

УДК 533.6.011

О ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ВИБРАТОРА СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОГО ГАЗА

Богданова Е. В.

В работах [1, 2] в рамках линейной теории исследовался сверхзвуковой пограничный слой с самоиндуцированным давлением около гармонически колеблющейся с малой амплитудой стенки треугольной формы. При решении уравнений для внутреннего подслоя возникало некоторое дисперсионное соотношение, корни которого определяли возмущения, распространяющиеся вверх и вниз по потоку.

Рассматривается в линейном приближении задача обтекания вибратора с нарастающей по времени амплитудой колебаний вязким сверхзвуковым потоком газа. Изучается возникающее в этом случае дисперсионное соотношение. Показано, что число собственных решений задачи существенно зависит от характера колебаний вибратора.

1. Постановка задачи. Рассмотрим обтекание теплоизолированной плоской пластины длины L , переходящей в треугольный колеблющийся выступ — вибратор и оканчивающейся плоской пластиной длины $O(L)$. Пусть t — время, x и y — декартовы координаты, u, v — составляющие вектора скорости, ρ — плотность, p — давление, λ_1 — первый коэффициент вязкости. Положив скорость набегающего потока p равной U_∞ ($M_\infty > 1$), введем малый параметр $\varepsilon = Re_1^{-1/2}$ ($Re_1 = \rho_\infty U_\infty L / \lambda_1$). Будем считать число Прандтля равным единице, а $\lambda_1 / \lambda_{1\infty} = CT / T_\infty$.

Выберем продольный размер колеблющейся части $O(\varepsilon^3 L)$, частоту колебаний — $O(\varepsilon^{-2} U_\infty / L)$, амплитуду — $O(\varepsilon^5 L)$. Для описания течения воспользуемся уравнениями пограничного слоя с самоиндуцированным давлением [1—3]. В безразмерных переменных внутреннего подслоя колеблющуюся часть стенки зададим уравнением

$$(1.1) \quad y_w = \sigma f(x) \exp(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t)$$

Здесь параметр $\sigma \ll 1$, $\omega_1 > 0$ и $\omega_2 > 0$ — безразмерные частоты, движение рассматривается в промежутке от некоторого бесконечно удаленного момента времени до момента $t = 0$. Функция $f(x)$ задает треугольную форму с параметрами a, b, h

$$(1.2) \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ hx/b, & 0 \leq x \leq b \\ h(a-x)/(a-b), & b \leq x \leq a \\ 0, & x \geq a \end{cases}$$

Линеаризация задачи относительно решения Блазиуса осуществляется подстановкой в исходные уравнения для пограничного слоя с самоиндуцированным давлением разложений искомых функций в ряд по ма-

лomu параметру σ

$$u = y + \sigma u_1 + \dots, \quad v = \sigma v_1 + \dots, \quad p = \sigma p_1 + \dots$$

При этом для функций первого приближения возникает следующая задача:

$$(1.3) \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} + y \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial y} = 0; \quad \rho = 1; \quad u_1 \rightarrow 0, \quad p_1 \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty)$$

$$u_1 \rightarrow -\int_{-\infty}^x p_1(t, x) dx \quad (y \rightarrow \infty); \quad u_1 = -y_{w1}, \quad v_1 = \frac{\partial y_{w1}}{\partial t} \quad (y = 0)$$

$$y_{w1} = f(x) \exp(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t)$$

Отметим, что для получения приведенных выше условий прилипания приходится рассмотреть около стенки дополнительную подобласть с характерным размером $y_1 = y/\sigma$, так как требование линеаризации $u_1 = O(1)$ при $y \rightarrow 0$ нарушается.

Для упрощения выкладок введем комплексную частоту $W = \omega_1 + i\omega_2$, функции скорости и давления будем рассматривать как комплексные от действительного переменного, помня, что физический смысл имеют только их действительные части. Пусть $u_1 = U(x, y) \exp(Wt)$, $p_1 = P(x) \exp(Wt)$. Исключив из системы (1.3) функцию v_1 , получаем

$$(1.4) \quad \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} - y \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - W \frac{\partial U}{\partial y} = 0; \quad U \rightarrow 0, \quad P \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty)$$

$$U \rightarrow -\int_{-\infty}^x P(x_1) dx_1 \quad (y \rightarrow \infty); \quad U = -f(x) \quad (y = 0)$$

Решение задачи (1.4) строится, как обычно, с помощью преобразования Фурье

$$U(k, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} U(x, y) dx$$

Преобразованное уравнение (1.4) представляет собой хорошо изученное уравнение Эйри, решение которого выражающееся через функцию Эйри Ai и удовлетворяющее всем граничным и предельным условиям (1.4), имеет вид

$$(1.5) \quad P(k) = ikf(k) \frac{dAi(\Omega)}{d\Omega} \left[\frac{dAi(\Omega)}{d\Omega} + (ik)^{1/2} \int_{\Omega}^{(ik)^{1/2}\infty} Ai(z) dz \right]^{-1}$$

$$\Omega = \frac{W}{(ik)^{2/3}}, \quad f(k) = \frac{h}{b(ik)^2} \left[1 - \frac{a}{a-b} e^{-ikb} + \frac{b}{a-b} e^{-ika} \right]$$

Чтобы выделить однозначную ветвь функции $P(k)$, проведем в комплексной плоскости $k = k_1 + ik_2$ разрез по мнимой положительной полуоси [2—5]. Если $-\pi/2 \leq \arg k \leq \pi/2$, то интеграл в выражении (1.5) можно представить в виде

$$\int_{\Omega}^{(ik)^{1/2}\infty} Ai(z) dz = \int_{\Omega}^{\infty} Ai(x) dx - \int_0^{\Omega} Ai(z) dz = I_0 - I_1(\Omega)$$

Полюса аналитической функции $P(k)$ определяются следующим дисперсионным уравнением:

$$(1.6) \quad \Phi(W, \Omega) \equiv \Omega^2 \frac{d\text{Ai}(\Omega)}{d\Omega} + W^2(I_0 - I_1(\Omega)) = 0$$

$$\arg W - \frac{2}{3}\pi < \arg \Omega < \arg W + \frac{2}{3}\pi \quad (0 \leq \arg W \leq \pi/2)$$

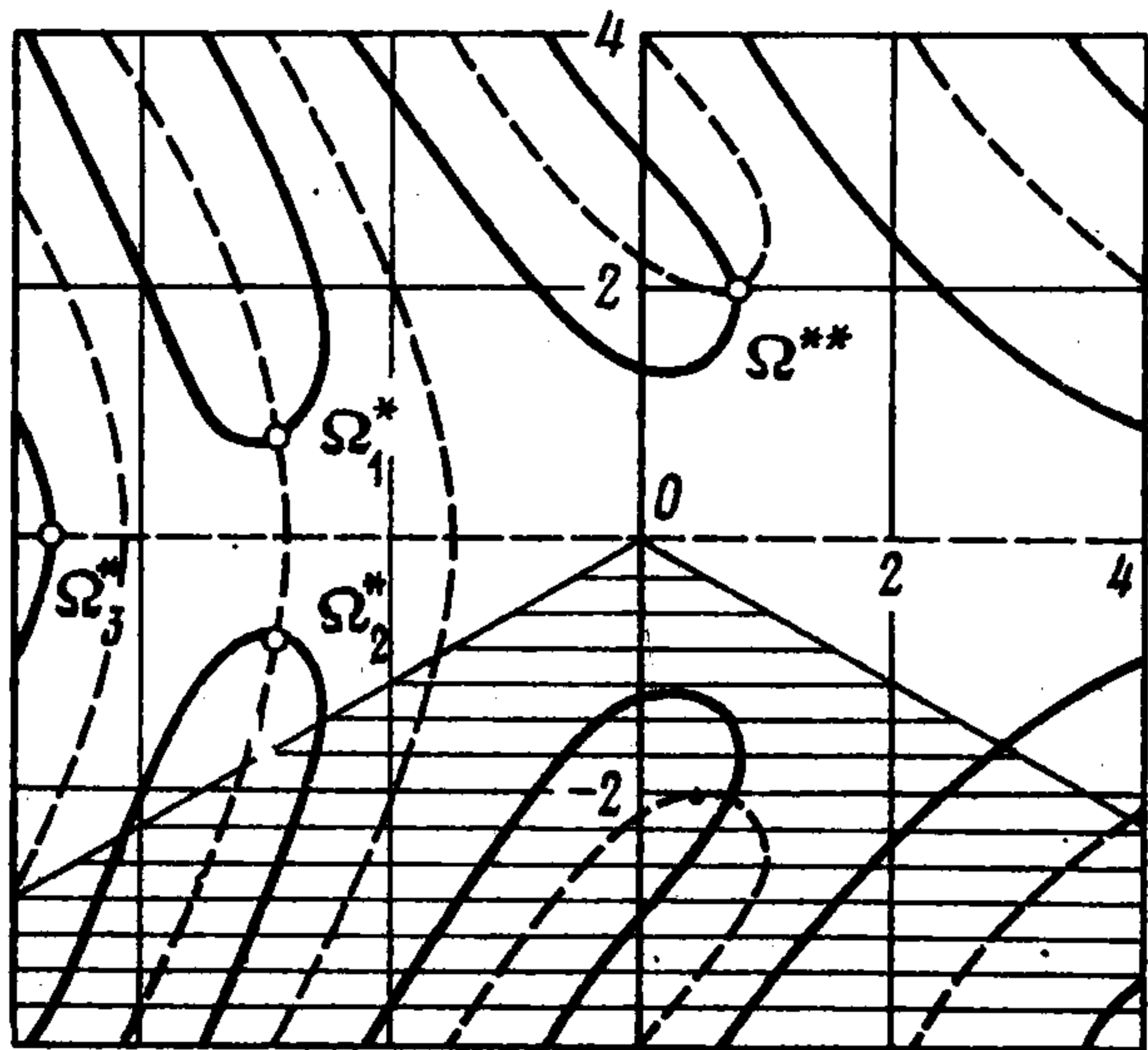
2. Нули дисперсионного уравнения. Рассмотрим асимптотическое поведение корней уравнения (1.6) при $|\Omega| \rightarrow \infty$ (значение $|W|$ конечно). Из соотношения (1.7) следует, что отрицательная действительная полуось ($\arg \Omega = \pi$) входит в область допустимых значений Ω , если $\pi/3 \leq \arg W \leq \pi/2$, и выходит за ее пределы, когда $0 \leq \arg W < \pi/3$.

Пусть $|\Omega| \gg 1$, $\pi/3 \leq \arg W \leq \pi/2$. Воспользуемся известными представлениями производной и интеграла от функции Эйри в области, содержащей полуось $\arg \Omega = \pi$. Подставляя их в уравнение (1.6), в первом приближении получим

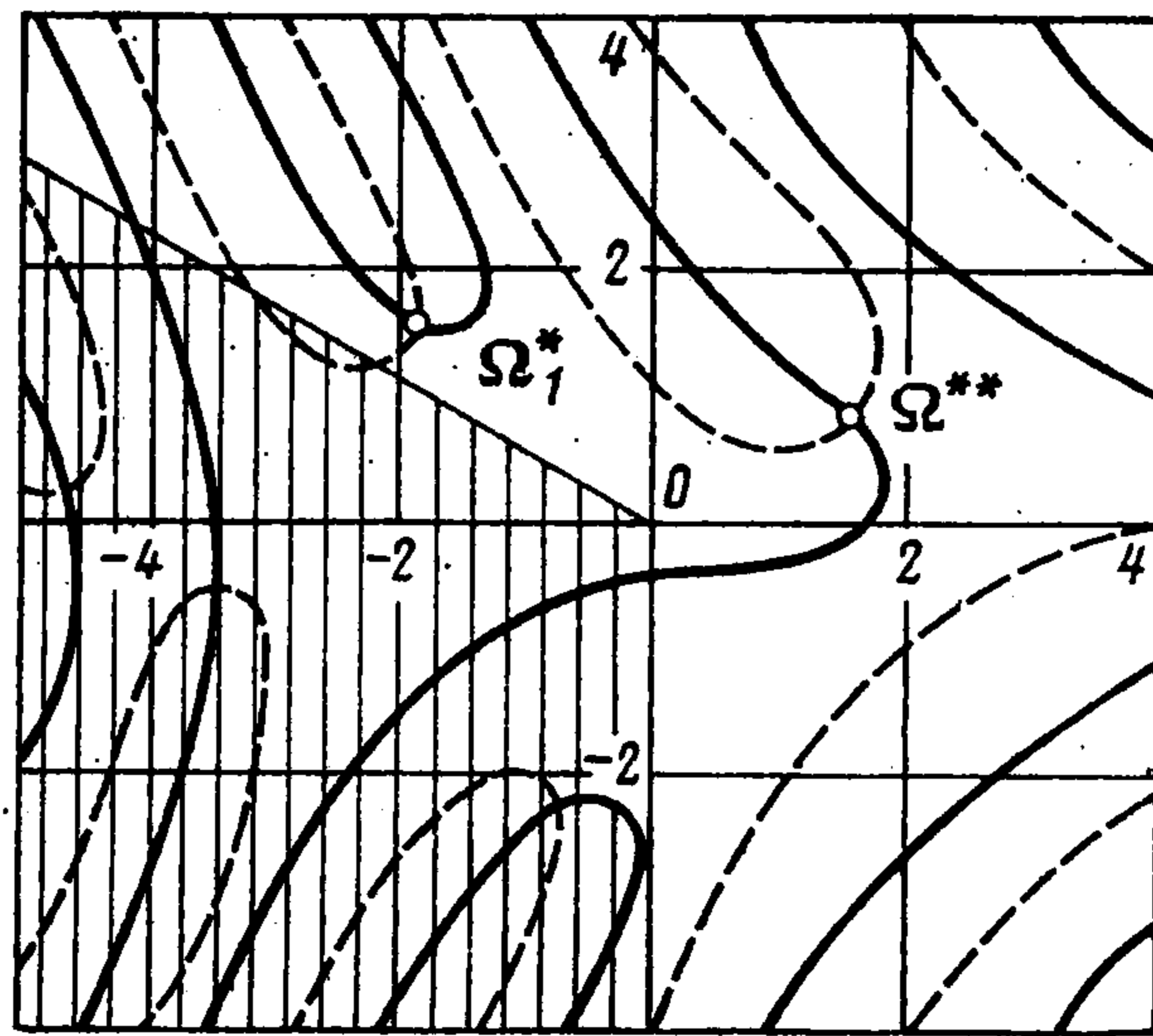
$$(2.1) \quad \Phi(W, -\Omega) \approx -\pi^{-1/2}\Omega^{3/4} \cos\left(\frac{2}{3}\Omega^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + W^2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ai}(x) dx = 0$$

$$|\arg \Omega| < \frac{2}{3}\pi$$

Решение уравнения (1.6) в области значений $|\Omega| = O(1)$ проводилось на ЭВМ путем разложения производной и интеграла от функции Эйри в ряды. На комплексной плоскости при фиксированных значениях W строились линии уровня $\text{Re}[\Phi(W, \Omega)] = 0$ и $\text{Im}[\Phi(W, \Omega)] = 0$, точки пересечения которых давали искомые решения [2]. На фиг. 1, 2 показаны картины, полученные при $|W| = 3$ соответственно для $\arg W =$



Фиг. 1

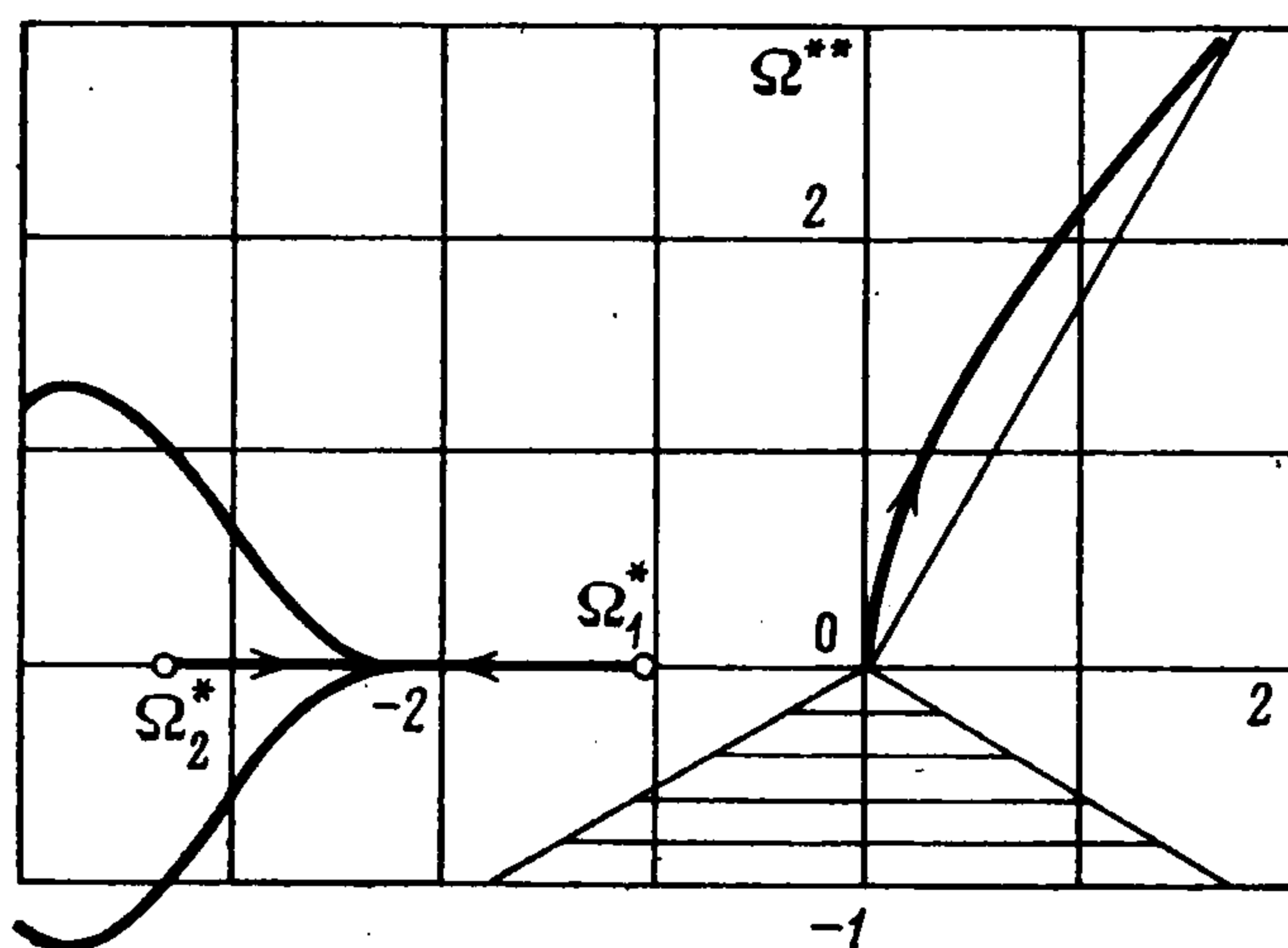


Фиг. 2

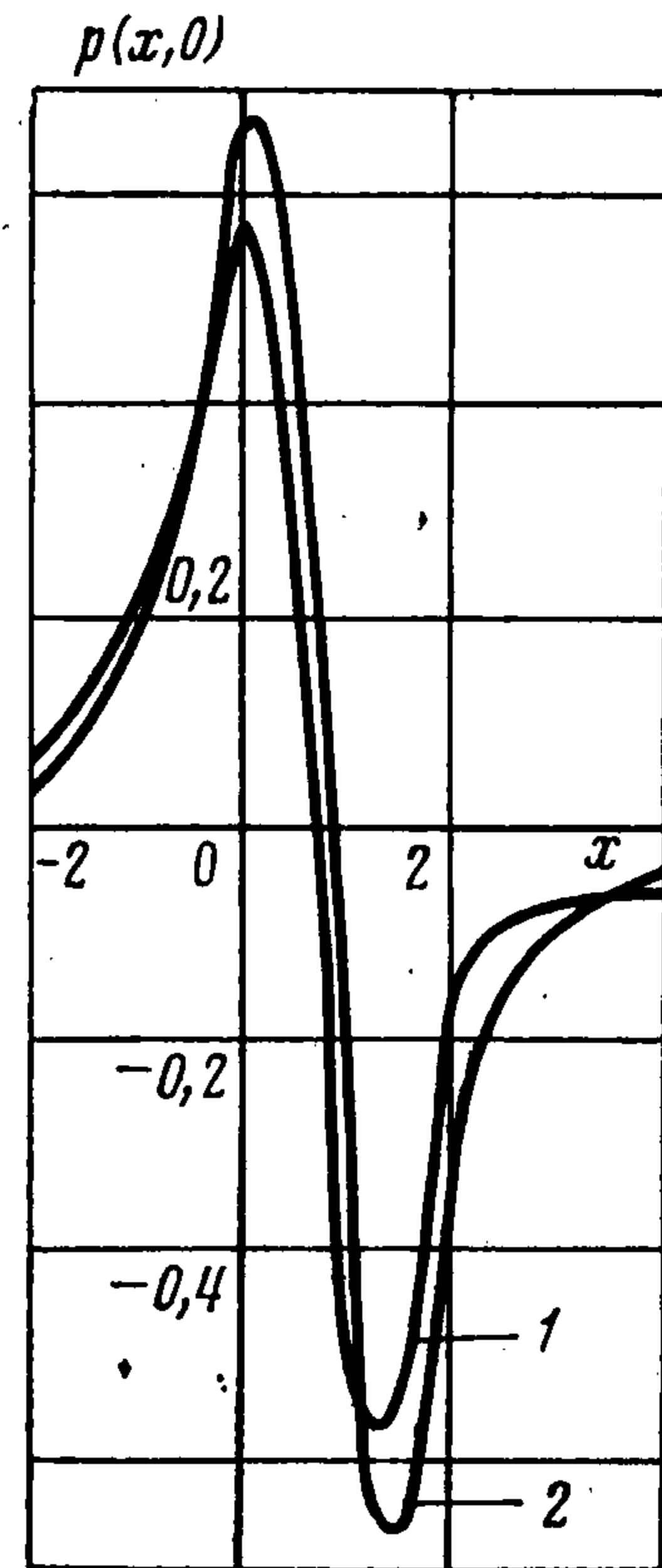
$= \pi/2$ и $\arg W = \pi/6$. Сплошные линии — это линии $\text{Re}[\Phi(W, \Omega)] = 0$, штриховые — $\text{Im}[\Phi(W, \Omega)] = 0$, а заштрихована та часть плоскости, для которой не выполняется соотношение (1.7). Оказалось, что для любых значений $\arg W$ в первой четверти плоскости Ω всегда находится единственный корень дисперсионного уравнения Ω^{**} . Картина расположения нулей Ω_n^* ($n = 1, 2, \dots$) в области $\text{Re}(\Omega) < 0$ зависит от значения $\arg W$. Если $\pi/3 \leq \arg W \leq \pi/2$, то по мере удаления от начала координат она переходит в асимптотическую, описанную выше.

В рассматриваемой плоскости k этим решениям соответствуют корни k^{**} ($\text{Im} k^{**} < 0$) и k_n^* ($\text{Im} k_n^* > 0$). В случае $\pi/3 \leq \arg W \leq \pi/2$ k_n^* представляет собой бесконечную последовательность с точкой сгущения в нуле, задаваемую при $n \gg 1$ соотношениями (2.2). Если $0 \leq \arg W < \pi/3$, то число решений k_n^* конечно, хотя и может меняться в зависимости от значения $|W|$.

На фиг. 3 показано, как происходит смещение корней в плоскости Ω в зависимости от $|W|$, если $\arg W = \pi/2$. Стрелками обозначено направление возрастания $|W|$, начиная с нулевого значения. Видно, что при малых значениях $|W|$ два корня Ω_1^* и Ω_2^* находятся на действительной отрицательной полуоси. Увеличение модуля частоты внешнего возмущения выражается в их смещении навстречу друг другу. При $|W| > |W|_1$, где $|W|_1$ — некоторое критическое значение, они отходят от действительной оси, располагаясь симметричным образом по обе стороны от нее. Природа этого явления объясняется осциллирующим характером функции $Ai'(\Omega)$ при $\Omega = |\Omega| e^{i\pi}$. Если обозначить через a_j^* значения Ω , при которых $Ai'(\Omega)$ достигает своих последовательных максимумов (Ω — действительное и изменяется от нуля до минус бесконечности), то последователь-



Фиг. 3



Фиг. 4

ные критические значения $|W|_j$ можно определить следующим образом:

$$|W|_j = a_j^* \left[\frac{Ai'(a_j^*)}{I_1(a_j^*) - I_0} \right]^{1/2}$$

Из соотношения (2.1) получим, что при $|\Omega| \gg 1$, $\pi/3 < \arg W \leq \pi/2$ дисперсионное уравнение имеет последовательность нулей

$$(2.2) \quad \Omega_n^* \approx - \left[\frac{3}{2} \pi \left(n + \frac{1}{4} \right) \right]^{2/3} + (-1)^n \frac{|W|^2}{[3/2 \pi (n + 1/4)]^{11/6}} \exp(2i \arg W)$$

которая располагается либо на действительной отрицательной полуоси (если $\arg W > \pi/2$ [4, 5]), либо попеременно по обе стороны от нее. Причем, чем более удален корень от начала координат, тем ближе он подходит к полуоси $\arg \Omega = \pi$. В случае $\arg W = \pi/3$ в допустимой области значений Ω находятся лишь те члены последовательности Ω_n^* , которые удовлетворяют условию $\text{Im } \Omega > 0$.

В плоскости $k = k_1 + ik_2$ этим корням соответствует расположенная во второй четверти последовательность k_n^* , такая, что

$$(2.3) \quad |k_n^*| = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \arg k_n^* = -2\pi + \frac{3}{2} \arg W$$

$$(\pi/3 \leq \arg W \leq \pi/2)$$

В области Ω , не содержащей отрицательной действительной полуоси,

функция $P(k)$ при $|\Omega| \gg 1$ может быть представлена следующим образом:

$$(2.4) \quad P(k) = ikf(k) \frac{\Omega^3}{\Omega^3 - W^2} = ikf(k) \frac{W}{W + k^2}$$

Если $0 \leq \arg W < \pi/3$, выражение (2.4) справедливо во всей допустимой области значений Ω ($|\Omega| \gg 1$).

Пусть теперь $|W| \gg 1$. В этом случае дисперсионное уравнение в области $|\arg \Omega| < \pi$ имеет два решения, которые в плоскости k располагаются соответственно в верхней и нижней полуплоскостях

$$(2.5) \quad \begin{aligned} k_{1l}^* &\approx |W|^{1/2} \exp\left(-\frac{3\pi i}{2} + \frac{i}{2} \arg W\right) \\ k_i^{**} &\approx |W|^{1/2} \exp\left(-\frac{\pi i}{2} + \frac{i}{2} \arg W\right), \\ &(|W| \gg 1, 0 \leq \arg W \leq \pi/2) \end{aligned}$$

3. Структура решения задачи в физической плоскости. Искомая функция давления в физической плоскости может быть найдена как

$$(3.1) \quad p(t, x) = \operatorname{Re} [P(x) \exp(Wt)]$$

где $P(x)$ определяется по образу (1.5). Зная вид функции $f(k)$, на основе леммы Жордана, теории вычетов и свойств дисперсионного соотношения получим

$$(3.2) \quad P(x) = \begin{cases} -B(W, k^{**}) \exp(ik^{**}x), & x < 0 \\ \sum_n B(W, k_n^*) \exp(ik_n^*x) - I_- + I_+, & x > 0 \end{cases}$$

$$B(W, k) = -kf(k) \frac{d\operatorname{Ai}(\Omega)}{d\Omega} \left\{ \frac{d}{dk} \left[\frac{d\operatorname{Ai}(\Omega)}{d\Omega} + (ik)^{1/2} (I_0 - I_1(\Omega)) \right] \right\}^{-1}$$

(I_+ , I_- — интегралы соответственно по правому и левому берегам разреза).

Если в случае гармонических колебаний вибратора ($\arg W = \pi/2$) вниз по потоку всегда распространяется бесконечный цуг возмущений давления, то в случае колебаний, нарастающих по амплитуде, при определенном соотношении частот, а именно $\omega_2/\omega_1 < \sqrt{3}$, число волн, идущих вниз по потоку, становится конечным.

Вид функции $p(0, x)$ при $|W| = 1$, $\arg W = \pi/2$, $\arg W = \pi/6$ показан на фиг. 4 кривыми 1 и 2 соответственно ($b = 1$, $a = 2$, $h = 2$). Уменьшение $\arg W$ влечет незначительное увеличение амплитуды функции $P(x)$ и более быстрое ее затухание при $x \rightarrow +\infty$. Это хорошо согласуется с асимптотической оценкой, полученной методом, изложенным в работе [2]

$$\begin{aligned} P(x) &= O(x^{-1} \exp[-2^{3/2} 3^{-1/2} |W|^{3/4} x^{1/2} \cos(3/4 \arg W)]) \\ &(x \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

Автор благодарит Рыжова О. С. и Терентьева Е. Д. за обсуждение постановки и результатов решения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Терентьев Е. Д. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением около колеблющейся стенки в сверхзвуковом потоке.— Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 5, с. 1046—1049.
2. Терентьев Е. Д. Расчет давления в линейной задаче о вибраторе в сверхзвуковом пограничном слое.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 6, с. 1014—1028.
3. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 6, с. 1007—1023.
4. Жук В. И., Рыжов О. С. Об одном свойстве линеаризованных уравнений пограничного слоя с самоиндуцированным давлением.— Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 5, с. 1042—1045.
5. Жук В. И., Рыжов О. С. О решениях дисперсионного уравнения из теории свободного взаимодействия пограничного слоя.— Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 5, с. 1085—1088.

Москва

Поступила в редакцию
21.XI.1980