

УДК 531.391.3

## О СТРУКТУРЕ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА И БИФУРКАЦИЯХ В ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ КОНВЕКТИВНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ЛОРЕНЦА

Баталова З. С., Дубровина И. А., Неймарк Ю. И., Орлова Е. Е.

Приводятся результаты качественного и численного исследования системы дифференциальных уравнений Лоренца. Изучение системы Лоренца сведено к рассмотрению точечного отображения прямой в прямую. Этим достигнута наглядная и сравнительно простая геометрическая интерпретация ее движений, упрощающая исследование и позволяющая получить более полные результаты. Изучение системы опирается на общее исследование гомоклинических структур и их роли в образовании стохастических движений [1—6]. С помощью численных методов получена серия одномерных точечных отображений, геометрически интерпретирующих структуру решений системы Лоренца и ее изменения с ростом входящего в систему параметра  $r$ . Установлено существование гомоклинической структуры, возникающей при пересечении интегральных многообразий седловых периодических движений и состояний равновесия. Рассмотрены изменения этой структуры с изменением параметра  $r$ . Оказалось, что рождение стохастических движений связано с переходом через негрубую гомоклиническую структуру. С ростом  $r$  происходит «деградация» стохастичности, при которой структура фазового пространства быстро меняется с изменением  $r$  и возникают сложные устойчивые периодические движения с тонкими областями притяжения.

Исследованию трехмерной автономной системы дифференциальных уравнений Лоренца посвящено значительное число работ (см., например, [1, 7—14]). Интерес к ней вызван тем, что система Лоренца является галеркинским приближением уравнений двумерной конвекции, а также необычным поведением решений, которое можно рассматривать как некоторую модель возникновения турбулентности [1, 8]. Система Лоренца описывает и другие явления, например процессы генерации колебаний в лазерах некоторых типов [1]. Уравнения Лоренца представляют интерес и сами по себе как объект качественной теории дифференциальных уравнений и теории колебаний.

**1. Общие сведения о системе Лоренца и сведение ее исследования к изучению точечного преобразования.** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений Лоренца

$$(1.1) \quad \dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy$$

Здесь  $\sigma$ ,  $b$  и  $r$  — положительные параметры. Отметим некоторые общие особенности поведения фазовых траекторий системы (1.1).

1°. Система (1.1) допускает сохраняющую ее вид замену переменных  $x$ ,  $y$  и  $z$  на  $-x$ ,  $-y$  и  $-z$  соответственно. Следовательно, ее фазовые траектории располагаются симметрично относительно оси  $z$ .

2°. Система (1.1) допускает семейство сфер

$$V(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - \sigma - r)^2 = \text{const}$$

для которых в силу системы (1.1)

$$V = -2\sigma x^2 - 2y^2 - 2b [z - 1/2(\sigma + r)]^2 + 1/2b(\sigma + r)^2$$

Тогда  $V < 0$  при  $V > b(\sigma + r)^2$  ( $b > 2$ ,  $\sigma > 1$ ), поэтому фазовые траектории из всего пространства  $x, y, z$  идут внутрь сферы

$$(1.2) \quad x^2 + y^2 + (z - \sigma - r)^2 = (\sigma + r)^2 b$$

с центром в точке  $(0, 0, \sigma + r)$  и радиусом  $(\sigma + r)\sqrt{b}$ .

3°. В силу системы (1.1) имеем

$$(1.3) \quad \operatorname{div}(x', y', z') = -1 - \sigma - b < 0$$

Поэтому при возрастании времени  $t$  в любом месте фазового пространства происходит сжатие фазового объема, так что любой элемент объема за время  $t$  сжимается в  $\exp(1 + \sigma + b)t$  раз. Уменьшение фазового объема не является результатом всестороннего сжатия, напротив, сжатие в одних направлениях сочетается с растяжением в других.

Рассмотрим состояния равновесия системы (1.1). Приравнивая нулю правые части, находим, что при  $r < 1$  имеется единственное состояние равновесия  $O$  ( $x = y = z = 0$ ), при  $r > 1$  имеются три состояния равновесия  $O$  ( $x = y = z = 0$ ),  $O_{1,2}$  ( $x = y = \pm \sqrt{b(r-1)}$ ,  $z = r - 1$ ). Характеристические уравнения состояний равновесия  $O$  и  $O_{1,2}$  имеют соответственно вид

$$(1.4) \quad (\lambda + b)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0$$

$$(1.5) \quad \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + \sigma(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0$$

Аналогично ранним работам (см., например, [1]), примем  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ . Из (1.4) и (1.5) следует, что при возрастании  $r$  от нуля с состояниями равновесия происходят следующие изменения: устойчивое при  $r < 1$  узловое состояние равновесия  $O$  при  $r = 1$  испытывает бифуркацию, после которой оно становится неустойчивым седловым; одновременно из  $O$  рождаются два устойчивых узловых состояния равновесия  $O_1$  и  $O_2$ , которые с увеличением  $r$  становятся последовательно устойчивыми узлами и фокусами и затем при  $r = 24,74$  превращаются в неустойчивые седло-фокусы. Отметим особенность поведения фазовых траекторий: при возрастании времени происходит быстрое приближение их к некоторым поверхностям. Такое непосредственно наблюдаемое при численном анализе поведение траекторий согласуется с отмеченным выше общим интенсивным сжатием фазового объема и значительными различиями величин действительных частей корней  $\lambda_{1,2}$  и  $\lambda_3$  характеристического уравнения (1.5), которые представляются приближенными формулами

$$\lambda_{1,2} = 0,037r - 0,915 \pm i(0,18r + 3,7)$$

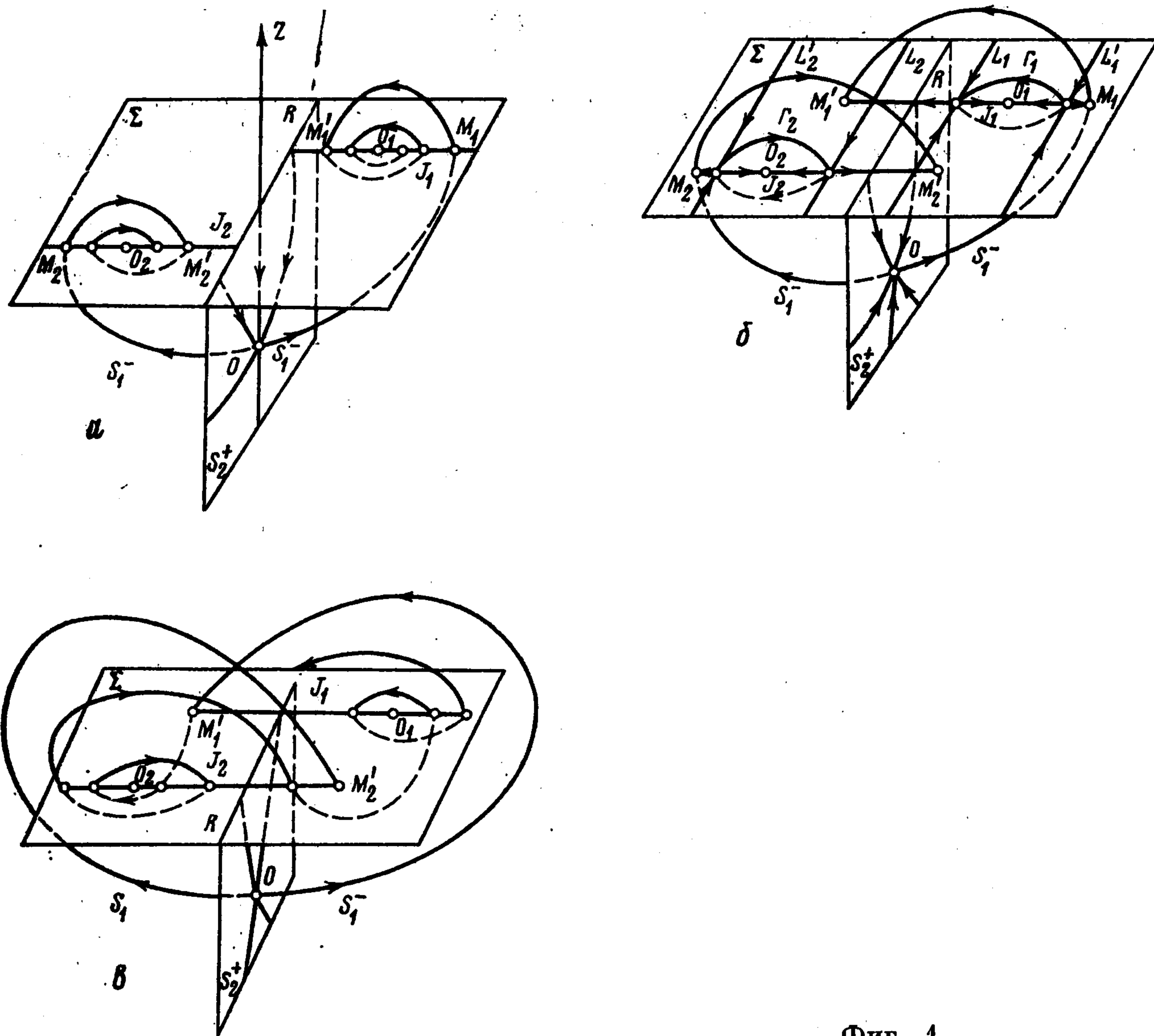
$$\lambda_3 = -0,06r - 11,5 \quad (10 < r < 40)$$

Смена устойчивости седло-фокусов  $O_1$  и  $O_2$  сопровождается слиянием с ними неустойчивых седловых периодических движений  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , которые рождаются при  $r = 13,92$  из петель сепаратрис  $S_1^-$  седла  $O$ .

При  $r < 24,06$  глобальное поведение фазовых траекторий простое: при  $0 < r < 1$  все они идут в устойчивое состояние равновесия  $O$ , при

$1 < r < 24,06$  все фазовые траектории, за исключением разделяющих, идут к одному из устойчивых состояний равновесия  $O_1$  и  $O_2$ . Разделяющие фазовые траектории составляют двумерную инвариантную поверхность  $S_2^+$  седлового состояния равновесия  $O$ .

Глобальное поведение фазовых траекторий при  $r > 24,06$  существенно сложнее, именно оно и изучалось в работах [1,8—14]. Для изучения поведения фазовых траекторий в этом случае рассмотрим порождаемое траекториями системы (1.1) точечное отображение  $T$  плоскости  $z = r - 1$  в



Фиг. 1

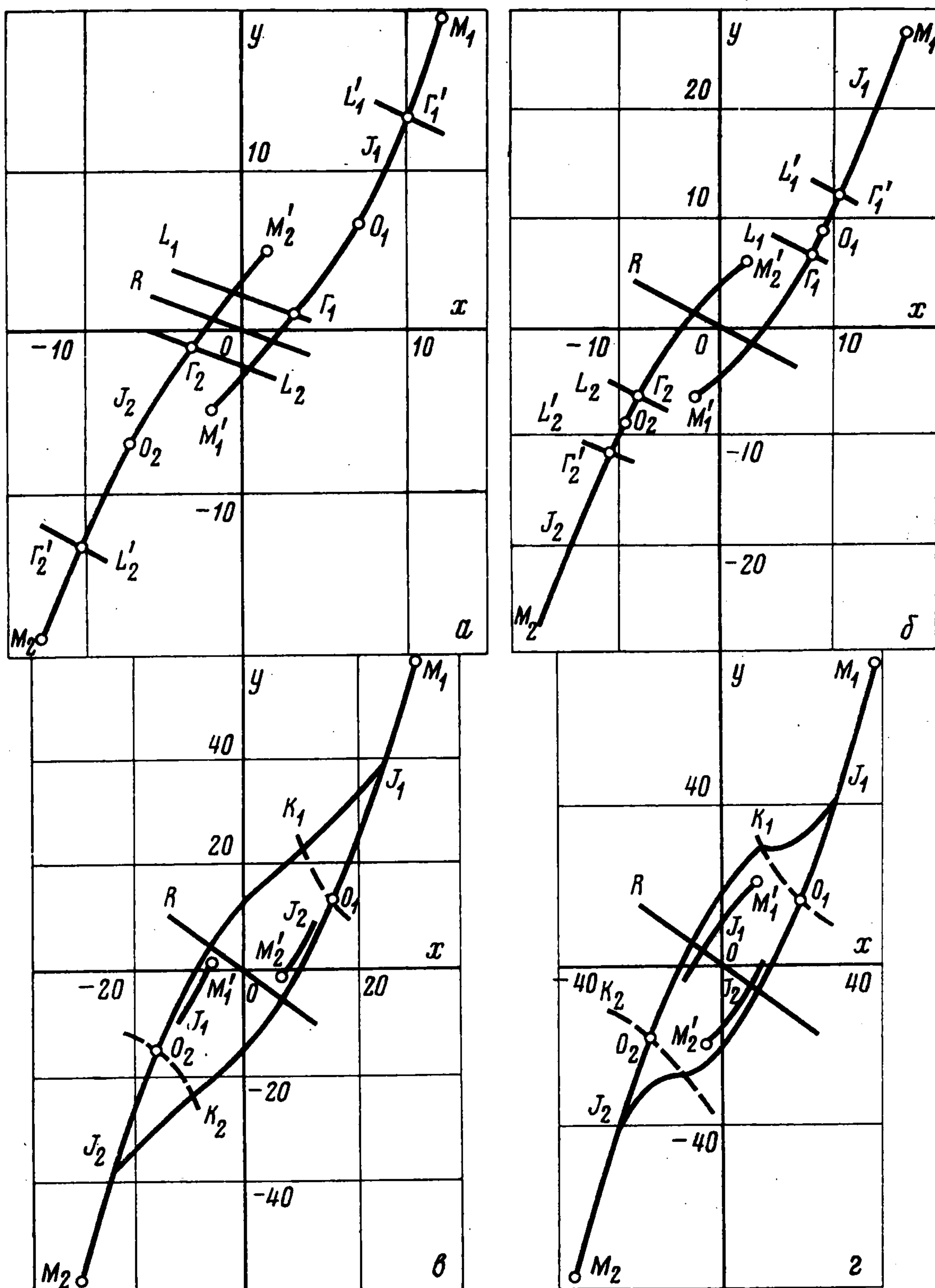
себя. Обозначим эту секущую плоскость через  $\Sigma$ . Отображение  $T$  имеет разрыв на линиях  $K_1$  и  $K_2$  контакта фазовых траекторий с плоскостью  $\Sigma$ , уравнение которых записывается в виде  $xy = b(r - 1)$ . Кроме того, оно разрывно на линии  $R$  пересечения секущей  $\Sigma$  с сепаратрисной поверхностью  $S_2^+$  седлового состояния равновесия  $O$ . В некоторой окрестности этой линии отображение  $T$  гладкое и может быть продолжено по непрерывности на  $R$ . Обозначим  $T_1$  и  $T_2$  сужения отображения  $T$  по разные стороны от линии  $R$ , продолженные на нее по непрерывности (см. фиг. 1, а — б отображение  $T_1$  определено справа от линии  $R$ ,  $T_2$  — слева от  $R$ ). Эти отображения преобразуют линию  $R$  в точки пересечения  $M_1$  и  $M_2$  плоскости  $\Sigma$  с сепаратрисами  $S_1^-$  состояния равновесия  $O$ . Точки  $M_1$  и  $M_2$  при использовании преобразований  $T_1$  и  $T_2$  переходят соответственно в точки  $M_1'$  и  $M_2'$ . Численное определение координат точек  $M_1'$  и  $M_2'$

показывает, что при возрастании параметра  $r$  они приближаются к линии  $R$  и при переходе значения  $r = 13,92$  одновременно пересекают  $R$ , перемещаясь с одной ее стороны на другую. Состояниям равновесия  $O_1$  и  $O_2$  на плоскости  $\Sigma$  отвечают неподвижные точки, за которыми сохранены те же обозначения.

Как отмечалось ранее, все фазовые траектории при возрастании времени  $t$  приходят в сферу (1.2). Это позволяет ограничить рассмотрение точечного преобразования  $T$  кругом

$$(1.6) \quad x^2 + y^2 < b(\sigma + r)^2 - (\sigma + 1)^2$$

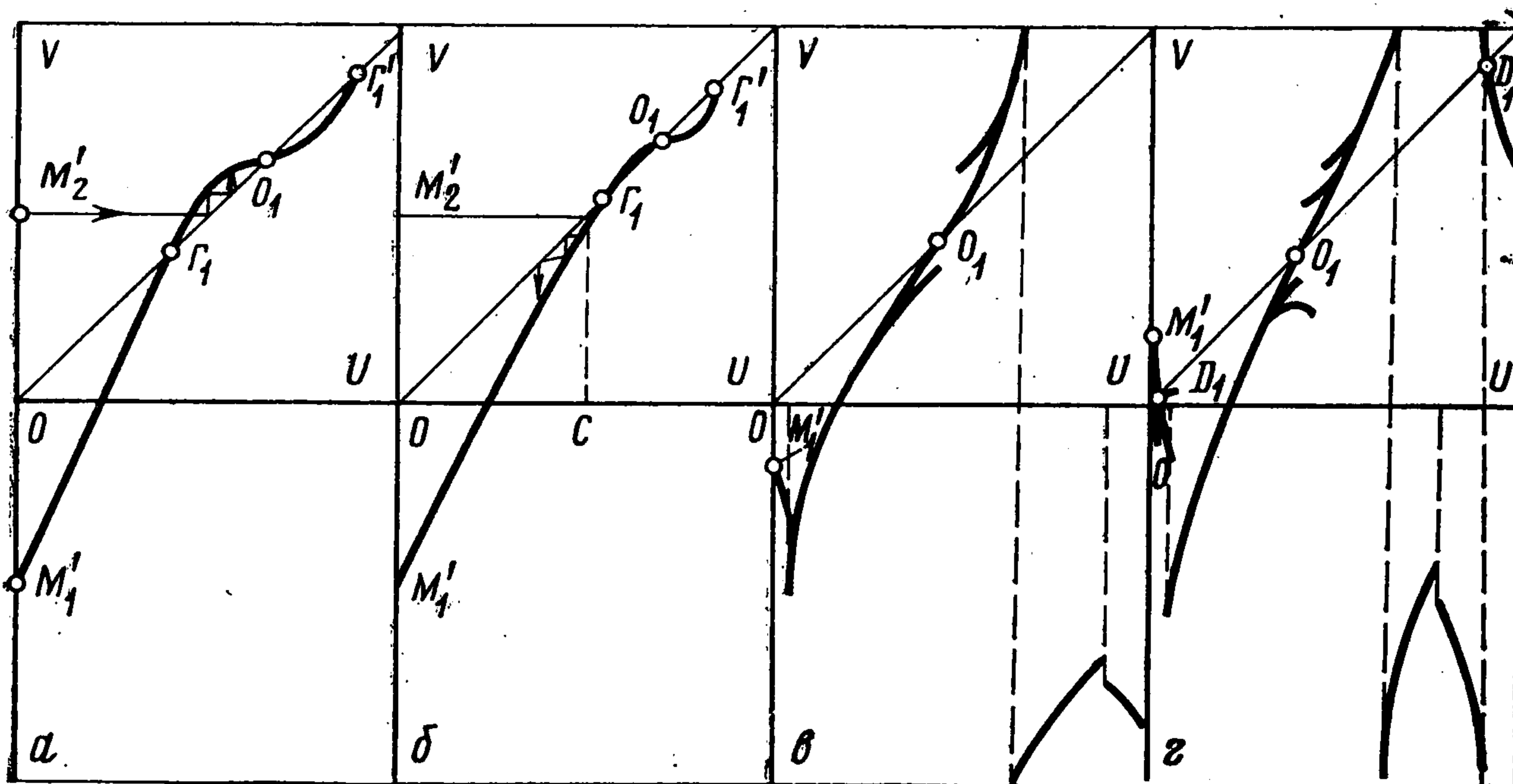
При  $1 < r < 13,92$  этот круг после одного применения отображения  $T$  преобразуется в некоторые ограниченные полосы ширины не большей



Фиг. 2

0,05, а после двух применений — в полосы не шире  $10^{-3}$  (на фиг. 1, *a* — *в* они изображены линиями  $J_1$  и  $J_2$ ). При дальнейших применениях отображения  $T$  эти полосы, продолжая сужаться, одновременно медленно стягиваются, преобразуясь внутрь себя, к устойчивым неподвижным точкам  $O_1$  и  $O_2$ . Последнее находится в соответствии с отмеченной особенностью поведения фазовых траекторий и корней характеристического уравнения состояний равновесия  $O_1$  и  $O_2$ .

При  $r > 13,92$  поведение последовательных преобразований области (1.6) сложнее, так как в этом случае точки областей, лежащие в круге (1.6) и находящиеся по разные стороны от линии  $R$ , могут переходить друг в друга. Однако и теперь последовательные преобразования столь же быстро приближаются к некоторым кривым  $J_1$  и  $J_2$ . Для значений  $r = 20, 24,4, 50, 80$  полученные численно кривые  $J_1$  и  $J_2$  изображены соответственно на фиг. 2, *a* — *г*.



Фиг. 3

Таким образом, отображение  $T$  сильно сжимающее в направлениях к кривым  $J_1$  и  $J_2$ . Поэтому изучение отображения  $T$  сводится к рассмотрению отображений кривых  $J_1$  и  $J_2$  в себя и друг в друга. Для представления точечных отображений кривых  $J_1$  и  $J_2$  выберем вдоль них координату  $u$  как расстояние от линии разрыва  $R$ . По одну сторону от  $R$  будем считать это расстояние положительным, по другую — отрицательным. Полученные численно функции последования  $V = f(u)$  для отображения  $T^2$  кривых  $J_1$  и  $J_2$  приведены на фиг. 3.

**2. Точечное отображение и структура фазового пространства.** Исследуем структуру разбиения фазового пространства  $x, y, z$  системы (1.1) при помощи рассмотрения соответствующего ему точечного отображения  $T$  в зависимости от параметра  $r$ . Как отмечено в п. 1, при  $r < 1$  состояние равновесия  $O$  глобально устойчиво, а при  $1 < r < 13,92$  все фазовые траектории приближаются к устойчивым состояниям равновесия  $O_1$  и  $O_2$ , области притяжения которых разделяются сепаратрисной поверхностью  $S_2^+$  седлового состояния равновесия  $O$  (см. фиг. 1, *a*). Далее рассмотрим

случаи, когда  $r \geq 13,92$ . При  $r = 13,92$  точки  $M_1$  и  $M_2$  второго пересечения сепаратрис  $S_1^-$  с плоскостью  $\Sigma$  попадают на кривую  $R$ , что соответствует образованию петель сепаратрис  $S_1^-$ . При  $r > 13,92$  из этих петель рождаются седловые периодические движения  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  (фиг. 1, б). На секущей плоскости  $\Sigma$ , представленной на фиг. 2, а (здесь  $r = 20$ ), движениям  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  соответствуют двукратные седловые неподвижные точки  $\Gamma_1, \Gamma_1'$  и  $\Gamma_2, \Gamma_2'$ , для которых линии  $J_1$  и  $J_2$  являются выходящими инвариантными кривыми, а линии  $L_1, L_1'$  и  $L_2, L_2'$  — входящими. Видно, что инвариантные кривые  $J_1, J_2$  и  $L_1, L_2$  пересекаются, образуя гомоклиническую структуру, с появлением которой у системы (1.1) появляется бесчисленное множество различных седловых периодических движений и других движений, находящихся в окрестности гомоклинической структуры [16]. Однако в целом поведение последовательных итераций точечного отображения  $T$  вплоть до  $r = 24,06$  остается простым: все точки, за исключением множества точек  $\Omega$  нулевой меры, при отображениях приближаются к одной из устойчивых неподвижных точек  $O_1$  или  $O_2$ . Множество  $\Omega$  играет роль границы, разделяющей области притяжения этих точек.

Сказанное находит отражение в поведении приведенной на фиг. 3, а для кривой  $J_1$  функции последования  $V = f(u)$  для отображения  $T^2$  кривых  $J_1$  и  $J_2$  (в силу свойства 1° функция последования для кривой  $J_2$  симметрична приведенной относительно начала координат). Точки пересечения с биссектрисой соответствуют неподвижным точкам отображения  $T$ . Точки  $M_1'$  и  $M_2'$  второго пересечения сепаратрис  $S_1^-$  с плоскостью  $\Sigma$  лежат на оси  $V$  симметрично относительно начала координат, причем точка  $M_2'$  лежит выше точки  $\Gamma_1$ , а точка  $M_1'$  — ниже точки  $\Gamma_2$ . Поэтому последовательные преобразования точек  $M_1'$  и  $M_2'$  попадают в область притяжения устойчивых неподвижных точек  $O_1$  и  $O_2$  соответственно.

Описанная структура отображения  $T^2$  сохраняется при  $13,92 < r < 24,06$ . При  $r = 24,06$  точки  $M_1'$  и  $M_2'$  попадают на инвариантные кривые  $L_1$  и  $L_2$ , что соответствует появлению негрубой гомоклинической структуры. При этом на графике функции  $V = f(u)$  координаты точек  $M_2'$  и  $\Gamma_1$  ( $M_1'$  и  $\Gamma_2$ ) имеют равные значения. При  $r > 24,06$  точка  $M_2'$  опускается ниже точки  $\Gamma_1$ , точка пересечения кривых  $J_1$  и  $L_1$  исчезает. Для фазовых траекторий появляются три возможности: приближаться к одному из состояний равновесия  $O_1$  или  $O_2$ , или все время пересекать секущую плоскость  $\Sigma$ . На фиг. 2, б представлено взаиморасположение инвариантных кривых отображения  $T$  при  $r = 24,4$ , на фиг. 3, б приведен график отображения  $T^2$  кривой  $J_1$ . Из графика видно, что точка  $M_2'$  лежит ниже точки  $\Gamma_1$ , поэтому последовательные итерации точки  $M_2'$  будут находиться на отрезке  $[-c, c]$  ( $c$  — ордината точки  $M_2'$ ). Поскольку на отрезке  $[-c, c]$   $f'(u) > 1$ , отображение  $T^2$  растягивающее. Итерационные последовательности точек, начинающиеся на отрезке  $[-c, c]$ , соответствуют стохастическому движению системы (1.1).

При  $r = 24,74$  седловые двукратные неподвижные точки  $\Gamma_1, \Gamma_1'$  и  $\Gamma_2, \Gamma_2'$  сливаются с устойчивыми неподвижными точками  $O_1$  и  $O_2$ . Это соответствует слиянию седловых периодических движений  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с устойчивыми

состояниями равновесия  $O_1$  и  $O_2$ . Как известно [16], при такой бифуркации ляпуновская величина  $g_0$  должна быть положительной, что обнаруживается прямой проверкой.

При  $r > 24,74$  все точки плоскости  $\Sigma$  при использовании отображения  $T$  по-прежнему попадают в малые окрестности кривых  $J_1$  и  $J_2$  (фиг. 1, в). Область притяжения стохастических движений совпадает со всем фазовым пространством системы (1.1). С ростом параметра  $r$  вид кривых  $J_1$  и  $J_2$  и их преобразования в себя и друг в друга претерпевают ряд изменений. На фиг. 2, в, г ( $r = 50$  и  $80$  соответственно) каждая кривая  $J_1$  и  $J_2$  состоит из двух частей, что обусловлено разрывностью отображения  $T$  секущей  $\Sigma$  в себя на линиях  $K_1$  и  $K_2$  контакта фазовых траекторий системы (1.1) с плоскостью  $\Sigma$ . Точки  $M_1'$  и  $M_2'$  попадают на линии  $K_1$  и  $K_2$  при  $r = 31,05$ . Это сопровождается появлением новых точек разрыва у функции последования и усложнением ее графиков (для  $r = 50$  и  $80$  они приведены на фиг. 3, в, г соответственно). С ростом  $r$  точки  $M_1'$  и  $M_2'$  вновь приближаются к линии  $R$  и при  $r = 54,65$  пересекают ее. Это соответствует образованию новых петель сепаратрисами  $S_1^-$  состояния равновесия  $O$ . Аналогично случаю  $r = 13,92$  из этих петель возникают седловые периодические движения. На фиг. 3, г им соответствуют двукратные неподвижные точки  $D_1$  и  $D_2'$ .

С некоторого  $r > 65$  графики точечных отображений имеют точки с горизонтальной касательной. Это означает, что стохастичность не может иметь места ни на каком сколь угодно малом интервале значений  $r$  в том смысле, что существует всюду плотное множество значений  $r$ , отвечающих существованию устойчивых многократных неподвижных точек. Появление таких устойчивых точек может произойти и при меньших значениях  $r$ , когда утрачивается растягивающий характер отображения кривых  $J_1$  и  $J_2$ , однако при появлении точек с горизонтальной касательной это заведомо имеет место. Так, при  $r = 100$  обнаружены устойчивые периодические движения, соответствующие следующему шестичленному циклу из неподвижных точек преобразования  $T$ :

$$A_1 (-17,12; -30,3), A_2 (-11,62; -1,56), A_3 (-22,27; -37,28) \\ A_4 (-9,32; 7,63), A_5 (27,7; 56,93), A_6 (2,62; -28,26)$$

Этот устойчивый цикл существует в интервале  $[99, 98; 100, 05]$ .

Специфика поведения решений системы Лоренца для этих значений параметра  $r$  может быть охарактеризована следующим образом. Допустим, что к правым частям уравнений добавлены некоторые случайные с конечным временем корреляции возмущения. Тогда при каждом значении параметра  $r$  существует некоторый порог величины возмущений, после которого начинается случайное блуждание в окрестности двумерной поверхности, отвечающей кривым  $J_1$  и  $J_2$  на секущей  $\Sigma$ . Для одних значений  $r$  эти пороговые значения равны нулю, для других имеют некоторую малую величину. Так, для обнаруженного при  $r = 100$  устойчивого периодического движения случайные блуждания имеют место при возмущениях, представляющих собой случайные толчки координаты  $x$ , не большие чем  $0,05$ , происходящие через промежутки времени  $\Delta t = 4 \cdot 10^{-2}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Неймарк Ю. И.* Теория нелинейных колебаний и стохастические движения динамических систем.— В кн.: Динамика систем. Вып. 12. Горький: Изд-во Горьковск. ун-та, 1977.
2. *Неймарк Ю. И.* О движениях, близких к дwoякоасимптотическому движению.— Докл. АН СССР, 1967, т. 172, № 5.
3. *Неймарк Ю. И.* Об одном классе динамических систем.— Тр. 5-й Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Киев, 1971.
4. *Неймарк Ю. И.* Стохастические движения динамических систем.— В сб.: Динамика систем. Вып. 4. Горький: Изд-во Горьковск. ун-та, 1974.
5. *Неймарк Ю. И.* О возникновении стохастичности в динамических системах.— Изв. вузов. Радиофизика, 1974, № 4.
6. *Неймарк Ю. И.* Синхронизация и стохастичность. Abh. Akad. Wiss. DDR. Abt. Math. Naturwiss. Techn., 1977, No. 4, S. 133.
7. *Lorenz E. N.* Deterministic nonperiodic flow.— J. Atmos. Sci., 1963, v. 20, No. 2.
8. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence.— Commun. Math. Phys., 1971, v. 20, No. 3, p. 167; 1971, v. 23, No. 4, p. 343.
9. *Ruelle D.* The Lorenz attractor and the Problem of turbulence.— Lect. Notes in mathematics, 1976, No. 565.
10. *Henon M., Romeau G.* Two strange attractors with a simple structure.— Lect. Notes in mathematics, 1976, No. 565.
11. *Williams R. F.* The structure of Lorenz attractors.— Lect. Notes in mathematics, 1977, No. 615.
12. *Marsden G.* Attempts to relate the Navier.— Stokes equations to turbulence.— Lect. Notes in mathematics, 1977, No. 615.
13. *Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П.* О возникновении и структуре аттрактора Лоренца.— Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 2.
14. *Lanford O. E.* Computer pictures of the Lorenz attractor.— Lect. Notes in mathematics, 1977, No. 615.
15. *Haken M.* Analogy between higher instabilities in fluids and lasers.— Phys. Lett., 1975, v. A53, No. 1.
16. *Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Введение в теорию нелинейных колебаний М.: Наука, 1976.

Горький

Поступила в редакцию  
14.III.1979