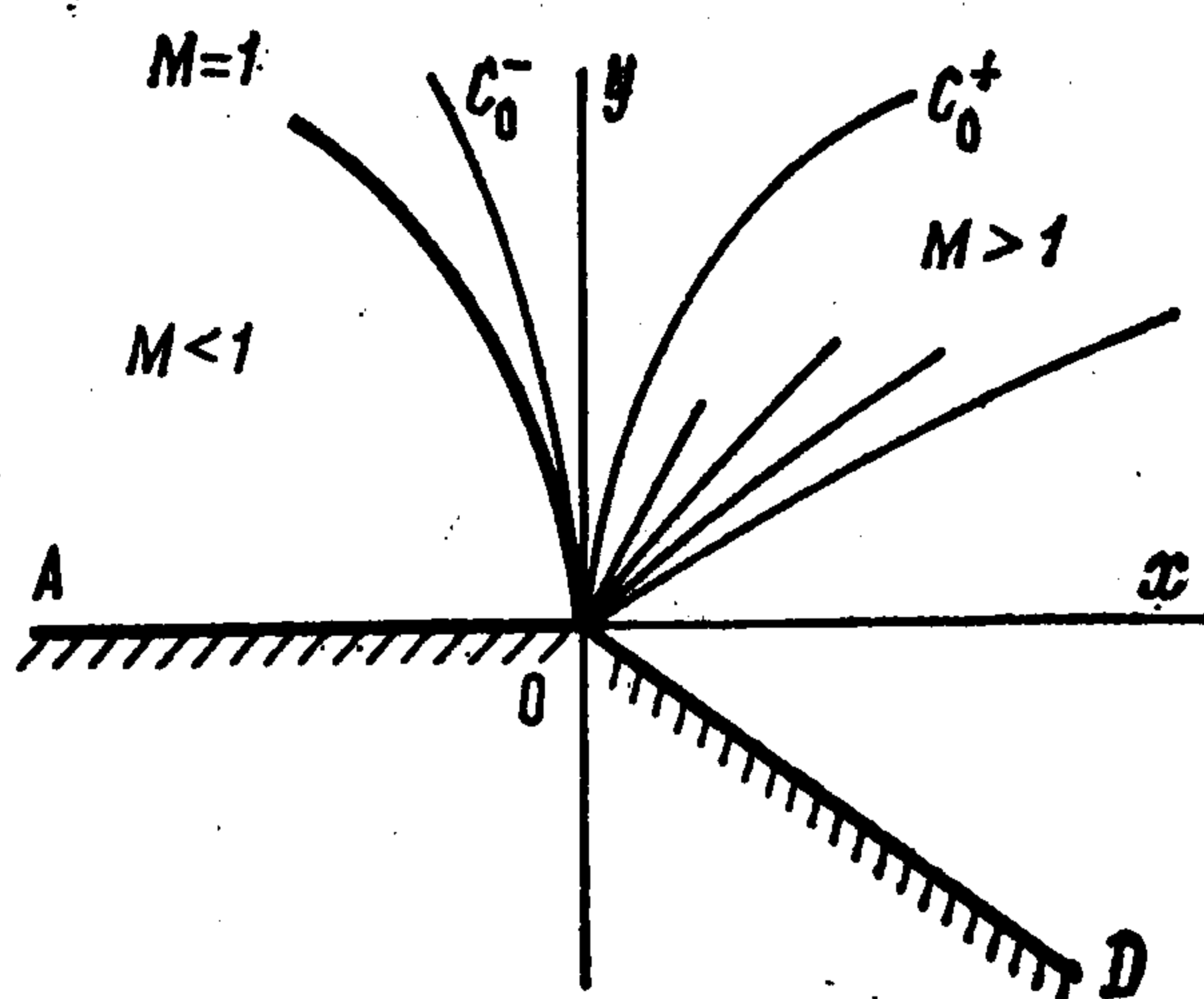


УДК 533.6.011

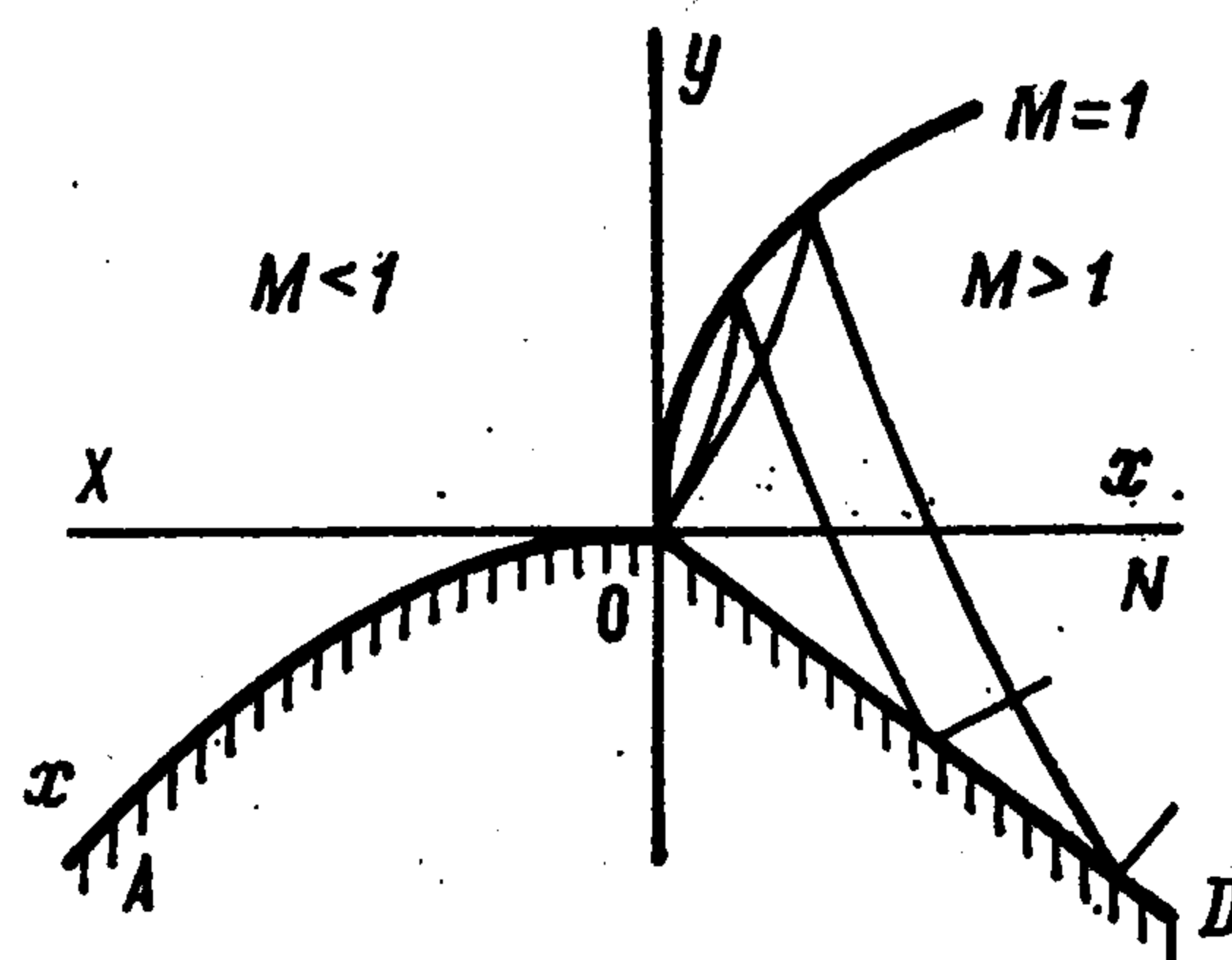
## ТРАНСЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ РАЗРЕЖЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ВЫПУКЛОГО УГЛА

Диесперов В. Н.

Строится новое решение задачи обтекания угла потоком идеального газа в случае, когда из угловой точки выходит звуковая линия и образуется смешанное течение. Оно удовлетворяет уравнению Фальковича — Кармана, принадлежит к его классу автомодельных решений [1] и реализуется при значении параметра автомодельности  $n = 2$ . Этому решению соответствует изображенное на фиг. 1 течение, в котором возмущения



Фиг. 1



Фиг. 2

из сверхзвуковой части потока достигают угловой точки. Соответствующая область влияния ограничена предельной  $C_0^-$ -характеристикой. Вдоль предельной  $C_0^+$ -характеристики в область течения распространяются разрывы вторых производных от компонент вектора скорости. В области за предельной  $C_0^+$ -характеристикой течение переходит в течение Прандтля — Майера. Ускорение в угловой точке конечно. Звуковая линия вогнута в сторону набегающего потока. Построенное при  $n = 2$  течение существенно отличается от течения Вальо-Лаурина, которое реализуется при  $n = 5/4$  и было подробно исследовано в работах [2—6], и течений типа Вальо-Лаурина, которые также описываются автомодельными решениями уравнения Фальковича — Кармана при обтекании угловых точек с дозвуковыми образующими, имеющими ненулевую кривизну [7].

Также исследовано трансзвуковое обтекание выпуклых стенок, заданных уравнением  $y = 0$  при  $x \leq 0$  и  $y = cx^{5/2}$  ( $c < 0$ ) при  $x \geq 0$ , и влияние на картину течения проходящего в угловую точку вдоль предельной  $C_0^-$ -характеристики разрыва первых производных компонент вектора скорости.

1. Рассматривается обтекание угловой точки  $O$ , образованной пересечением двух гладких кривых  $AO$  и  $OD$  (фиг. 1, 2).

Введем ортогональную систему координат  $(x, y)$ , отрицательная полуось  $x$  которой совпадает с  $AO$ , а положительная (обозначим ее через  $ON$ ,

фиг. 2) — с касательной к  $AO$  в точке  $O$ . Величина  $y$  отсчитывается по внешней нормали к  $AON$ . Кривизну образующей  $AO$  зададим формулой

$$(1.1) \quad v(x) = -3 \frac{n-1}{n} B(n) (-x)^{2-3/n} [1 + \kappa(x)], \quad x \leq 0$$

где  $\kappa(x) = o(1)$  при  $x \rightarrow 0$ . Это условие эквивалентно тому, что в декартовой системе координат  $(X, y)$ , где ось  $X$  совпадает с касательной к  $AO$  в точке  $O$ , уравнение образующей  $AO$  в окрестности точки  $O$  будет иметь вид

$$(1.2) \quad y = -\frac{B(n)}{(4-3/n)} (-X)^{4-3/n} + \dots$$

Кривизна (1.1) образующей  $AO$  при  $n \geq 3/2$  будет  $O(1)$ . Если  $B(n) \neq 0$ , то при  $n \in (1, 3/2)$  величина  $|v(x)| \rightarrow \infty$ , когда  $x \rightarrow 0$ . При некоторых значениях  $n$  величина коэффициента  $B(n)$  становится равной нулю. Эти значения  $n$  будут давать  $v(x) \equiv 0$  и соответствовать обтеканию угла. Обозначим далее через  $v_x$  и  $v_y$  проекции вектора скорости на оси  $x$  и  $y$  соответственно,  $a$  — скорость звука. В качестве характерных значений всех параметров потока берутся их критические значения. Термодинамические переменные связаны уравнением состояния идеального газа. В дальнейшем уравнения, описывающие течение, предполагаются безразмерными. Они имеют вид

$$(1.3) \quad a^2 \nabla \mathbf{q} - \mathbf{q} \nabla \frac{\mathbf{q}^2}{2} = 0, \quad \mathbf{q} = (v_x, v_y)$$

$$a^2 = \frac{1+\gamma}{2} [1 - \mu^2 (v_x^2 + v_y^2)], \quad \mu^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad \nabla \times \mathbf{q} = 0$$

Метрика задается формулами

$$dl^2 = (1 - \sigma y)^2 dx^2 + dy^2, \quad \sigma(x) = \begin{cases} v(x), & x \leq 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

Окрестность угловой точки  $O$ , в которой  $|\sigma y| \ll 1$ , обозначим  $G$ . Введем скорости возмущений  $v_x = 1 + u$ ,  $v_y = v$  ( $|u| \ll 1$ ,  $|v| \ll 1$ ). Тогда в области  $G$  систему (1.3) можно упростить и в первом приближении представить в виде

$$(1.4) \quad -(1 + \gamma)u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\sigma(x)$$

Делая замену

$$v = V - \int_0^x \sigma(x) dx$$

и вводя потенциал  $\varphi$  скоростей  $(u, V)$ , получим уравнение Фальковича — Кармана

$$(1.5) \quad -(1 + \gamma) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Следуя [2, 5—7], будем искать решение уравнения (1.5) в области  $G$  в классе автомодельных функций, удовлетворяющее следующим условиям:

а) при  $y \rightarrow 0$ ,  $x < 0$  компонента скорости  $v_y \rightarrow 0$  или, что эквивалентно,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = V \rightarrow \int_0^x \sigma(x) dx = B(n)(-x)^{3-3/n} + \dots$$

б) при  $y \rightarrow 0$ ,  $x > 0$  течение переходит в течение Прандтля — Майера.

При  $n = 5/4$  поставленная задача имеет решение. Оно описывает обтекание выпуклого угла, так как  $B(5/4) = 0$ , и впервые было получено Вальо-Лаурином [2]. В течении Вальо-Лаурина (фиг. 2) ускорение в угловой точке бесконечно. Возмущения из сверхзвуковой части потока ее не достигают. Со звуковой линии, которая выпукла в сторону набегающего потока, они распространяются вдоль характеристик вниз по течению. Учет кривизны дозвуковой образующей  $AO$  может производиться следующими приближениями к решению Вальо-Лаурина. При  $B(n) \neq 0$  и  $1 < n < 2$  существуют решения, также описывающие обтекание угловой точки с образующей  $AO$ , имеющей ненулевую кривизну. Учет кривизны при этом производится в первом приближении. Назовем их решениями типа Вальо-Лаурина, так как они по своему характеру совпадают с решением Вальо-Лаурина. Случай  $n = 3/2$ , когда кривизна постоянна, был рассмотрен в работе [7].

В дальнейшем основные усилия будут связаны с исследованием задачи при  $n = 2$ . Этот случай — предельный в том смысле, что при  $n \geq 2$  не реализуется течение типа Вальо-Лаурина. При  $n = 2$  будет построено решение, описывающее обтекание угла.

При произвольном значении  $n$  разрешимость задачи с условиями а) и б) наиболее удобно исследовать методом годографа. Обозначим через  $\eta$  отклонение модуля скорости от звукового значения,  $\theta$  — угол наклона вектора скорости в системе координат  $(X, y)$ . Функция тока  $\psi$  в плоскости годографа  $(\eta, \theta)$  подчиняется уравнению Трикоми. Его решение будем искать в виде

$$\psi = \theta^{2j} \chi(j, \zeta), \quad \zeta = \frac{4\eta^3}{9\theta^2}$$

Угловая точка с течением Прандтля — Майера в окрестности нее в плоскости годографа отображается на  $\Gamma_0^-$ -характеристику  $\theta = -(2\eta^{3/2})/3$ . Решение, обращающееся на этой характеристике в нуль, имеет вид

$$(1.6) \quad \psi = \theta^{2j} (1 - \zeta)^{2j+1/6} F\left(j + \frac{2}{3}, j + \frac{1}{6}, 2j + \frac{7}{6}, 1 - \zeta\right),$$

$$j = \frac{1}{6(n-1)}$$

Решение типа Вальо-Лаурина является аналитическим продолжением решения (1.6) в окрестность оси  $\theta = 0$ ,  $\eta < 0$  через ось  $\eta = 0$ ,  $\theta < 0$ . При  $n = 5/4$  функция тока  $\psi$  обращается в нуль при  $\theta = 0$ . Аналогичным образом находится решение в случае  $n = 3/2$ . Однако, если положить  $n = 2$ , то аналитическое продолжение функции (1.6) не приводит к решению  $\psi = 0$ .

2. Чтобы подробнее разобраться в этой ситуации и построить решение задачи с условиями а) и б) в случае  $n = 2$ , обратимся к уравнению Фальковича — Кармана (1.5). Его автомодельные решения и уравнения, их описывающие, имеют вид [8, 9] ( $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей)

$$\varphi = y^{3n-2}\Phi(\xi), \quad u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \lambda y^{3n-2}f(\xi), \quad V = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = y^{3n-3}g(\xi)$$

$$f(\xi) = \frac{d\Phi}{d\xi}, \quad \xi = \lambda \frac{x}{yn} \quad \lambda = (1 + \gamma)^{-1/2}$$

$$(2.1) \quad \left( n^2 \xi^2 - \frac{d\Phi}{d\xi} \right) \frac{d^2\Phi}{d\xi^2} - 5n(n-1)\xi \frac{d\Phi}{d\xi} + 3(n-1)(3n-2)\Phi = 0$$

При  $n = 2$  для функций  $f$  и  $g$  имеем

$$(2.2) \quad (4\xi^2 - f) \frac{d^2f}{d\xi^2} - \left( \frac{df}{d\xi} \right)^2 - 2\xi \frac{df}{d\xi} + 2f = 0$$

$$g = \frac{1}{3} \left[ 4\xi f + (f - 4\xi^2) \frac{df}{d\xi} \right]$$

Если перейти к фазовым переменным [1, 10]

$$f = \xi^2 F(\tau), \quad \frac{dF}{d\tau} = \Psi, \quad \tau = \ln |\xi|$$

то первое уравнение (2.2) сведется к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка [10]

$$(2.3) \quad \frac{d\Psi}{dF} = \frac{-6F - 10\Psi + 6F^2 + 7\Psi F + \Psi^2}{(4 - F)\Psi}$$

Связь между переменными  $(f, \xi)$  и  $(F, \Psi)$  дается формулами

$$(2.4) \quad F = \xi^{-2}f(\xi), \quad \Psi = -2\xi^{-2}f + \xi^{-1} \frac{df}{d\xi}$$

$$\frac{d\Psi}{dF} = \frac{1}{\Psi} \left[ 4\xi^{-2}f - 3\xi^{-1} \frac{df}{d\xi} + \frac{d^2f}{d\xi^2} \right]$$

Рассмотрим поведение интегральных кривых уравнения (2.3) на фазовой плоскости  $(F, \Psi)$  (фиг. 3) и установим их связь с решениями уравнений (2.2).

Уравнение (2.3) имеет четыре особые точки  $A(0, 0)$ ,  $B(0, 1)$ ,  $C(4, -6)$ ,  $D(4, -12)$  в конечной части плоскости  $(F, \Psi)$  и три особые точки, лежащие в бесконечности:  $E, G, Q$ . Точка  $A$  — узел и на физической плоскости соответствует оси  $x$ . В ее окрестности интегральные кривые ведут себя как

$$(2.5) \quad \left( \frac{2}{n}F + \Psi \right) = C_A \left| \frac{3}{n}F + \Psi \right|^{n/2} + \dots, \quad n = 2$$

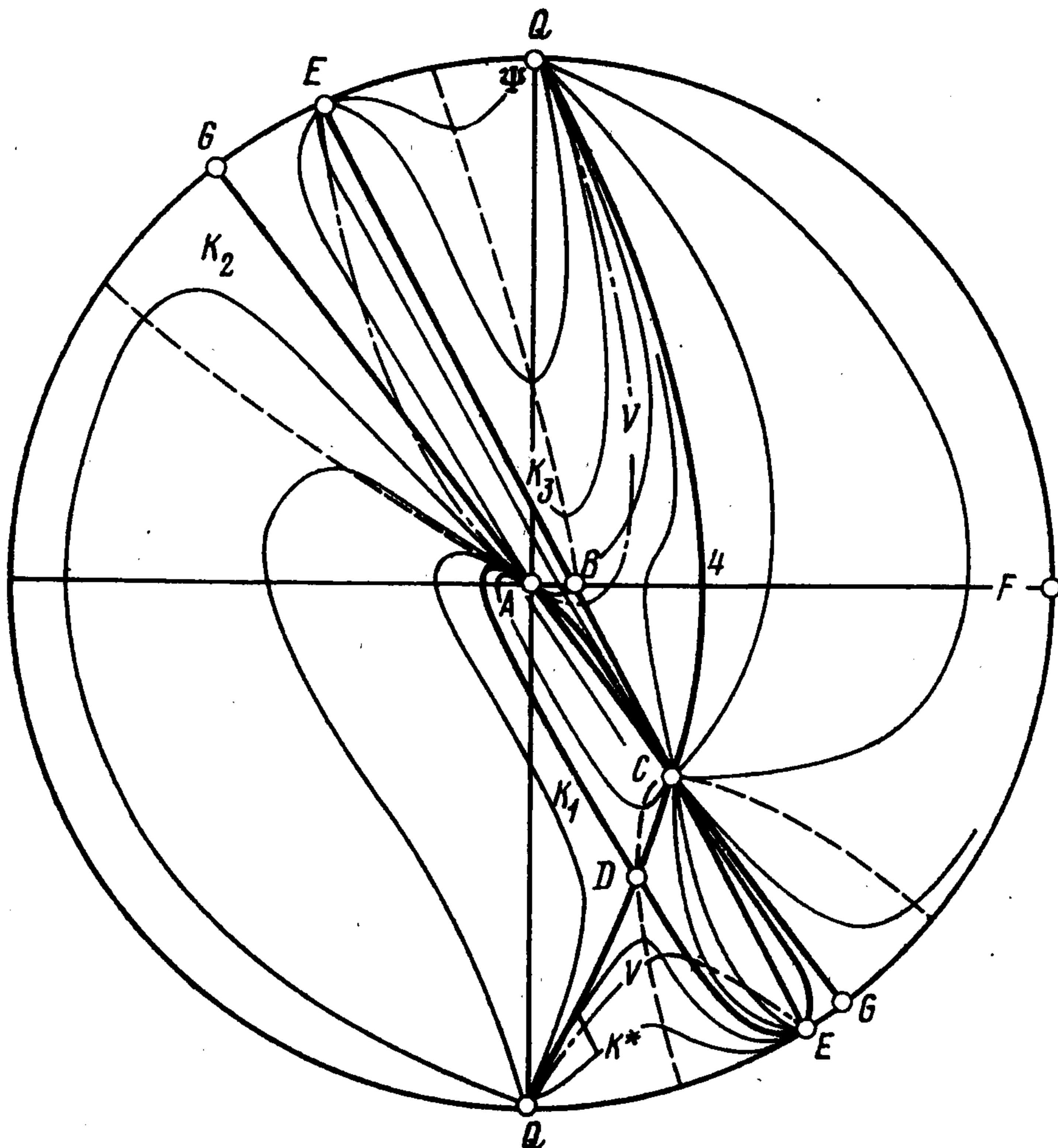
Точка  $B$  — седло. Через нее проходят две интегральные кривые. Одна из них является линейной функцией  $\Psi = 2 - 2F$  и в окрестности точки  $B$  описывает течение Прандтля — Майера. Точка  $C$  — дикритический узел и соответствует предельной  $C_0^+$ -характеристике, выходящей из угловой точки, точка  $D$  — седло и соответствует предельной  $C_0^-$ -характеристике, входящей в угловую точку.

Особая точка  $G$  — седло. В нее можно попасть только по интегральной кривой  $\Psi = -3F/2$ , которая проходит также через точку  $A$  и, как это видно из (2.5), является одной из осей узла  $A$ . На физической плоскости точка  $G$  соответствует оси  $y$ , на которой достигается звуковая скорость.

Особая точка  $E$  — аналитический узел и в ее окрестности поведение интегральных кривых можно представить в виде

$$t = C_E | -2t + 2 + z|^2 + \dots, \quad F = \frac{1}{t}, \quad \Psi = \frac{z}{t}, \quad t \rightarrow 0$$

Одной из осей узла  $E$  служит интегральная прямая  $\Psi = 2 - 2F$ , которая, как уже указывалось, проходит через седло  $B$ . На физической плоскости особая точка  $E$  соответствует оси  $y$ . Точка  $Q$  — узел и достигается при движении вдоль предельной линии  $|\Psi| \rightarrow \infty, F = 4$ . При переходе через точку  $Q$  величина  $\xi$  достигает экстремума. Это означает, что физи-



Фиг. 3

ческая плоскость перекрывается дважды. При приближении к точке  $Q$  ускорение потока стремится к бесконечности. Кроме уже указанных интегралов [10]  $\Psi = -3F/2, \Psi = 2 - 2F$  имеется еще один интеграл уравнения (2.3), полученный в явном виде

$$(2.6) \quad \Psi = - (1 + 2F \pm \sqrt{1 + 2F})$$

Интегральная кривая (2.6) выходит из точки  $A$ , проходит далее через точки  $D, E, C$  и опять возвращается в точку  $A$ . Она описывает аналитическое течение через сопло Лавалья [3, 10]. Через  $V$  обозначена линия, на которой скорость  $v_y = 0$ .

При  $|\xi| \rightarrow \infty$  в окрестности оси  $x$  асимптотическое поведение решений уравнения (2.1) имеет вид

$$(2.7) \quad \Phi = A_0 (\pm \xi)^{3-2/n} \pm \frac{(3n-2)^2(n-1)}{n^3} A_0^2 (\pm \xi)^{3-4/n} + \\ + B_0 (\pm \xi)^{3-3/n} \pm \frac{(n-1)(3n-2)(4n-5)}{2n^3} A_0 B_0 (\pm \xi)^{3-5/n} + \dots$$

Здесь  $A_0$  и  $B_0$  — произвольные постоянные, связанные с постоянной  $C_A$  в формуле (2.5) зависимостью

$$C_A = \frac{3(n-1)n}{(3n-2)^{3/2}} \frac{B_0}{|A_0|^{3/2}}$$

Случай  $B_0 = 0, A_0 \neq 0$  ( $C_A = 0$ ) соответствует на физической плоскости обтеканию угла с прямолинейной образующей, так как при  $B_0 = 0$  величины  $v(x) = 0$  в (1.1),  $y = 0$  в (1.2) и  $v_x \neq 0, v_y = 0$ . Интегральную кривую (2.5), соответствующую этому случаю, назовем симметрической и обозначим  $K_1$ . Интегральную кривую (2.5) в случае  $B_0 \neq 0, A_0 = 0$  ( $C_A = \infty$ ) назовем антисимметрической и обозначим  $K_2$ . Она соответствует обтеканию стенки (1.2) со звуковой скоростью на границе. Интегральную кривую, проходящую через точку  $B$  и соответствующую течению Прандтля — Майера, обозначим  $K_3$ .

В случае дозвуковых скоростей на  $AO$  ( $F < 0$ ) одна из интегральных кривых (2.5) попадает в точку  $G$ . Тогда все остальные интегральные кривые при  $F < 0$ , лежащие между ней и кривой  $K_2$ , попадают в точку  $E$ . В свою очередь одна из них достигает точки  $B$ . При этом она обязательно пересекает ось  $F = 0$ , что соответствует переходу через скорость звука. На физической плоскости такому движению будет соответствовать следующий обход: двигаясь от отрицательной полуоси  $x$ , проходим ось  $y$ , затем звуковую линию  $\xi_{3B} > 0$  и, наконец, переходим в течение Прандтля — Майера. При  $n = 5/4$  такой кривой будет  $K_1$  [2, 3], что соответствует обтеканию угла с прямолинейной образующей. При  $n = 3/2$  образующая угла имеет постоянную кривизну и точку  $B$  достигает одна из кривых (2.5) с  $C_A \in (0, \infty)$ . При  $n = 2$  интегральная кривая  $K_1$  переходит в интегральную кривую (2.6), кривой  $K_3$  станет кривая  $\Psi = 2 - 2F$ , попадающая в точку  $E$  при  $C_E = \infty$ , а интегральной кривой  $K_2$  будет соответствовать кривая  $\Psi = -3F/2$ , которая, как уже отмечалось, попадает в точку  $G$ . Это означает, что при  $n = 2$  из точки  $B$  по верхней части кривой  $K_3$  ( $\Psi > 0$ ) невозможно непрерывным образом попасть в точку  $A$ .

При  $n = 2$  все интегральные кривые на фазовой плоскости  $(F, \Psi)$ , кроме кривой  $K_3$ , представляются с помощью интегралов

$$(2.8) \quad f = a\xi + \frac{a^2}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}ab + b\xi}, \quad a, b = \text{const}$$

Интегралы (2.8) при  $b > 0$  использовались в работах [8, 10] при исследовании течений в соплах Лавала.

Заметим, что функции  $F$  и  $\Psi$  инвариантны относительно знака  $\xi$ . В окрестности точки  $A$  решение (2.8) совпадает с разложением  $d\Phi/d\xi$ , полученным из (2.7), если положить

$$a = 2A_0, \quad \sqrt{b} = \pm^{3/2} B_0 (\xi \rightarrow +\infty), \\ \sqrt{-b} = \pm^{3/2} B_0 (\xi \rightarrow -\infty)$$

Рассмотрим окрестность точки  $A$ . Интегральные кривые, лежащие выше кривой  $K_1$ , описываются интегралами (2.8) со знаком минус. Для тех из них, которые заключены в области между  $K_1$  ( $F > 0, \Psi < 0$ ) и  $K_2$

( $F < 0, \Psi > 0$ ) (область 1)  $a < 0, b < 0$  при  $\xi \rightarrow -\infty$  и  $a > 0, b > 0$  при  $\xi \rightarrow +\infty$ . Интегральные кривые, лежащие ниже кривой  $K_1$ , описываются интегралами (2.8) со знаком плюс. В области между  $K_1$  ( $F > 0, \Psi < 0$ ) и  $K_2$  ( $F > 0, \Psi < 0$ ) (область 2) для них  $a < 0, b < 0$  при  $\xi \rightarrow -\infty$  и  $a > 0, b > 0$  при  $\xi \rightarrow +\infty$ . Кривая  $K_1$  получается из (2.8) при  $b = 0$ , кривая  $K_2$  — при  $a = 0$ . Кривая  $K_3$  находится непосредственным интегрированием

$$(2.9) \quad f = \xi^2 + C, \quad C = \text{const}$$

В области  $F < 0$  попасть из точки  $A$  в соответствующую оси  $y$  точку  $G$  можно лишь, двигаясь по кривой  $K_2$ . Ось  $y$  в этом случае является прямой звуковой линией, а значит, и характеристикой. В физической плоскости кривой  $K_2$  ( $F < 0$ ) соответствует течение, описываемое интегралами  $f = -\sqrt{b\xi}, g = [(b/2) - 2\xi\sqrt{\xi b}]/3, \xi < 0, b < 0$ . Непрерывным образом продолжить это решение в область  $\xi > 0$  невозможно, даже если после достижения точки  $G$  вдоль кривой  $K_2$  двигаться по ней обратно в точку  $A$  при  $F < 0$ . Терпит разрыв на оси  $y$  функция  $g$ . Скачок из точки  $G$  в точку  $E$  означает разрыв скоростей  $v_x, v_y$ . Когда звуковая линия задается уравнением  $\xi = \xi_{зв} > 0$  (т. е. выпукла в сторону набегающего потока), возмущения в каждую ее точку приходят по  $C^+$ -характеристикам, а уносятся по  $C^-$ -характеристикам. При  $n = 2$  эти характеристики сливаются со звуковой линией и происходит заклинивание потока. Таким образом, осуществить обтекание точки излома с образующей  $AO$  (1.2) при  $n = 2$  и  $B(n) \neq 0$  течением без особенностей (типа Вальо-Лаурина) невозможно.

3. Интегральные кривые, выходящие из точки  $A$  при  $\Psi < -F$  ( $F < 0$ ), попадают либо в точку  $Q$ , либо в точку  $C$  и только одна кривая (интеграл (2.6)) — в точку  $D$ . В [10] показано, что этот интеграл — единственное симметричное решение  $K_1$ , аналитическим образом проходящее предельную  $C_0^-$ -характеристику. Далее интегральная кривая (2.6) проходит точку  $E$  и достигает точки  $C$ , соответствующей на физической плоскости исходящей из угловой точки предельной  $C_0^+$ -характеристике. Вдоль нее можно сопрягать различные решения с разрывами производных. В переменных  $(\xi, f)$  интеграл (2.6) и предельные  $C_0^-$ - и  $C_0^+$ -характеристики имеют вид

$$f = a\xi + \frac{a^2}{2}, \quad a > 0; \quad \xi_D = -\frac{a}{4}, \quad \xi_C = \frac{a}{2}$$

Рассмотрим интегральные кривые, выходящие из точки  $C$  при  $F \leq 4$ , и через  $k$  обозначим тангенс угла наклона их в  $C$ . Часть из них достигает точки  $A$ , одна — точки  $B$  и остальные —  $Q$ . Для интегральных кривых, лежащих в области 1, имеем  $a_1 > 2\xi_C = a, k \in (-2, -5/3)$ . Постоянные  $b_1, a_1, \xi_C$  и  $k$  будут связаны, как это следует из (2.4) и (2.8), соотношениями

$$(3.1) \quad b_1 = (a_1 - a)^2(a_1 + 2a), \quad k = -\frac{5}{3} - \frac{a_1 - a}{3(a_1 + 2a)}$$

При  $a_1 = a$  величины  $k = -5/3, b_1 = 0$  и интегральная кривая совпадает с  $K_1$ . Фиксируя  $b_1$  и  $a$ , из равенств (3.1) находим соответствующие им

$a_1$  и  $k$ . По величине  $k$  из (2.4) определяется величина разрыва второй производной  $d^2f/d\xi^2$ . Все интегральные кривые, выходящие из точки  $C$  и лежащие в области 1, пересекают линию  $V$ , меняя знак вертикальной скорости  $v_y$  на отрицательный, и попадают в точку  $A$ . Рассмотренный случай соответствует обтеканию выпуклой стенки

$$(3.2) \quad \begin{aligned} y &= 0, \quad x \leq 0 \\ y &= -[4\sqrt{b_1}(\lambda x)^{3/2}]/15, \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

В случае  $k = -2$  равенства (3.1) теряют смысл. Это связано с тем, что интеграл (2.9) не принадлежит множеству интегралов (2.8). Попадание из точки  $C$  в точку  $B$  означает переход к течению Прандтля — Майера, что на физической плоскости соответствует обтеканию угла. Значение постоянной  $C$  в интеграле (2.9), найденное с помощью соотношений (2.4), равно  $3\xi_C^2$ . Обтекание выпуклого угла можно интерпретировать как предельный случай обтекания выпуклой параболической стенки  $y = 0, x \leq 0$  и  $y \sim -\sqrt{b_1}x^{3/2}, x \geq 0$  при  $b_1 \rightarrow \infty$ .

При произвольном  $n > 1$  интеграл  $K_3$  в окрестности точки  $B$  представим в виде

$$(3.3) \quad f = \xi^2[1 + C\xi^{-6/(n+1)} + \dots], \quad \xi \rightarrow +\infty$$

Постоянная  $C$  в (3.3) при  $\Psi > 0$  отрицательная, а при  $\Psi < 0$  положительная. Это означает, что скорость  $v_x$  при обтекании выпуклого угла с образующей  $AO$  (1.2) и  $n \in (1.2)$  течением типа Вальо-Лаурина всегда будет меньше продольной скорости при обтекании угла с  $n = 2$ . Как следствие, давление и плотность в первом случае будет больше, чем во втором. Таким образом, полученное при  $n = 2$  решение задачи обтекания выпуклого угла в области  $G$  имеет вид

$$\varphi = \begin{cases} \frac{a}{2}(\lambda x)^2 + \frac{a^2}{2}(\lambda x)y^2 + \frac{a^3}{24}y^4 & (x < 0, y > 0; x > 0, y \geq \frac{a}{2\lambda}\sqrt{x}) \\ \frac{3}{4}a^2(\lambda x)y^2 + \frac{1}{3}(\lambda x)^3y^{-2} & (x > 0, 0 < y < \frac{a}{2\lambda}\sqrt{x}, a > 0) \end{cases}$$

Зафиксируем постоянную  $b_1$  и рассмотрим обтекание дозвуковым потоком выпуклой стенки (3.2). Зависимость постоянной  $a_1$  от  $a$  находится из кубического уравнения (3.1) при условии, что  $a_1 > a$ . Имеем

$$a_1 = 2a \cos\left(\frac{\pi - \theta}{3}\right), \quad \cos\theta = 1 - \frac{b_1}{2a^3}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{5}{3} < k < -\sqrt{3}, \quad a > (b_1/2)^{1/3}$$

$$a_1 = 2a \cos\frac{\theta}{3}, \quad \cos\theta = \frac{b_1}{2a^3} - 1$$

$$0 < \theta < \pi/2, \quad -\sqrt{3} \leq k \leq -7/4, \quad (b_1/4)^{1/3} \leq a \leq (b_1/2)^{1/3}$$

$$a_1 = 2a \operatorname{ch}\frac{\theta}{3}, \quad \operatorname{ch}\theta = \frac{b_1}{2a^3} - 1$$

$$0 < \theta < \infty, \quad -7/4 < k < -2, \quad 0 < a < (b_1/4)^{1/3}$$

Вторые производные функций  $f$  и  $g$  терпят разрыв на предельной  $C_0^+$ -характеристике. Слева при подходе к ней они равны нулю. За ней они

определяются по формулам

$$(3.4) \quad \left[ \frac{d^2 f}{d\xi^2} \right]_{\xi=\xi_C} = -6 \left( k + \frac{5}{3} \right)$$

$$\left[ \frac{d^2 g}{d\xi^2} \right]_{\xi=\xi_C} = 12\xi_C \left( k + \frac{5}{3} \right), \quad \left[ \frac{d^3 g}{d\xi^3} \right]_{\xi=\xi_C} = 12 \left( k + \frac{5}{3} \right)$$

Из (3.4) видно, что максимальный скачок вторые производные испытывают при переходе через  $C_0^+$ -характеристику при обтекании угла. При стремлении  $\xi_C \rightarrow 0$  скачок второй производной функции  $g$  стремится к нулю. Когда  $\xi_C$  становится равной нулю, скорость набегающего потока становится звуковой и скачок испытывает третья производная от  $g$ . Из (2.9) видно, что  $f_1 = \xi^2$  при  $\xi_C = 0$ , т. е. чисто звуковой поток сопрягается вдоль характеристики с течением Прандтля — Майера. Если теперь перейти от построенного решения  $(u, v)$  к функции потенциала, то локальное решение  $\phi(x, y)$  уравнения Фальковича — Кармана (1.5) будет принадлежать  $C^2(G)$  и удовлетворять условиям а), б). Отбор решения будет определяться глобальной задачей.

4. Предположим теперь, что вдоль  $C_0^-$ -характеристики  $\xi_D = -a/4$  в угловую точку приходит особенность в виде разрыва первых производных компонент скоростей. В приложении к соплам Лавалья этот вопрос был подробно рассмотрен в [10]. На фазовой плоскости в этом случае интегральная кривая  $K_1$  при достижении точки  $D$  скачком переходит в точку  $C$ . Характер дальнейшего течения будет зависеть от величины наклона интегральной кривой  $k_D$ , выходящей из точки  $C$ . При одних значениях  $k_D$  реализуются безударные течения, при некоторых других — только течения с ударной волной. Скачок второй производной функции  $f$  на  $C_0^-$ -характеристике равен  $[d^2 f/d\xi^2]_{\xi=\xi_D} = -6(k_D + 5/3)$ .

Если  $k_D \in (-\infty, -2)$ , то

$$(4.1) \quad f = \alpha\xi + \frac{\alpha^2}{2} - \sqrt{1/4\alpha\beta + \beta\xi}$$

$$\alpha > 0, \beta > 0, \xi \in [\xi_D, \xi_C]$$

$$\alpha = \frac{a}{2} \frac{2k_D + 3}{k_D + 2}, \quad \sqrt{|\beta|} = -24 \left( k_D + \frac{5}{3} \right) \left[ -\frac{a}{8(k_D + 2)} \right]^{3/2}$$

Интегральные кривые (4.1) выходят из точки  $C$ , проходят точку  $E$  (ось  $y$ ) и возвращаются обратно в точку  $C$ , что соответствует достижению  $C_0^+$ -характеристики. Далее, из точки  $C$  интегральная кривая по  $K_3$  достигает точки  $B$ . На  $C_0^+$ -характеристике происходит разрыв второй производной со скачком

$$(4.2) \quad \left[ \frac{d^2 f}{d\xi^2} \right]_{\xi=\xi_C} = 6(k_C + 2) > 0, \quad k_C \in (-5/3, -2)$$

При  $k_D = -2$  из точки  $C$  движение происходит по кривой  $K_3$  в точку  $E$ , затем обратно из точки  $E$  по  $K_3$  в точку  $C$  и далее в точку  $B$ . Вертикальная скорость  $v_y$  на оси  $y$  меняет знак с отрицательного на положительный. Постоянная  $C$  в (2.9) равна  $3\xi_D^2$ . Скачок второй производной на  $C_0^+$ -характеристике равен нулю.

Когда  $k_D \in (-2, -5/3)$ , движение происходит по интегральным кривым (4.1), но  $\alpha < 0, \beta < 0$ . На  $C_0^+$ -характеристике будет происходить разрыв вторых производных со скачком (4.2), но  $k_C \in (-\infty, -2)$ . Слу-

чай  $k_D = -5/3$  является предельным. Движение происходит по интегральной кривой  $K_1$  до точки  $D$ , что соответствует достижению  $C_0^+$ -характеристики. Теперь, чтобы попасть в точку  $B$ , необходимо скачком перейти в точку  $C$ . Таким образом, при  $k_D = -5/3$  от угловой точки особенность отражается в виде разрыва первых производных. Постоянная  $C$  в (2.9) и величины  $k_C$ ,  $a$  и  $k_D$  связаны между собой формулами

$$4\xi_C^2 = \alpha\xi_C + 1/2\alpha^2 - \sqrt{1/4\alpha\beta + \beta\xi_C}, \quad \xi_C = \sqrt{C/3}$$

$$1/4\beta^2 (1/4\alpha\beta + \beta\xi_C)^{-3/2} = -6(k_C + 5/3)$$

Соотношения между постоянными  $a$  и  $C$ , при которых осуществляется безударный переход из точки  $A$  в точку  $B$ , имеют вид

$$\frac{3}{64} \leq \frac{C}{a^2} \leq \frac{3}{4}$$

Если теперь  $k_D > -5/3$ , то интегральные кривые, выходящие из точки  $C$ , расположены между  $K_1$  и  $K_2$ . После прохождения точки  $E$  все они попадают в точку  $Q$ . Это означает, что производная  $df/d\xi$  обращается в бесконечность при некотором значении  $\xi$ , большем нуля. Однако движение газа с бесконечным значением ускорения реализоваться не может. В нем либо образуется ударная волна, либо все течение разрушается. На фазовой плоскости состояния газа до и после ударной волны будут связаны соотношениями [10]

$$F_1 + F_2 = 8, \quad \Psi_1 + \Psi_2 = -36, \quad 1 < F_2 < 4$$

Используя их и интеграл (2.9), найдем связь между величинами  $F_1$  и  $\Psi_1$ :

$$\Psi_1 = -2F_1 - 22, \quad 4 < F_1 < 7$$

Полученное множество обозначим  $K^*$ , а наклон интегральной кривой, выходящей из точки  $C$  и проходящей через точку  $F = 7$ ,  $\Psi = -36$ ,  $-k_D^*$ . Тогда при  $k_D \in (-5/3, k_D^*)$  можно построить обтекание выпуклого угла, если ввести в течение ударную волну  $\xi = \xi_S > 0$ . Пределы изменения постоянных  $C$  и  $a$  будут определяться неравенством  $0 < C/a^2 < < 3/64$ .

Пример обтекания угла с разрывами производных компонент скоростей вдоль исходящей из угловой точки характеристики был построен в [11]. В ней рассматривалось вихревое течение в окрестности угла, реализуемое при  $n = 3/2$ .

В заключение отметим, что при  $n = 2, 3, 11$  реализуются асимптотические типы течений в соплах Лаваля [10], поэтому при  $n = 3, 11$ , так же как и при  $n = 2$ , можно построить решения, описывающие обтекание выпуклого угла.

Автор благодарит Рыжова О. С. и Рыкова В. А. за обсуждение работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гудерлей К. Г. Теория околосвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960, 421 с.
2. *Vaglio-Laurin R.* Transonic rotational flow over a convex corner.— *J. Fluid Mech.*, 1960, v. 9, No. 1, p. 81.
3. Фалькович С. В., Чернов И. А. Обтекание тел вращения звуковым потоком газа.— *ПММ*, 1964, т. 28, вып. 2, с. 28.
4. Шифрин Э. Г. О скачке уплотнения при трансзвуковом обтекании выпуклого угла.— *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1974, № 5, с. 43.
5. Бойченко В. С., Лифшиц Ю. Б. Трансзвуковое течение около выпуклого угла.— *Уч. зап. ЦАГИ*, 1976, т. 7, № 2, с. 8.
6. Есин А. И., Фалькович С. В., Чернов И. А. Течение идеального газа в окрестности выпуклого угла с переходом через скорость звука.— В кн.: *Аннотации докл. 4-го Всес. съезда по теор. и прикл. механике*. Киев: Наукова думка, 1976, с. 56.
7. Лифшиц Ю. Б., Шифрин Э. Г. К задаче о трансзвуковом обтекании выпуклого угла.— *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1971, № 2, с. 67.
8. Фалькович С. В. К теории сопла Лавалья.— *ПММ*, 1946, т. 10, вып. 4, с. 503.
9. *Guderley K. G., Joshihara H.* An axial-symmetric transonic flow pattern.— *Quart. Appl. Math.*, 1951, v. 8, No. 4, p. 333.
10. Рыжов О. С. Исследование трансзвуковых течений в соплах Лавалья. М.: ВЦ АН СССР, 1965, 238 с.
11. *Adamson T. C., Fishburn B. D.* Transonic rotational flow around a convex corner with application to a supersonic boundary layer.— *J. Mec.*, 1971, v. 10, No. 2, p. 205.

Москва

Поступила в редакцию  
17.III.1980