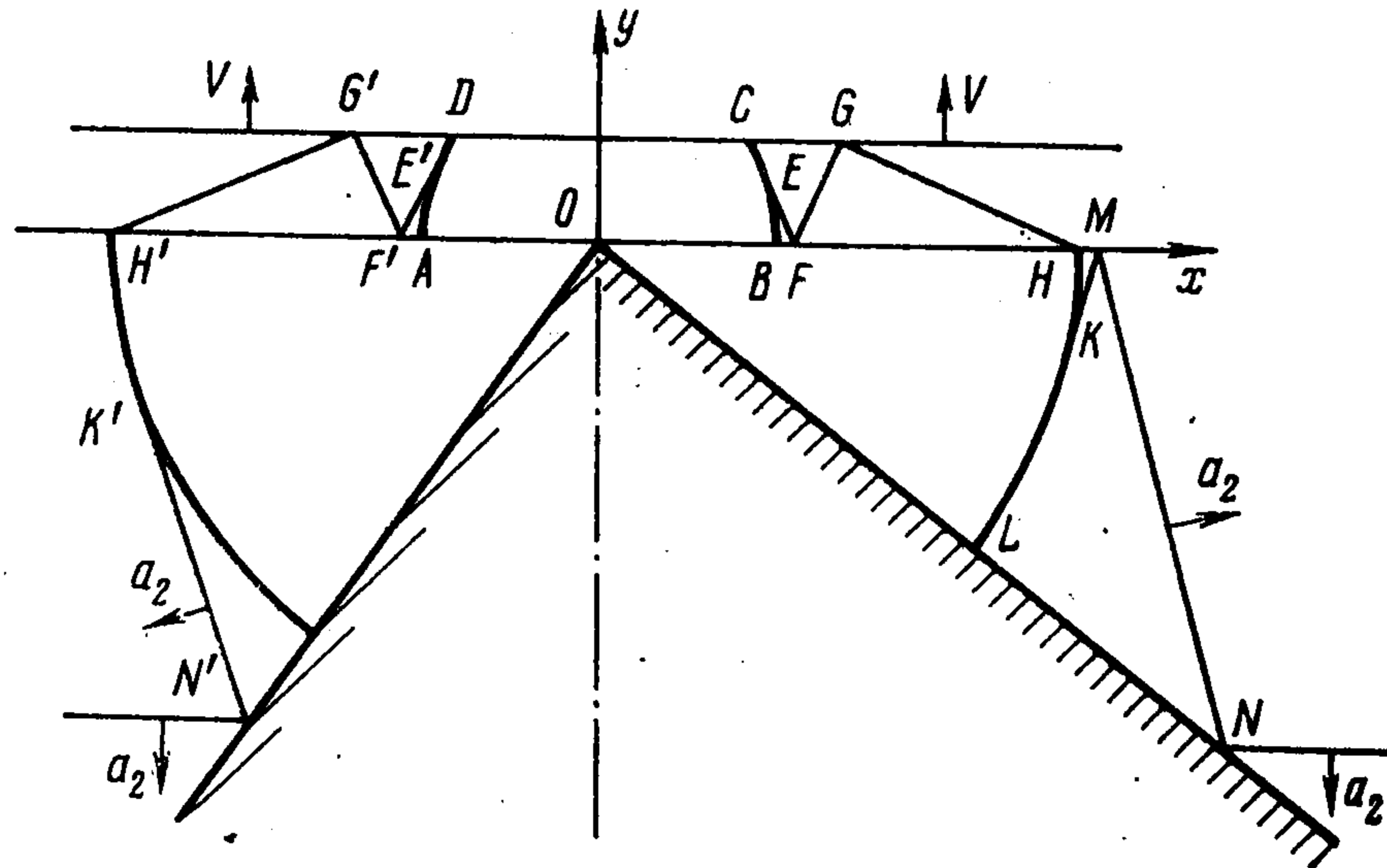
$$(1.1) \quad (1 - x^2)p_{xx} - 2xyp_{xy} + (1 - y^2)p_{yy} - 2xp_x - 2yp_y = 0$$

(внутри единичной окружности оно эллиптического типа, а вне ее гиперболического).

Вне области дифракции в жидкости течение кусочно-постоянно, что можно обосновать методом Смирнова — Соболева [5]. В области дифракции получена простая неоднородная задача Гильберта для аналитической

функции, действительная часть которой есть возмущение давления. После определения давления находится форма свободной поверхности жидкости.

Вне области дифракции в газе течение переменное в областях, ограниченных характеристиками, исходящими из точек  $H$  и  $H'$ , ударной волной, дугами окружности Маха и свободной поверхностью жидкости, и определяется методом Смирнова — Соболева. В остальных областях, куда не распространяются возмущения, вызванные присутствием клина в жидкости, течение определяется по отражению ударной волны от границы раздела



двух сред [6]. В области дифракции получена неоднородная задача Гильберта для комплексной производной давления, решение которой находится в явном виде.

Поскольку решение задачи в газе определяется только через вторую производную формы свободной поверхности, обозначения в жидкости и в газе могут повторяться. Под ветвями встречающихся многозначных аналитических функций понимаются те, которые принимают положительные значения при положительных значениях их аргументов.

**2. Решение в областях, занятых жидкостью.** Дифракционное течение в жидкости вызвано присутствием клина, от которого пойдут переменные возмущения, сосредоточенные внутри окружности Маха с центром в вершине клина. Прошедшая в жидкость слабая волна отражается от стенок клина и касается дуг окружности Маха для угла наклона правой стенки  $-\pi/2 < \theta_L \ll -\pi/4$  и левой  $-3\pi/4 < \theta_L' < -\pi/2$ . Давление за отраженной волной удваивается и равно  $2P$ . При  $-\pi/4 < \theta_L < 0$  ( $-\pi < \theta_L' < -3\pi/4$ ) отраженная волна падает на свободную поверхность и отражается от нее в виде волны разряжения на дугу окружности Маха со скачком  $P$  в соответствии с граничным условием постоянства давления на свободной поверхности, причем в рассматриваемом приближении фронты волн сжатия и разряжения совпадают с характеристиками уравнения (1.1). Таким образом, вне области дифракции давление — кусочно-постоянная функция, а границы областей постоянства давления проходят по слабым волнам сжатия и разряжения, скачки давления на которых равны  $P$ . Естественно, что скачки разряжения — результат линеаризации нелинейных уравнений газовой динамики.

В областях  $OLH$  и  $OL'H'$  уравнение (1.1) после перехода к полярным координатам  $(r, \theta)$  и преобразования Чаплыгина

$$(2.1) \quad r = \frac{2\rho}{1 + \rho^2}$$

перейдет в уравнение Лапласа. Введем в плоскости  $\zeta = \rho e^{i\theta} = \xi + i\eta$  аналитическую функцию  $\Phi(\zeta) = p + i\varphi$  и выражение для комплексной скорости [1]

$$u + iv = \frac{1}{2} \int \zeta d\Phi + \frac{1}{\bar{\zeta}} d\bar{\Phi}, u \rightarrow \frac{u}{a_2}, v \rightarrow \frac{v}{a_2}, p \rightarrow \frac{p}{a_2^2 R_2}$$

где  $\varphi$  — гармоническая функция, сопряженная с  $p$ , а стрелки здесь и далее означают равенство с точностью до обозначения. Тогда получим следующие краевые задачи в секторах  $OLH$  и  $OL'H'$  для функции  $\Phi(\zeta)$ :

$$(2.2) \quad p = P, \eta = 0, 0 < \xi < 1 \quad \varphi = 0, \theta = \theta_L, 0 < \rho < 1$$

$$p = [\vartheta(\theta_1 - \theta) + 1]P, \rho = 1, \theta_L < \theta < 0$$

$$p = P, \eta = 0, -1 < \xi < 0 \quad \varphi = 0, \theta = \theta_{L'}, 0 < \rho < 1$$

(2.3)

$$p = [\vartheta(\theta - \theta_2) + 1]P, \rho = 1, -\pi < \theta < \theta_{L'}$$

где  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — углы касания отраженных волн сжатия или разряжения, соответствующие точкам  $K$  и  $K'$ ,  $\vartheta$  — функция Хевисайда. В дальнейшем решение краевых задач (2.2) и (2.3) получаются в единой записи, причем верхний знак и  $j = 1$  соответствуют сектору  $OLM$ , а нижний знак и  $j = 2$  — сектору  $OL'M'$ .

Функция

$$\omega = \pm \left( \frac{1 - (\pm \zeta)^{n_j}}{1 + (\pm \zeta)^{n_j}} \right)^2, \quad n_1 = -\frac{\pi}{\theta_L}, \quad n_2 = \frac{\pi}{\pi + \theta_{L'}}$$

отображает секторы  $OLM$  и  $OL'M'$  на верхнюю полуплоскость, а замена  $\Phi(\omega) = \sqrt{1 \mp \omega} \Psi(\omega)$  позволяет свести (2.2) и (2.3) к задаче Дирихле для  $\text{Re} \Psi(\omega)$ . При  $-\infty < \sigma < +\infty$

$$\text{Re} \Psi(\omega) = \{2\vartheta(\mp \sigma \pm \sigma_j) + \vartheta[(1 \mp \sigma)(\pm \sigma \mp \sigma_j)]\} \frac{P}{\sqrt{1 \mp \omega}}$$

$$\sigma_j = \mp \text{tg}^2 \alpha_j, \quad \alpha_1 = -\frac{\pi \theta_1}{2\theta_L}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi(\pi + \theta_2)}{2(\pi + \theta_{L'})}$$

где  $\sigma_j$  соответствуют точкам  $K$  и  $K'$ . Представив решение задачи Дирихле через интеграл Шварца [7], найдем окончательно

$$\Phi(\omega) = P \mp \frac{iP}{\pi} \ln \frac{\sqrt{1 \mp \sigma_j} - \sqrt{1 \mp \omega}}{\sqrt{1 + \sigma_j} + \sqrt{1 \mp \omega}}, \quad \Phi(0) = P$$

Распределение вертикальной составляющей скорости на границе раздела и форма свободной поверхности  $y = f(x)$  определяются из следующих дифференциальных уравнений [1]:

$$(2.4) \quad v'(x) = -x^{-1} \sqrt{1 - x} \varphi'(x), \quad v(\pm 1) = -v_0 \\ xf'(x) - f(x) = -v(x), \quad f(\pm 1) = -y_0$$

$$\varphi(x) = \pm \frac{P}{\pi} \ln \frac{1 + (\pm \xi)^{n_j} + 2 \cos \alpha_j (\pm \xi)^{n_j/2}}{1 + (\pm \xi)^{n_j} - 2 \cos \alpha_j (\pm \xi)^{n_j/2}}, \quad x = \frac{2\xi}{1 + \xi^2}$$

Из (2.4) получим асимптотические формулы для  $v(x)$  и  $f(x)$  в окрестности начала координат при  $\theta_L \neq -\pi/4$  и  $\theta_{L'} \neq -3\pi/4$

$$(2.5) \quad v(x) \sim v(0) - \frac{4Pn_j \cos \alpha_j}{\pi(n_j - 2)2^{n_j/2}} (\pm x)^{n_j/2 - 1}, \quad n_j > 2$$

$$f(x) \sim f(0) + \frac{8Pn_j \cos \alpha_j}{\pi(n_j - 2)(n_j - 4)2^{n_j/2}} (\pm x)^{n_j/2 - 1}$$

а при  $\theta_L = -\pi/4$  и  $\theta_{L'} = -3\pi/4$  выпишем решение задачи (2.4)

$$(2.6) \quad \begin{aligned} v(x) &= v(0) \mp 2\pi^{-1}P \arcsin x, \quad v(0) = f(0) = P - v_0 \\ f(x) &= f(0) \pm 2\pi^{-1}P [x \ln |x| - x \ln(1 + \sqrt{1 - x^2}) - \\ &\quad - \arcsin x] \end{aligned}$$

Согласно (2.5) и (2.6), в окрестности начала координат всегда имеет место возвышение точек свободной поверхности жидкости над невозмущенным уровнем, что можно объяснить поджимающим действием волн, отраженных от стенок клина. Когда клин расположен симметрично относительно оси  $Oy$ , функция  $f(x)$  в точке  $x = 0$  непрерывна, а  $f'(x)$  разрывна, в несимметричном случае  $f(x)$  разрывна в точке  $x = 0$ . При  $-\pi/4 < \theta_L < 0$  и  $-\pi < \theta_{L'} < -3\pi/4$  левая и правая производные  $f'(\pm 0)$  ограничены, а при  $-\pi/2 < \theta_L \leq -\pi/4$  и  $-3\pi/4 \leq \theta_{L'} < -\pi/2$   $f'(\pm 0) = -\infty$ , что объясняется большим выталкивающим эффектом отраженных волн. Следовательно,  $f''(x)$  может содержать сингулярные обобщенные функции вида  $\delta(x)$ ,  $(-x)_-^\alpha$  и  $x_+^\alpha$  в симметричном случае и  $\delta'(x)$ ,  $(-x)_-^\alpha$  и  $x_+^\alpha$  в несимметричном случае, где  $\alpha > -2$ ,  $\delta(x)$  — дельта-функция,  $\delta'(x)$  — производная дельта-функции,  $(-x)_-^\alpha$  и  $x_+^\alpha$  — регуляризация функций со степенными особенностями [8].

**3. Течение газа вне области дифракции.** Уравнение (1.1) преобразованием  $\mu = \arccos r^{-1}$ ,  $r > 1$  перейдет в волновое уравнение  $p_{\mu\mu} - p_{\theta\theta} = 0$ , характеристики которого являются полукасательными к окружности Маха и направлены в разные стороны [5]. Для формулировки граничных условий перейдем к системе координат  $Ox'y'$ , повернутой на угол  $\pi/2$  относительно  $Oxy$  (в дальнейших обозначениях штрихи в  $x'$  и  $y'$  опустим).

В областях  $FHG$  и  $F'H'G'$  решение ищется в виде  $p = \chi_j(\mu \pm \theta)$  ( $j = 1, 2$ ), где верхний знак и первый индекс здесь и далее относятся к области  $BHGC$ , а нижний — к области  $AH'G'D$ . Произвольные функции  $\chi_j$  определяются из условия на границе раздела

$$(3.1) \quad p_x(0, y) = y^2 f''(-y), \quad y_F < y < y_H, \quad y_{F'} < y < y_{H'}$$

где  $f(-y)$  — граница раздела между газом и жидкостью, а также между газом и одной из стенок клина, если она составляет малый угол с невозмущенным уровнем свободной поверхности или совпадает с ним.

Окончательно решение имеет вид

$$p = \int_{\mu_j \mp \pi/2}^{\mu \pm \theta} \operatorname{cosec}^3 \lambda f'' (\mp \operatorname{cosec} \lambda) d\lambda$$

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \arccos y_H^{-1} \\ \mu_2 &= \arccos y_{H'}^{-1} \\ y_H &= -y_{H'} = a_2 | a_1 \end{aligned}$$

В областях  $CEFG$  и  $DE'F'G'$  решение ищется в виде  $p = \chi_j (\mu \pm \theta) + \kappa_l (\mu \mp \theta)$  ( $l = 3, 4$ ), где функции  $\chi_j$  известны из решения в областях  $FHG$  и  $F'H'G'$ ,  $\kappa_l$  определяется из условия на ударной волне

$$(3.2) \quad m_1^2 p_x + [mBy^{-1} + (m + A)y]p_y = 0, \quad x = m$$

$$A = \frac{M^2 + 1}{2mM}, \quad B = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{M^2 - 1}{(\gamma - 1)M^2 + 2}, \quad M = \frac{U + V}{a_0},$$

$$m = \frac{U}{a_1}, \quad m_1^2 = 1 - m^2$$

где  $U$  — скорость ударной волны, отраженной от твердой стенки,  $V$  и  $a_0$  — скорость потока и скорость звука за падающей ударной волной,  $\gamma$  — отношение теплоемкостей.

Окончательно решение имеет вид

$$(3.3) \quad p = \int_{\mu_j \mp \pi/2}^{\mu \pm \theta} \operatorname{cosec}^3 \lambda f'' (\mp \operatorname{cosec} \lambda) d\lambda +$$

$$+ \int_{\mu_l \mp \pi/2}^{\mu \mp \theta} \frac{C(\lambda) + D(\lambda)}{C(\lambda) - D(\lambda)} g^3(\lambda) f'' (\pm g(\lambda)) d\lambda$$

$$C(\lambda) = (1 - m \cos \lambda)[m(m_1^2 + B)\sin^2 \lambda - (m + A)(1 - m \cos \lambda)^2]$$

$$D(\lambda) = (m - \cos \lambda)[(1 + mA)(1 - m \cos \lambda)^2 - m^2 B \sin^2 \lambda]$$

$$g(\lambda) = m_1^{-2} \operatorname{cosec} \lambda (1 + m^2 - 2m \cos \lambda)$$

$$\mu_3 = \arccos y_F^{-1}, \quad \mu_4 = \arccos y_{F'}^{-1}$$

В областях  $BFE$  и  $AF'E'$  решение также имеет вид (3.3).

Форма ударной волны  $x = m + \psi(y)$  на участках  $CG$  и  $DG'$  определится из решения задачи Коши при  $x = m$ :

$$y\psi'(y) - \psi(y) = -BM_1^{-1}p(y), \quad \psi(y_j) = BM_1^{-1}p(y_j) \quad (j = 1, 2)$$

где  $p(y_1) = p(y_2)$  берется из [6],  $y_1 = y_G$ ,  $y_2 = y_{G'}$ ,  $M_1 = V/a_1$ .

4. Течение газа в области дифракции. Область дифракции ограничена ударной волной, двумя дугами окружности Маха, свободной поверхностью жидкости и, быть может, одной из стенок клина. Условие на границе раздела имеет вид (3.1) при  $-1 < y < 1$ , а наличие множителя  $y^2$  стирает все сингулярности  $y f''(-y)$ . Условие на ударной волне имеет вид (3.2) при  $-m_1 < y < m_1$ .

Граничное условие на дугах окружности Маха получим из (3.3)

$$p_\theta(1, \theta) = c(\theta), \quad -\pi/2 < \theta < \theta_C, \quad \theta_D < \theta < \pi/2$$

где

$$c(\theta) = \operatorname{cosec}^3 \theta f''(-\operatorname{cosec} \theta) + \frac{C(\theta) + D(\theta)}{C(\theta) - D(\theta)} g^3(\theta) f''(-g(\theta))$$

Кроме того, должны выполняться два интегральных условия, выражающие гладкость фронта ударной волны в точках  $C$  и  $D$  и изменение

давления вдоль  $CD$  на заданную величину

$$(4.1) \quad \int_{-m_1}^{m_1} \frac{p_y}{y} dy = -\frac{mM_1}{B} (\psi_y(-m_1) - \psi_y(m_1)), \quad \int_{-m_1}^{m_1} p_y dy = p_D - p_C$$

где  $\psi_y(m_1)$ ,  $\psi_y(-m_1)$ ,  $p_C$  и  $p_D$  известны из решения в областях  $BHGC$  и  $ADG'H'$ , а  $p_C$  и  $p_D$  — давление соответственно в точках  $C$  и  $D$ .

Уравнение (1.1) после перехода к полярным координатам и преобразования (2.1) перейдет в уравнение Лапласа. Области дифракции соответствует криволинейный ортогональный четырехугольник плоскости  $\zeta$ , ограниченный дугами окружности  $\{\rho = \rho(\theta), -\theta_1 < \theta < \theta_1\}$ ,  $\{\rho = 1, -\pi/2 < \theta < -\theta_1\}$ ,  $\{\rho = 1, \theta_1 < \theta < \pi/2\}$  и отрезком прямой  $\{\xi = 0, -1 < \eta < 1\}$ .

Граничное условие для нормальной и касательной производной давления имеет вид

$$(4.2) \quad \begin{aligned} ap_n + bp_s &= c \\ a &= a(\theta), \quad b = b(\theta), \quad c = 0, \quad \rho = \rho(\theta), \quad \theta_C < \theta < \theta_D \\ a &= 0, \quad b = 1, \quad c = c(\theta), \quad \rho = 1, \quad -\pi/2 < \theta < \theta_C \\ a &= 0, \quad b = 1, \quad c = c(\theta), \quad \rho = 1, \quad \theta_D < \theta < \pi/2 \\ a &= 1, \quad b = 0, \quad c = c_0(\theta), \quad \xi = 0, \quad -1 < \eta < 1 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} a(\theta) &= \sqrt{1 - m^2 \sec^2 \theta}, \quad b(\theta) = B \operatorname{ctg} \theta - mA \operatorname{tg} \theta, \\ \theta_1 &= \arccos m \\ c_0(\eta) &= \frac{8\eta^2}{(1 + \eta^2)^3} f''\left(-\frac{2\eta}{1 + \eta^2}\right), \quad \rho(\theta) = \frac{\cos \theta - \sqrt{\cos^2 \theta - m^2}}{m} \end{aligned}$$

$n$  — внешняя нормаль, ориентация  $(n, s)$  совпадает с  $(x, y)$ .

Отобразим область, ограниченную криволинейным четырехугольником плоскости  $\zeta$  на внутренность прямоугольника  $\{0 < \sigma < \sigma_0, 0 < \tau < \pi\}$  плоскости  $\omega = \sigma + i\tau$ :

$$\omega = \ln \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} + i \frac{\pi}{2}, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + m}{1 - m}$$

и введем аналитическую функцию  $W(\omega) = p_\sigma - ip_\tau$ .

Тогда граничное условие (4.2) примет вид задачи Гильберта

$$\begin{aligned} a_1 p_\sigma - b_1 p_\tau &= d \\ a_1 &= a_1(\tau), \quad b_1 = b_1(\tau), \quad d = 0, \quad \sigma = \sigma_0, \quad 0 < \tau < \pi \\ a_1 &= 1, \quad b_1 = 0, \quad d = d_-(\sigma), \quad \tau = 0, \quad 0 < \sigma < \sigma_0 \\ a_1 &= 1, \quad b_1 = 0, \quad d = d_+(\sigma), \quad \tau = \pi, \quad 0 < \sigma < \sigma_0 \\ a_1 &= 1, \quad b_1 = 0, \quad d = d_0(\tau), \quad \sigma = 0, \quad 0 < \tau < \pi \end{aligned}$$

Здесь

$$a_1(\tau) = \frac{1}{2} \sin 2\tau, \quad b_1(\tau) = \frac{m}{m_1^2} B - A \cos^2 \tau,$$

$$d_3(\tau) = \cos^2 \tau f''(\cos \tau)$$

$$\begin{aligned} d_\mp(\sigma) &= \mp \operatorname{ch}^2 \sigma f''(\pm \operatorname{ch} \sigma) \mp \frac{C_1(\sigma) + D_1(\sigma)}{C_1(\sigma) - D_1(\sigma)} \times \\ &\times \frac{\operatorname{ch}^3(2\sigma_0 - \sigma)}{\operatorname{ch} \sigma} f''(\pm \operatorname{ch}(2\sigma_0 - \sigma)) \end{aligned}$$

$$C_1(\sigma) = \operatorname{ch}(\sigma_0 - \sigma)[m(m_1^2 + B) - m_1^2(m + A)\operatorname{ch}^2(\sigma_0 - \sigma)]$$

$$D_1(\sigma) = \operatorname{sh}(\sigma_0 - \sigma)[m_1^2(1 + mA)\operatorname{ch}^2(\sigma_0 - \sigma) - m^2B]$$

Условия (4.1) в новых переменных переписутся в виде

$$(4.3) \quad \int_0^{\pi} \sec \tau p_{\tau} d\tau = \frac{M_1}{B} (\psi_y(-m_1) - \psi_y(m_1)), \quad \int_0^{\pi} p_{\tau} d\tau = p_D - p_C$$

Отобразим прямоугольник плоскости  $\omega$  на верхнюю полуплоскость плоскости  $w$  с помощью функции

$$w = \frac{\vartheta_2(0, q) \vartheta_2(-i\omega, q)}{\vartheta_3(0, q) \vartheta_3(-i\omega, q)}, \quad q = \frac{1-m}{1+m}$$

где  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$  — эллиптические тэта-функции [9]. Ударной волне соответствуют промежутки  $(-\infty, -1)$  и  $(1, +\infty)$ , а стенке  $(-k, k)$ , где  $k$  — модуль эллиптического интеграла,  $0 < k < 1$ . Индекс полученной задачи Гильберта с разрывными коэффициентами в классе функций, интегрируемых в точках  $w = \pm 1$ , равен единице.

Для определения канонической функции представим ее в виде [2, 3, 10]:

$$Z(w) = Z_1(w)Z_2(w)$$

где

$$Z_1(w) = \frac{1}{\sqrt{w^2 - 1}} = i \frac{\vartheta_3(0, q) \vartheta_3(-i\omega, q)}{\vartheta_4(0, q) \vartheta_4(-i\omega, q)}$$

имеет кусочно-постоянный аргумент на границе и устраняет разрывы в точках  $w = \pm 1$ , а  $Z_2(w)$  удовлетворяет условию на образе ударной волны и имеет вид [2]

$$Z_2(w(\omega)) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - e^n - h^n}{n \operatorname{sh} 2n\sigma_0} \operatorname{ch} 2n\omega\right)$$

$$e = \frac{l_1 - 1}{l_1 + 1}, \quad h = \frac{l_2 - 1}{l_2 + 1}, \quad \frac{1}{l_1 + l_2} = A - \frac{mB}{m_1^2},$$

$$\frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} = \frac{mB}{m_1^2}$$

Тогда решение задачи Гильберта имеет вид [11, 12]

$$(4.4) \quad W(\omega(w)) = \frac{Z(m)}{\pi i} \left( \int_{-1}^{-k} \frac{d_+(\sigma(s))}{Z(s)} \frac{ds}{s-w} + \right.$$

$$\left. + \int_{-k}^k \frac{d_0(\tau(s))}{Z(s)} \frac{ds}{s-w} + \int_k^1 \frac{d_-(\sigma(s))}{Z(s)} \frac{ds}{s-w} + A_0 + A_1 w \right)$$

где мнимые постоянные  $A_0$  и  $A_1$  определяются из условий (4.3).

После определения из (4.4) распределения давления на фронте ударной волны, форма ее на участке  $CD$  ( $-m_1 < y < m_1$ ) определится из решения задачи Коши

$$y\psi'(y) - \psi(y) = -BM_1^{-1}p(y), \quad \psi(m_1) = \psi_D$$

а выполнение условий (4.3) обеспечит непрерывность  $\psi(y)$  в точке  $D$  и гладкость в точках  $C$  и  $D$ .

Распределение давления на границе раздела и дугах окружности Маха, получаемые интегрированием предельных значений (4.4), так же как и в [2], не имеет особенностей. Математически отсутствие особенностей объ-

ясняется отсутствием сдвига у аргумента второй производной формы границы раздела, из-за чего правая часть граничного условия (3.1) является регулярной обобщенной функцией в окрестности вершины клина. Отсутствие сдвига у второй производной границы раздела связано с отсутствием потока, параллельного невозмущенному уровню свободной поверхности жидкости. Наличие такого потока вызывает пиковые давления в точках излома и разрыва границы, которые вызывают появление особенностей в линейных задачах [1, 3, 10]. По полученному распределению давления на границе раздела можно вновь найти решение в области, занятой жидкостью, и учесть взаимное влияние течений по обе стороны от стенок клина.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бежанов К. А. Нерегулярное взаимодействие движущейся ударной волны с тангенциальным разрывом.— ПММ, т. 41, вып. 6, с. 1053.
2. Lighthill M. J. Diffraction of blast.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1950, v. 200, No. 1063, p. 554.
3. Тешуков В. М. Об одном плоском нестационарном течении газа с сильным разрывом.— ПМТФ, 1971, № 3, с. 45.
4. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 854 с.
5. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Ч. 2. Л.— М.: Глав. ред. общетехн. лит., 1937, 998 с.
6. Губанов А. И. Отражение и преломление ударных волн на границе двух сред. — Ж. техн. физ., 1958, т. 28, вып. 9, с. 2035.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973, 736 с.
8. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958, 439 с.
9. Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н. Курс современного анализа. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.
10. Бежанов К. А. К теории дифракции ударных волн.— ПММ, 1960, т. 24, вып. 4, с. 718.
11. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977, 640 с.
12. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968, 511 с.

Москва

Поступила в редакцию  
23.IX.1980