

УДК 533.6.011:534.222.2

ОБ ОБРАЗОВАНИИ УДАРНЫХ ВОЛН В СОПЛАХ ЛАВАЛЯ

Брежнев А. Л., Чернов И. А.

Изучаются течения невязкого газа в плоских и осесимметричных соплах Лавалья, когда вдоль характеристики, проходящей в центр сопла, распространяется слабый разрыв. Выведены достаточные условия образования ударной волны, возникающей в центре сопла за счет первой поправки к непрерывному автомодельному решению.

Обратная задача сопла Лавалья состоит в том, чтобы по заданному распределению скорости на продольной оси построить течение в некоторой ее окрестности и, в частности, найти форму стенок. При этом не всякое распределение оказывается допустимым. Известно неравенство Ф. И. Франкля [1], определяющее условие непрерывности течения при таком распределении скорости на оси, когда ускорение имеет конечный разрыв в центре сопла. В [2] показано, что если величина разрыва превышает указанное в неравенстве значение, то течение вначале сменяется ударным, так что в центре сопла возникает скачок уплотнения, а затем при некотором критическом значении величины разрыва течение разрушается. Было найдено условие существования ударных течений в плоских и осесимметричных соплах в классе автомодельных решений трансзвукового уравнения и показано, что причиной образования ударной волны является затянутасть переходной части, когда горло сопла лежит ниже по потоку, чем его центр.

В данной работе изучается вопрос о влиянии высших приближений в распределении осевой скорости на свойства течения. Показано, что ударная волна может образоваться и в том случае, когда главный член определяет непрерывное автомодельное течение. Подобная ситуация обсуждалась ранее [3,4] в задаче об отражении слабого разрыва от звуковой линии в связи с проблемой образования ударных волн.

Полученные в работе результаты обладают весьма простым физическим смыслом: течения в соплах с ускорением по направлению к выхлопной части остаются безударными в том классе функций, который здесь рассматривается. Исключением является последнее из непрерывных автомодельных течений, в котором оказывается возможным появление ударной волны в высших приближениях. Что касается течений с сомкнувшимися на оси канала местными сверхзвуковыми зонами (МСЗ), то они неустойчивы по отношению к малым возмущениям и в итоге из безударных легко превращаются в ударные.

1. Околовзвукковые течения газа описываются приближенной системой уравнений Кармана

$$(1.1) \quad -uu_x + v_y + \omega y^{-1}v = 0, \quad u_y - v_x = 0$$

где x, y — безразмерные декартовы или цилиндрические координаты, u, v — безразмерные компоненты скорости возмущения однородного звукового потока, параметр $\omega = 0$ ($\omega = 1$) в плоском (осесимметричном) течении.

Для исследования движения газа в сопле Лавалья поставим задачу Коши: найти решение системы (1.1), которое на оси симметрии $y = 0$

удовлетворяет условиям

$$(1.2) \quad \begin{aligned} u(x, 0) &= A_0 x + A_1 |x|^{1+k} + \dots & x < 0 \\ u(x, 0) &= B_0 x + B_1 x^{1+k} + \dots & x > 0 \\ v(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Здесь k, A_i, B_i — произвольные постоянные, причем $A_0 > 0, k > 0$ и [2]

$$r_5 \leq B_0/A_0 \leq 1 \quad (r_5 = -2(1 - \omega) - 2^{-1}(3 + \sqrt{5})\omega)$$

Предельную характеристику, приходящую в центр сопла, обозначим C_0^- . Ниже исследуется движение газа, когда в центр сопла по характеристике C_0^- приходит слабый разрыв. Область, расположенную между отрицательной полуосью x и характеристикой C_0^- , обозначим цифрой 1. Если течение не содержит ударной волны, исходящей из центра сопла, то существует вторая предельная характеристика C_0^+ . Цифрой 2 пометим область между характеристиками C_0^- и C_0^+ . Выхлопной участок сопла от C_0^+ до положительной полуоси x обозначим 3. Если через центр канала проходит ударная волна, то она разделяет области 2 и 3.

В случае образования ударной волны функции u, v удовлетворяют дополнительным граничным условиям на скачке [4]

$$(1.3) \quad 2(dx/dy)^2 = u_3 + u_2, \quad (u_3 - u_2) dx/dy = v_2 - v_3$$

где $x = x(y)$ — уравнение фронта волны, индексами обозначены значения искомых функций на разных сторонах скачка.

2. Приведем некоторые результаты [1, 2, 5—7], относящиеся к частному случаю граничных условий (1.2)

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u(x, 0) &= A_0 x, \quad x < 0, \quad u(x, 0) = B_0 x, \quad x > 0. \\ v(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Соответствующая задача Коши (1.1), (2.1) имеет автомодельное решение

$$(2.2) \quad u = y^2 f_0(\zeta), \quad v = y^3 g_0(\zeta), \quad \zeta = xy^{-2}$$

При подстановке (2.2) в (1.1) получается нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(2.3) \quad \begin{aligned} (4\zeta^2 - f_0) f_0' - 4\zeta f_0 + (3 + \omega) g_0 &= 0 \\ 2f_0 - 2\zeta f_0' - g_0' &= 0 \end{aligned}$$

Система (2.3) обладает особыми точками $\zeta = z_-$ и $\zeta = z_+$, которые соответствуют предельным характеристикам C_0^- и C_0^+ . Постоянные z_- и z_+ обозначим z_c . В точке $\zeta = z_c$ имеет место равенство

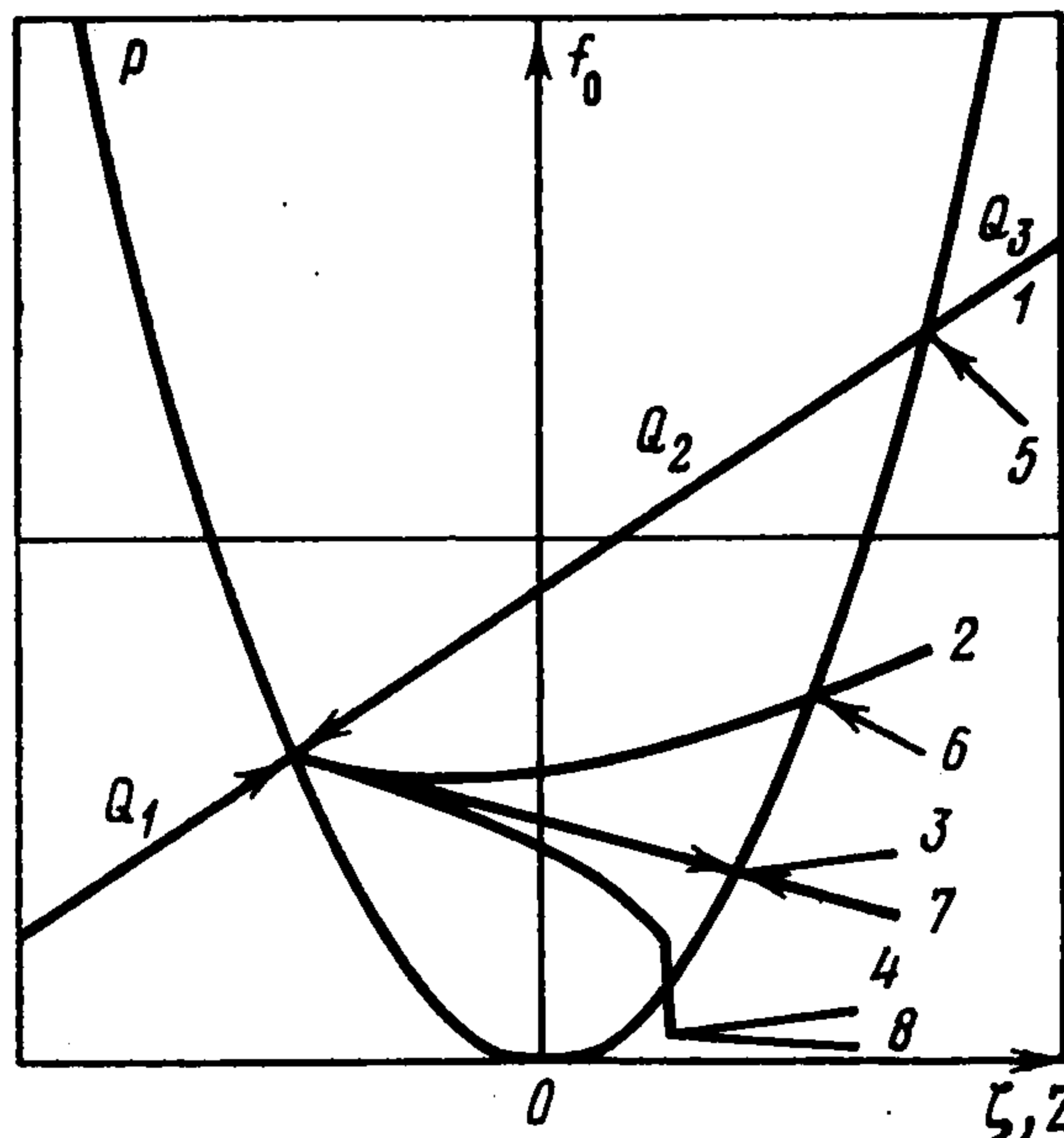
$$(2.4) \quad 4\zeta^2 - f_0(\zeta) = 0$$

Классификацию различных режимов автомодельного течения удобно представить на графике функции $f_0(\zeta)$, который показывает зависимость скорости u от x вдоль линии $y = \text{const}$ (фиг. 1). Ветви Q_1, Q_2, Q_3 изображают течение в областях 1, 2, 3 соответственно. Буквой P обозначена парабола $f_0 = 4\zeta^2$, на которой функция $f_0(\zeta)$ может иметь разрыв производных. Точки параболы P являются особыми типа узла для системы (2.3).

Интегральные кривые подходят к P либо с наклоном $f_0' = \gamma_1 z_c$ ($\gamma_1 = -4(1 - \omega) - (2 + 2\sqrt{5})\omega$), либо с наклоном $f_0' = \gamma_2 z_c$ ($\gamma_2 = 2(1 - \omega) - (2 - 2\sqrt{5})\omega$). Подход кривой к параболе с наклоном $f_0' = \gamma_1 z_c$ отмечен стрелкой.

Структура автомодельного решения зависит от отношения постоянных B_0/A_0 .

Если $B_0/A_0 = 1$, то в сопле реализуется режим 1, при котором течение непрерывно и аналитично на предельных характеристиках.



Фиг. 1

Если $r_3 < B_0/A_0 < 1$ ($r_3 = 4^{-1}(1 - \omega) + 2^{-1}(7 - 3\sqrt{5})\omega$), то имеем режим 2 непрерывного течения со слабыми разрывами на C_0^- и C_0^+ .

При $B_0/A_0 = r_3$ получаем последнее из непрерывных течений (режим 3).

Если $0 \leq B_0/A_0 < r_3$, то в потоке образуется скачок уплотнения (режим 4).

Течения 1—4 характерны тем, что скорость потока на выходе из сопла сверхзвуковая, в предельном случае $B_0/A_0 = 0$ — звуковая.

В режимах 5—8 в потоке образуются

МСЗ, прилегающие к стенкам канала и смыкающиеся на оси.

Если $r_5 < B_0/A_0 < r_7$ ($r_7 = -2^{-1}(1 - \omega) - 2^{-1}(3 - \sqrt{5})\omega$), то течение в МСЗ безударно (режим 6).

Режимы 5 ($B_0/A_0 = r_5$) и 7 ($B_0/A_0 = r_7$) являются граничными для непрерывных течений в МСЗ.

Если $r_7 < B_0/A_0 < 0$, то реализуется режим 8 с образованием в МСЗ скачка уплотнения.

3. Построим высшие приближения к автомодельному течению (2.2), так, чтобы на оси сопла получалось распределение скорости (1.2).

Если применять обычное координатное разложение по степеням y с коэффициентами, зависящими от ζ , как в [9], то в коэффициентах получается нарастание особенностей в окрестности точки $\zeta = z_c$. Такое решение непригодно вблизи предельной характеристики C_0 . Указанная сингулярность объясняется отклонением неавтомодельной характеристики C_0 от линии $\zeta = z_c$.

Для получения равномерно пригодного решения воспользуемся методом деформированных координат [8], согласно которому решение представляется в параметрической форме

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u &= y^2 [f_0(z) + y^{2k} f_1(z) + y^{4k} f_2(z) + \dots] \\ v &= y^3 [g_0(z) + y^{2k} g_1(z) + y^{4k} g_2(z) + \dots] \\ \zeta &= z + y^{2k} \xi_1(z) + y^{4k} \xi_2(z) + \dots \end{aligned}$$

где z — новая независимая переменная. Значение $z = z_c$ определяет пре-

дельную характеристику C_0 . Деформирующие функции $\xi_i(z)$ выбираются так, чтобы особенности в представителях скорости $f_i(z)$, $g_i(z)$ не возрастали.

Для нахождения f_i , g_i ($i = 1, 2, \dots$) следует решить рекуррентную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(3.2) \quad L_1(f_1, g_1) = (4z^2 - f_0) \xi_1' f_1' + (2 + 2k) (2f_0 - 4zf_0') \xi_1$$

$$M_1(f_1, g_1) = -2f_0 \xi_1' + (2 + 2k) \xi_1 f_0'$$

$$(3.3) \quad L_2(f_2, g_2) = (f_1' - \xi_1' f_0') [(4z^2 - f_0) \xi_1' - (2 + 2k) 4z \xi_1 + f_1] + \text{NST}, \quad M_2(f_2, g_2) = \text{NST}$$

$$L_i \equiv (4z^2 - f_0) f_i' - [f_0' + 2z(2 + 2ki)] f_i + (3 + \omega + 2ki) g_i$$

$$M_i \equiv -2z f_i' + (2 + 2ki) f_i - g_i'$$

Через NST обозначены члены, которые не вызывают нарастания особенностей в f_2 , g_2 по сравнению с f_1 , g_1 .

Система (3.2), (3.3) обладает особой точкой $z = z_c$, поскольку при $z = z_c$ имеет место равенство (2.4).

Найдем поведение функций f_1 , g_1 , ξ_1 в окрестности z_c . Так как в точке z_c указанные функции имеют разрывы производных, то необходимо отдельно рассматривать левую и правую половины окрестности точки z_c . Для определенности рассмотрим левую половину ($z \rightarrow z_c - 0$).

Решение системы (3.2) запишем в виде

$$(3.4) \quad f_1(z) = F_1(z) + f_0'(z) \xi_1(z), \quad g_1(z) = G_1(z) + g_0'(z) \xi_1(z)$$

Здесь F_1 , G_1 — решение однородной системы

$$(3.5) \quad L_1(F_1, G_1) = 0, \quad M_1(F_1, G_1) = 0$$

Вторые слагаемые в (3.4) представляют собой частное решение неоднородной системы (3.2).

Разложим функцию $F_1(z)$ в ряд при $z \rightarrow z_c - 0$

$$(3.6) \quad F_1(z) = F_{10} + F_{11} \Delta + \dots + F_{1\mu} |\Delta|^\mu + \dots, \quad \Delta = z - z_c$$

Аналогичное разложение справедливо для $G_1(z)$. Коэффициенты ряда (3.6) линейно зависят от постоянных A_1 , B_1 из (1.2), что видно после преобразования (1.2) в условия для функций f_1 , g_1 при $z \rightarrow \pm \infty$. Показатель особенности μ первого члена нерегулярной части подсчитывается по формулам

$$(3.7) \quad \mu = (1/2 + 2k/3) (1 - \omega) + \omega [15 - 5\sqrt{5} + 2k(5 - \sqrt{5})] / 10$$

если $f_0'(z_c - 0) = \gamma_1 z_c$

$$(3.8) \quad \mu = (2 + 4k/3) (1 - \omega) + \omega [15 + 5\sqrt{5} + 2k(5 + \sqrt{5})] / 10$$

если $f_0'(z_c - 0) = \gamma_2 z_c$

Найдем разложение функции $\xi_1(z)$ при $z \rightarrow z_c - 0$. Анализ правых частей системы (3.3) показывает, что особенности в f_2 , g_2 не возрастают по сравнению с f_1 , g_1 , если положить

$$(3.9) \quad (4z^2 - f_0) \xi_1' - (2 + 2k) 4z \xi_1 + f_1 = O(\Delta)$$

Предположим сначала, что показатель особенности μ в разложении (3.6) принимает значение $0 < \mu < 1$. Тогда из (3.9), (3.4), (3.6) следует, что

$$(3.10) \quad \xi_1(z) = \xi_{10} + \xi_{1\mu} |\Delta|^\mu + O(\Delta)$$

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \xi_{10} &= F_{10}/[4z_c(2+2k) - f_0'(z_c - 0)] \\ \xi_{1\mu} &= F_{1\mu}/[6z_c(1-\omega) + 4\sqrt{5z_c\omega}] \end{aligned}$$

Поскольку коэффициенты F_{10} , $F_{1\mu}$ — это некоторые линейные комбинации постоянных A_1 , B_1 , то из (3.11) следует, что ξ_{10} , $\xi_{1\mu}$ также линейно зависят от A_1 , B_1 .

Если $\mu \geq 1$, то при $z \rightarrow z_c - 0$

$$(3.12) \quad \xi_1(z) = \xi_{10} + O(\Delta), \quad \mu > 1$$

$$(3.13) \quad \xi_1(z) = \xi_{10} + \xi_{11}\Delta \ln |\Delta| + O(\Delta), \quad \mu = 1$$

Как показывает анализ равномерно-пригодного решения (3.1), на предельной характеристике C_0 образуется либо конечный разрыв первых производных скорости по координатам, либо более слабая особенность.

4. Покажем, что первая поправка в решении (3.1) может привести к образованию предельной линии в окрестности C_0 , несмотря на то, что главный автомодельный член (2.2) определяет поле скоростей без таковой.

Рассмотрим якобиан преобразования переменных $(\zeta, y) \rightarrow (z, y)$

$$J = \partial(\zeta, y)/\partial(z, y) = \partial\zeta/\partial z$$

С учетом (3.1) получим

$$(4.1) \quad J = 1 + y^{2k}\xi_1'(z) + y^{4k}\xi_2'(z) + \dots$$

Исследуем J в окрестности C_0 , устремляя z к $z_c - 0$ при $y = \text{const}$. Сначала рассмотрим случай $0 < \mu < 1$. Подставляя (3.10) в (4.1) и учитывая, что особенности функций ξ_i не возрастают, получим

$$J = 1 + y^{2k}[-\mu\xi_{1\mu} |\Delta|^{\mu-1} + O(1)] + y^{4k}O(|\Delta|^{\mu-1}) + \dots$$

Так как показатель $\mu - 1$ отрицателен, то J обращается в бесконечность на C_0 . Если $\xi_{1\mu} < 0$, то $J \rightarrow +\infty$ и якобиан не меняет знака при соответствующем подходе к предельной характеристике.

В случае $\xi_{1\mu} > 0$ имеем $J \rightarrow -\infty$ и, следовательно, якобиан меняет знак с плюса на минус в окрестности C_0 , что свидетельствует об образовании предельной линии.

Если $\mu = 1$, то, используя (3.13), (4.1), получим

$$J = 1 + y^{2k}[\xi_{11} \ln |\Delta| + O(1)] + y^{4k}O(\ln |\Delta|) + \dots$$

В этом случае предельная линия образуется при $\xi_{11} > 0$ и отсутствует при $\xi_{11} < 0$.

Предположим теперь, что $\mu > 1$. Тогда при $z \rightarrow z_c - 0$ функция $\xi_1(z)$ имеет вид (3.12). Отсюда $\xi_1'(z) = O(1)$, аналогично $\xi_i'(z) = O(1)$, $i = 2, 3, \dots$. Поэтому в (4.1) поправки малы по сравнению с главным членом, равным единице, и якобиан не меняет знака при подходе к C_0 .

Суммируя изложенные результаты, получаем, что условием возникно-

вения предельной линии за счет первой поправки является

$$(4.2) \quad 0 < \mu \leq 1, \xi_{1\mu} > 0$$

Анализ уравнения предельной линии $J = 0$ показывает, что она проходит через центр сопла.

5. Неравенство (4.2) определяет некоторое условие, наложенное на величины k, A_1, B_1 в данных Коши (1.2), достаточное для возникновения в потоке предельной линии.

Предположим вначале, что в данных Коши (1.2) показатель k принимает значения

$$(5.1) \quad k > k_* \quad (k_* = (1 - \omega) 3/4 + \omega \sqrt{5}/2)$$

Тогда из (5.1), (3.7), (3.8) вытекает, что $\mu > 1$ и предельная линия не образуется при $z \rightarrow z_c - 0$.

Пусть теперь k лежит в интервале $0 < k \leq k_*$.

Если в автомодельном решении $f_0'(z_c - 0) = \gamma_2 z_c$, то показатель μ подсчитывается по формуле (3.8), откуда находим $\mu > 1$. Если $f_0'(z_c - 0) = \gamma_1 z_c$, то μ определяется формулой (3.7) и удовлетворяет неравенству

$$(1 - \omega)/2 + \omega (15 - 5\sqrt{5})/10 < \mu \leq 1$$

Таким образом, если в граничном условии (1.2) показатель k принимает значения $0 < k \leq k_*$, производная автомодельного решения равна $f_0'(z_c - 0) = \gamma_1 z_c$ и для первой поправки выполняется условие $\xi_{1\mu} > 0$ (некоторое неравенство для A_1, B_1), то в окрестности характеристики C_0 при $z \rightarrow z_c - 0$ образуется предельная линия.

Аналогичное достаточное условие образования предельной линии справедливо и при $z \rightarrow z_c + 0$ (с оговоркой, что при $0 < k < k_*$ неравенство $\xi_{1\mu} > 0$ заменяется на $\xi_{1\mu} < 0$).

6. Исследуем возмущения различных режимов течения, показанных на фиг. 1, где стрелками обозначены подходы к параболе P со значением $f_0'(z_c \pm 0) = \gamma_1 z_c$. Учитывая результаты предыдущего пункта, можно такие подходы интерпретировать как опасные, когда первое приближение способно вызвать появление предельной линии.

Здесь и далее будем считать, что $0 < k < k_*$. Случай $k = k_*$, когда вдоль C_0 распространяется логарифмическая особенность, требует отдельного изучения, но качественно он подобен рассматриваемому.

В области 1 предельная линия появляется при $z \rightarrow z_- - 0$, если для первой поправки имеет место условие $\xi_{1\mu} > 0$. Перепишем неравенство $\xi_{1\mu} > 0$, используя постоянную A_1 в данных Коши (1.2).

Исключим из системы (3.5) функцию $G_1(z)$. Тогда для $F_1(z)$ получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$(6.1) \quad (4z^2 - f_0)F_1'' - [2z(1 + \omega + 4k) + 2f_0']F_1' + [(2 + 2k) \times \\ \times (1 + 2k + \omega) - f_0'']F_1 = 0$$

Перейдем в (6.1) к новой независимой переменной τ [9]

$$(6.2) \quad z = 8^{-1}(1 + R)A_0 - 4^{-1}RA_0\tau, \quad R = 3(1 - \omega) + \omega\sqrt{5}$$

Для F_1 получается гипергеометрическое уравнение [10] с параметрами $a = -1 - k$, $b = -1/2 - \omega/2 - k$, $c = -R^{-1} [4^{-1}(1 + R)(1 + \omega + 4k) + 2]$.

Из (6.2) видно, что отрицательная полуось x определяется значением $\tau = +\infty$, характеристика C_0^- — значением $\tau = 1$. При $z \rightarrow z_- = 0$ переменная $\tau \rightarrow 1 + 0$. В соответствии с граничным условием на оси (1.2) функцию F_1 при $\tau \rightarrow \infty$ возьмем в виде

$$(6.3) \quad F_1 = A_1 (\tau A_0 R/4)^{-a} F(a, a+1-c, a+1-b; \tau^{-1})$$

Аналитическое продолжение решения (6.3) в окрестность $\tau = 1$ имеет вид [10]

$$(6.4) \quad F_1 = A_1 (\tau A_0 R/4)^{-a} [D_1 F(a, a+1-c, 1-\mu; 1-\tau^{-1}) + D_2 (1-\tau^{-1})^\mu F(1-b, c-b, 1+\mu; 1-\tau^{-1})]$$

$$(6.5) \quad D_1 = \Gamma(a+1-b)\Gamma(\mu)/[\Gamma(1-b)\Gamma(c-b)] \\ D_2 = \Gamma(a+1-b)\Gamma(-\mu)/[\Gamma(a)\Gamma(a+1-c)]$$

где $\mu = c - a - b$, что согласовано с (3.7). Используя (6.4), найдем разложение F_1 при $\tau \rightarrow 1 + 0$

$$F_1 = A_1 (A_0 R/4)^{-a} [D_1 + D_2 (\tau - 1)^\mu + O(\tau - 1)]$$

Сравнивая его с (3.6), (3.11), определим коэффициент $F_{1\mu}$, затем $\xi_{1\mu}$

$$\xi_{1\mu} = A_1 (A_0 R/4)^{-\mu-a} D_2 / [(6 - 6\omega + 4\sqrt{5}\omega)z_-]$$

Как показывает анализ формул (6.5), в плоском течении коэффициент $D_2 < 0$ при любых k из интервала $0 < k < 3/4$. В осесимметричном потоке $D_2 < 0$ при $0 < k < 1$, $D_2 > 0$ при $1 < k < \sqrt{5}/2$ и $D_2 = 0$ при $k = 1$. Кроме того, учтем, что $z_- < 0$. Тогда достаточное условие образования предельной линии в области 1 можно записать в виде

$$(6.6) \quad A_1 > 0, 0 < k < 3/4 \quad (\omega = 0) \\ A_1 > 0, 0 < k < 1; A_1 < 0, 1 < k < \sqrt{5}/2 \quad (\omega = 1)$$

Если $A_1 = 0$, то в области 1 $F_1 \equiv G_1 \equiv 0$, поэтому вопрос о предельных линиях зависит от следующего приближения. В случае $k = k_*$ в центр сопла приходит логарифмическая особенность. При $k = 1$ коэффициент $D_2 = 0$, поэтому течение аналитично в области 1, включая C_0^- , т. е. предельная линия не образуется.

Как показывает расчет, предельную линию, приходящую в центр сопла, нельзя устранить при помощи скачка уплотнения. Поэтому условия (6.6) определяют недопустимую задачу Коши.

7. Исследуем режимы 1—4 работы сопла, когда скорость на выходе сверхзвуковая. Как показывает фиг. 1, для режима 1 предельная линия может образоваться в области 2 при $z \rightarrow z_- + 0$. Выполняя такие же расчеты, как и в предыдущем пункте, приходим к выводу, что линия бесконечных ускорений появляется при условии

$$(7.1) \quad (TE)B_1 + (HQ)A_1 > 0, 0 < k < k_* \\ E = \frac{\Gamma(c)\Gamma(-\mu)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \left[1 - \frac{\sin \pi(c-a)\sin \pi(c-b)}{\sin \pi a \sin \pi b} \right]$$

$$Q = \Gamma(-\mu) \Gamma(1-a) \Gamma(1-b) / [\Gamma(1+a-c) \Gamma(1+b-c) \Gamma(\mu)]$$

$$H = \Gamma(a+1-b) \Gamma(\mu) / [\Gamma(1-b) \Gamma(c-b)]$$

$$T = \Gamma(a+1-b) \Gamma(1-c) / [\Gamma(a+1-c) \Gamma(1-b)]$$

Можно убедиться в том, что (7.1) определяет недопустимую задачу Коши при возмущении автомодельного режима 1, поскольку предельная линия приходит в центр сопла. Как показывает фиг. 1, предельная линия не появляется при $z \rightarrow z_- + 0$, $z_+ - 0$, $z_+ + 0$ в режиме 2.

Для режима 3 линия бесконечных ускорений может образоваться в области 2 при $z \rightarrow z_+ - 0$. Это происходит при выполнении условия

$$(7.2) \quad (A_0^{-a} H E K_-) A_1 + (B_0^{-a} T Q K_+) B_1 > 0, \quad 0 < k < k_*$$

$$K_{\pm} = [4z_{\pm}(2+2k) - f_0'(z_{\pm} \mp 0)] / [4z_{\pm}(2+2k) - f_0'(z_{\pm} \pm 0)]$$

В этом случае предельная линия исходит из центра сопла и расчет показывает, что ее можно устранить скачком уплотнения. Таким образом, получается пример течения в сопле Лавала с ударной волной, образовавшейся за счет поправки к непрерывному автомодельному решению.

Следовательно, течения с ускорением по направлению к выхлопной части сопла (режимы 1, 2) остаются безударными при малых возмущениях за исключением предельного режима 3 с разрывами первых производных составляющих скорости по координатам на обеих проходящих через центр сопла характеристиках.

Рассмотрим возмущение автомодельного режима 4. Как показано на фиг. 1, предельная линия при $z \rightarrow z_- + 0$ образоваться не может.

Исследуем режимы 5—8 течений с местными сверхзвуковыми зонами, сомкнувшимися на оси сопла. В режиме 5 предельная линия образуется в области 2 при $z \rightarrow z_- + 0$, если выполняется условие

$$(7.3) \quad (A_0^{-a} Q H) A_1 + [(-B_0)^{-a} H E K_+] B_1 > 0, \quad 0 < k < k_*$$

Бесконечные ускорения появляются также в области 3 при $z \rightarrow z_+ + 0$, если

$$(7.4) \quad B_1 > 0, \quad 0 < k < 3/4 \quad (\omega = 0)$$

$$B_1 > 0, \quad 0 < k < 1; \quad B_1 < 0, \quad 1 < k < \sqrt{5}/2 \quad (\omega = 1)$$

Расчет показывает, что условие (7.3) определяет недопустимую задачу Коши (1.2); неравенства (7.4) выражают условия образования скачка уплотнения.

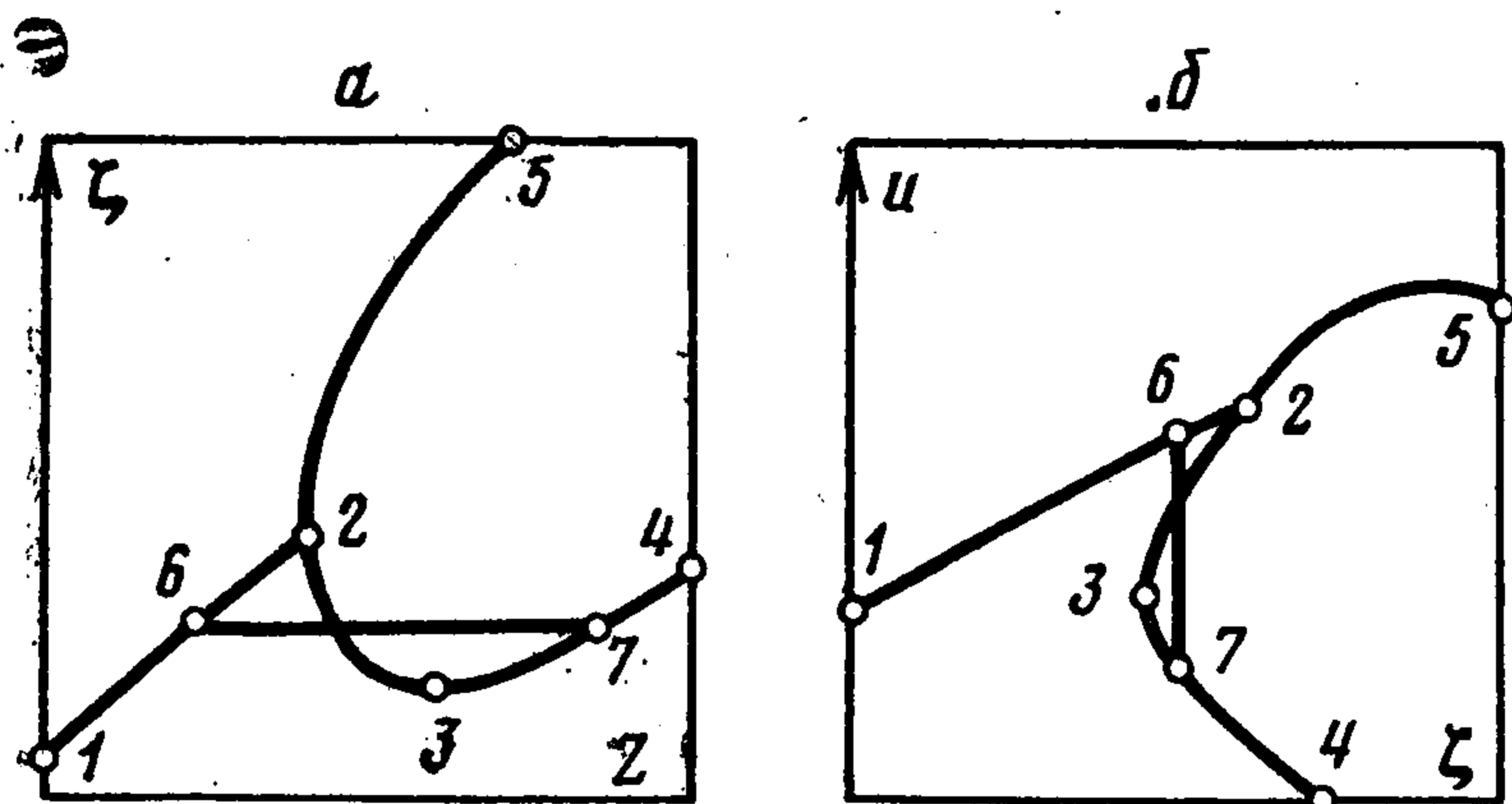
Как видно из фиг. 1, для режима 6 предельная линия может образоваться в области 3 при $z \rightarrow z_+ + 0$. Достаточные условия ее появления даны неравенствами (7.4). Она устраняется введением ударной волны.

Если возмущается автомодельный режим 7, то предельная линия может появиться в области 3 при $z \rightarrow z_+ + 0$. Достаточные условия ее образования даны неравенствами (7.4). Бесконечные ускорения в области 2 при $z \rightarrow z_+ - 0$ будут при выполнении неравенства

$$(7.5) \quad (A_0^{-a} H E K_-) A_1 + [(-B_0)^{-a} Q H] B_1 > 0, \quad 0 < k < k_*$$

Если выполняется хотя бы одно из условий (7.4) или (7.5), то в потоке появляется ударная волна.

Таким образом, условие безударности автомодельного течения в соплах с МСЗ, полученное в [2], $r_5 \leq B_0/A_0 \leq r_7$ недостаточно для неавтомодельного течения с распределением скорости на оси в виде (1.2) с $0 < k \leq k_*$. Поскольку возмущение любого автомодельного режима 5—7 может привести к образованию скачка уплотнения (для чего достаточно выполнения (7.4)), то в неавтомодельных течениях МСЗ, сомкнувшимися на



Фиг. 2

оси сопла, ударная волна может появиться независимо от того, лежит или нет горло канала ниже по потоку от его центра.

8. Покажем, как построить ударную волну, порождаемую поправкой к непрерывному автомодельному решению (2.2). Для определенности рассмотрим возмущение автомодельного режима 6 при условиях (7.4).

В равномерно-пригодном решении (3.1) величины u , v , ζ — это функции переменных z , y . Рассмотрим функцию $\zeta(z, y)$ в окрестности характеристики C_0^+ . Для этого воспользуемся разложениями (3.1), (3.10), (3.12).

Имеем ($\Delta = z - z_+$)

$$(8.1) \quad \zeta = z + y^{2k} [\xi_{10} + O(\Delta)] + \dots \quad z \rightarrow z_+ - 0$$

$$(8.2) \quad \zeta = z + y^{2k} [\xi_{10} + \xi_{1\mu} \Delta^\mu + O(\Delta)] + \dots \quad z \rightarrow z_+ + 0$$

На фиг. 2, а показан качественный график зависимости величины ζ от переменной z при некотором малом фиксированном значении y . Линия 1—6—2 изображает функцию $\zeta(z, y)$, определенную (8.1). Кривая 2—5 соответствует зависимости $\zeta(z, y)$ из (8.2), когда $\xi_{1\mu} > 0$, и предельная линия в окрестности C_0^+ не образуется. Кривая 2—3—7—4 изображает график функции (8.2) при $\xi_{1\mu} < 0$, причем точка минимума 3 соответствует предельной линии. Точка 2 изображает предельную характеристику C_0^+ . Отрезок 6—7 — скачок уплотнения, отсекающий область трехзначности в случае $\xi_{1\mu} < 0$. На фиг. 2, б показан качественный график зависимости продольной компоненты скорости возмущения u от переменной ζ при фиксированном значении y .

Прежде чем построить скачок уплотнения, найдем уравнение предельной линии в виде $z = z_l(y)$. Так как она отличается от характеристики C_0^+ на малые высших порядков, то $z_l(y)$ можно разложить в ряд по степеням y с главным членом z_+

$$(8.3) \quad z = z_l(y) = z_+ + y^\alpha l + \dots$$

где α , l — неизвестные постоянные. Для нахождения α и l подставим (8.3) в уравнение предельной линии $\partial\zeta/\partial z = 0$. Получим $\alpha = 2k/(1 - \mu)$, $l = (-\mu \xi_{1\mu})^{1/(1-\mu)}$.

Если в равномерно-пригодном решении (3.1) показатель степени y , равный $2ki$, меньше α , то соответствующие коэффициенты при y^{2ki} : $f_i(z)$, $g_i(z)$, $\xi_i(z)$ должны быть непрерывными в точке $z = z_+$. До этого порядка граница областей 2 и 3 остается характеристикой C_0^+ . Если показатель

$2ki$ в (3.1) удовлетворяет неравенству $2ki \geq \alpha$, то области 2 и 3 следует соединять через скачок уплотнения, чтобы устранить предельную линию.

Передний фронт скачка изображается точкой 6 на фиг. 2. Его уравнение запишем в виде

$$(8.4) \quad z = z_2(y) = z_+ + y^\alpha s_2 + \dots$$

где s_2 подлежит определению.

Задний фронт скачка изображается точкой 7 на фиг. 2 и представляется в виде разложения

$$(8.5) \quad z = z_3(y) = z_+ + y^\alpha s_3 + \dots$$

где s_3 — неизвестная постоянная.

Подставляя (8.4), (8.5) в (3.1), найдем значения функций u , v на переднем и заднем фронте ударной волны. Используя затем формулы ударного перехода (1.3), получим систему уравнений для неизвестных s_2 , s_3

$$s_2 = s_3 + \xi_{1\mu} s_3^\mu, \quad \mu s_2 + s_3 + \mu \xi_{1\mu} s_3^\mu = 0$$

Эта система имеет решение

$$s_3 = [-2\mu(1+\mu)^{-1} \xi_{1\mu}]^{1/(1-\mu)}, \quad s_2 = (\mu-1)(2\mu)^{-1} s_3$$

Чтобы построить ударную волну с учетом членов более высокого порядка, чем y^α , необходимо включать в разложения (3.1) в области 3 позади скачка члены $y^{\alpha+2k}$, $y^{\alpha+4k}$, Подсчитав скачок скорости, получим

$$u_3 - u_2 = -[6(1-\omega) + 4\sqrt{5}\omega] z_+ s_3 y^{2+\alpha} + O(y^{2+\alpha+2k})$$

Авторы благодарят Фальковича С. В. за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. К теории сопел Лавалья.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1945, т. 9, № 5, с. 387—422.
2. Рыжов О. С. Образование ударных волн в соплах Лавалья.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 2, с. 309—337.
3. Горьков Л. П., Потаевский Л. П. Возникновение ударной волны при отражении слабого разрыва от звуковой линии.— Докл. АН СССР, 1962, т. 144, № 2, с. 293—296.
4. Гудерлей К. Г. Теория рколовзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960, 421 с.
5. Фалькович С. В. К теории сопла Лавалья.— ПММ, 1946, т. 10, вып. 4, с. 503—512.
6. Рыжов О. С. О течениях в окрестности поверхности перехода в соплах Лавалья.— ПММ, 1958, т. 22, вып. 4, с. 433—443.
7. Рыжов О. С. Исследование трансзвуковых течений в соплах Лавалья. М.: ВЦ АН СССР, 1965. 238 с.
8. Найфе А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976, 455 с.
9. Фалькович С. В., Чернов И. А., Горский В. Б. Обратная задача сопла Лавалья.— В кн.: Трансзвуковые течения газа. Вып. 2. Изд-во Саратовск. ун-та, 1968, с. 152—168.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965, 294 с.

Саратов

Поступила в редакцию
2.IX.1980