Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 4, 1981

УДК 532.516

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОТОКА ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ВДОЛЬ ЭЛАСТИЧНОЙ СТЕНКИ

Мясников М. П.

Рассматривается устойчивость по отношению к малым длинноволновым возмущениям потока тяжелой вязкой несжимаемой жидкости, взаимодействующего со стенкой, покрытой слоем несжимаемого упругого материала.

1. Исследуются две задачи об устойчивости по отношению к возмущениям типа длинных волн: 1) плоскопараллельный поток жидкости, стекающей по наклонной плоскости, покрытой слоем упругого материала, 2) поток жидкости, стекающей по внешней поверхности вертикальной трубы кругового сечения, покрытой слоем упругого материала.

Движение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье — Стокса [1]

$$\frac{\partial v^k}{\partial t}+v^j\nabla_j v^k=g^k-\frac{1}{\rho_1}g^{kj}\frac{\partial p_1}{\partial x_j}+\nu\Delta v^k,\quad \nabla_k v^k=0$$

где v^k — контравариантные компоненты вектора скорости, ρ_1 — плотность жидкости, p_1 — давление в жидкости, ν — кинематическая вязкость жидкости, g^k — контравариантные компоненты вектора ускорения силы тяжести. Система уравнений движения упругого материала имеет вид [2,3]

$$\frac{\partial u^k}{\partial t}+u^j\nabla_j u^k=g^k+\frac{1}{\rho_2}\nabla_j p^{kj},\quad \nabla_k u^k=0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}+u^k\nabla_k\varepsilon_{ij}+\varepsilon_{ki}\nabla_j u^k+\varepsilon_{kj}\nabla_i u^k=e_{ij}$$

$$e_{ij}={}^1/_2(g_{kj}\nabla_i u^k+g_{ki}\nabla_j u^k),\quad p^{kj}=-p_2g^{kj}+2\mu g^{k\alpha}g^{j\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}$$

где u^k — контравариантные компоненты вектора скорости точек упругого материала, p^{kj}—контравариантные компоненты тензора напряжений, $\varepsilon_{\alpha\beta}$— ковариантные компоненты тензора деформаций, ρ_2 — плотность упругого материала, p_2 — давление в упругом материале, μ — модуль сдвига.

Краевые условия:

1) на свободной поверхности жидкости

$$F(x_1,x_2,x_3,t)=0,\quad \frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+v^i\frac{\partial F}{\partial x_i}=0$$

$$(-p_1g^{kj}+2\rho_1g^{k\alpha}g^{j\beta}e_{\alpha\beta})\frac{\partial F}{\partial x_j}=-p\frac{\partial F}{\partial x_k}$$

где $-p$ — атмосферное давление ($p>0$);

2) на поверхности контакта жидкости с упругим материалом

$$f(x_1, x_2, x_3, t) = 0, \quad (-p_1 g^{kj} + 2\rho_1 \nu g^{k\alpha} g^{j\beta} e_{\alpha\beta}) \frac{\partial f}{\partial x_j} =$$
$$= (-p_2 g^{kj} + 2\mu g^{k\alpha} g^{j\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}) \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad u^i = v^i$$

3) условие неподвижного закрепления упругого материала на твердой стенке

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad u^i = 0$$

Все уравнения и краевые условия записывались далее для физических компонент векторов и тензоров в безразмерном виде. Физические компоненты вектора скорости v_i и u_i в произвольной ортогональной криволинейной системе координат выражаются через контравариантные компоненты v^i и u^i следующим образом [1]: $v_i = v^i \sqrt{g_{ii}}$, $u_i = u^i \sqrt{g_{ii}}$, где g_{ij} — ковариантные компоненты метрического тензора. Для физических компонент тензоров напряжений и деформаций имеем [1]: $\sigma_{ij} = p^{ij} \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}$, $s_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} \sqrt{g^{\alpha\alpha}} \sqrt{g^{\beta\beta}}$, где g^{ij} — контравариантные компоненты метрического тензора. При переходе к безразмерным переменным в качестве масштабов служат характерная длина l_0, скорость V_0 и ускорение силы тяжести g. Компоненты тензора напряжений отнесены к величине $\rho_1 V_0^2$, время измерялось в масштабе $t_0 = l_0/V_0$. В уравнения входят следующие безразмерные параметры: $R = V_0 l_0/\nu$ — число Рейнольдса, $F = V_0^2/g l_0$ — число Фруда, $m = V_0 \sqrt{\rho_2/\mu}$, $\varkappa = \rho_1/\rho_2$.

2. Задача о стекании тяжелой вязкой несжимаемой жидкости по наклонной плоскости, покрытой слоем упругого материала, имеет следующее стационарное решение:

$$v_x^\circ(y) = -{}^1/_2\, q\,(y - h_0)^2 + q\,(H_0 - h_0)(y - h_0), \quad v_y^\circ = 0$$
$$p_1^\circ(y) = p + r\,(H_0 - y), \quad u_x^\circ = u_y^\circ = s_{xx}^\circ = 0$$
$$s_{xy}^\circ(y) = G\,[h_0 - y + \varkappa\,(H_0 - h_0)] \sin\theta, \quad s_{yy}^\circ = -2[s_{xy}^\circ]^2$$
$$\varkappa m^2 p_2^\circ(y) = \varkappa m^2 p + 2G[h_0 - y + \varkappa\,(H_0 - h_0)] \cos\theta -$$
$$- 4G^2\,[h_0 - y + \varkappa\,(H_0 - h_0)]^2 \sin^2\theta$$
$$G = {}^1/_2 m^2 F^{-1}, \quad q = RF^{-1}\sin\theta, \; r = F^{-1}\cos\theta$$

Здесь v_x°, v_y° — компоненты вектора скорости в жидкости, u_x°, u_y° — компоненты вектора скорости в упругом материале, p_1° и p_2° — давление в жидкости и в упругом материале соответственно, s_{xx}°, s_{yy}°, s_{xy}° — компоненты тензора деформаций в упругом материале. Ось x прямоугольной декартовой системы координат направлена в сторону движения жидкости, ось y направлена в сторону свободной поверхности жидкости $y = H_0$. Поверхность контакта жидкости с упругим материалом $y = h_0$, угол наклона плоскости к горизонту θ.

Для сокращения записи введем соответствие между числовыми и буквенными индексами

$$\begin{Bmatrix} x, y \to i & x \; y \\ & 1 \; 2 \end{Bmatrix}$$

Чтобы изучить устойчивость установившегося движения по отношению к малым возмущениям, положим [4]

$$v_i = v_i^\circ + \alpha v_i^1, \quad u_i = u_i^\circ + \alpha u_i^1, \quad s_{ij} = s_{ij}^\circ + \alpha s_{ij}^1$$
$$p_1 = p_1^\circ + \alpha p_1^1, \quad p_2 = p_2^\circ + \alpha p_2^1$$

где $\alpha \ll 1$, и представим возмущения в виде [4]

$$\{v_i^1, u_i^1, p_1^1, p_2^1, s_{ij}^1\} =$$
$$= \{\varphi_i(y), \Phi_i(y), \varphi_3(y), \Phi_3(y), \Psi_{ij}(y)\} \exp[i\omega(x - ct)]$$

В случае возмущений типа длинных волн $\omega \ll 1$.

Получаем следующую краевую задачу для возмущений (штрих означает производную по y):

$$\varphi_2'''' - i\omega R(v - c)\varphi_2'' + i\omega R v''\varphi_2 = 0$$
$$\Phi_2'''' + 4i\omega s\Phi_2''' + 6i\omega s'\Phi_2'' = 0$$
$$y = H_0{:}\ (v_m - c)\varphi_2''' - i\omega R(v_m - c)^2\varphi_2' + i\omega Rr\varphi_2 = 0$$
$$(v_m - c)\varphi_2'' - v''\varphi_2 = 0$$
$$y = h_0{:}\ i\omega c\varkappa m^2\varphi_2'' + i\omega\varkappa m^2 v''\varphi_2 = -R\Phi_2''$$
$$i\omega c\varkappa m^2\varphi_2''' = -R\Phi_2''' - 4i\omega Rs\Phi_2'' - 2i\omega Rs'\Phi_2'$$
$$c\varphi_2' + v'\varphi_2 = c\Phi_2', \ \varphi_2 = \Phi_2$$
$$y = 0{:}\ \Phi_2 = 0, \ \Phi_2' = 0$$
$$v = v_x^\circ(y), \quad v_m = v(H_0), \ s = s_{xy}^\circ(y)$$

Члены порядка ω^2 отброшены.

Для функций $\varphi_2(y)$ и $\Phi_2(y)$ ищем решения уравнений в виде разложения в ряд по степеням ω, получим

$$\varphi_2(y) = c_1 + c_2(y - h_0) + c_3\{(y - h_0)^2 +$$
$$+ i\omega R\left[-c\frac{(y - h_0)^4}{12} + q(H_0 - h_0)\frac{(y - h_0)^5}{60}\right]\Big\} + c_4\Big\{(y - h_0)^3 +$$
$$+ i\omega R\left[-c\frac{(y - h_0)^5}{20} + q(H_0 - h_0)\frac{(y - h_0)^6}{60} - q\frac{(y - h_0)^7}{420}\right]\Big\}$$
$$\Phi_2(y) = b_1 + b_2 y + b_3 y^2 + b_4\{y^3 -$$
$$- i\omega G[h_0 + \varkappa(H_0 - h_0)]\, y^4 \sin\theta + {}^1/_2\, i\omega G y^5 \sin\theta\}$$

Краевые условия дают восемь линейных однородных уравнений относительно постоянных c_n, b_n $(n = 1, 2, 3, 4)$. Равенство нулю определителя этой системы приводит к следующему уравнению для c:

$$6(2v_m - c) - 2i\omega Rr(H_0 - h_0)^3 + 3i\omega R\Big[(v_m - c)^2(H_0 - h_0)^2 -$$
$$- v_m(v_m - c)\frac{(H_0 - h_0)^2}{6} - v_m^2\frac{(H_0 - h_0)^2}{10}\Big] -$$
$$- 6i\omega\varkappa m^2 q h_0 R^{-1}(H_0 - h_0)c = 0$$

Чтобы удовлетворить этому уравнению, положим $c = c^\circ + \omega c^1$, тогда получим

$$c^\circ = 2v_m, \quad c^1 = -\frac{1}{3}iRr(H_0 - h_0)^3 +$$
$$+ \frac{8}{15}iR(H_0 - h_0)^2 v_m^2 - 2i\varkappa m^2 q h_0 R^{-1}(H_0 - h_0)v_m$$

Пусть в размерных величинах уравнение свободной поверхности жидкости в невозмущенном движении будет $y = H$, а поверхности контакта жидкости с упругим покрытием $y = h$. Положим $l_0 = H - h$, $V_0 = \sqrt{g(H-h)}$, тогда $F = 1$, $R = (H-h)\sqrt{g(H-h)}/\nu$, $m^2 = \rho_2 g(H-h)/\mu$. Условие устойчивости основного течения будет иметь вид

$$R^2 < \frac{5}{2}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{15}{2}\frac{\rho_1 gh}{\mu}$$

Упругое покрытие стабилизирует основное течение. В случае вертикальной плоскости ($\theta = \pi/2$) упругое покрытие создает область устойчивости течения жидкости, тогда как в случае твердой стенки поток неустойчив. Чем эластичнее материал покрытия, тем больше область устойчивости. Если $h = 0$ или $\mu \to \infty$ (нет упругого покрытия), то получаем условие устойчивости, найденное в [5].

3. Задача о стекании тяжелой вязкой несжимаемой жидкости по внешней поверхности вертикальной трубы, покрытой слоем упругого материала, имеет следующее стационарное решение:

$$v_z^\circ(r) = {}^1/_4\, q(r^2 - h_0^2) - {}^1/_2 qH_0^2(\ln r - \ln h_0)$$
$$p_1^\circ = p, \quad v_r^\circ = v_\varphi^\circ = u_r^\circ = u_\varphi^\circ = u_z^\circ = s_{zz}^\circ = 0$$
$$s_{rz}^\circ(r) = {}^1/_2 G(r - \lambda r^{-1}), \quad s_{rr}^\circ(r) = -{}^1/_2 G^2(r - \lambda r^{-1})^2$$
$$\varkappa m^2 p_2^\circ(r) = \varkappa m^2 p + {}^1/_4 G^2[-6r^2 + 2h_0^2 +$$
$$+ 8\lambda(1 + \ln r - \ln h_0) - 2\lambda^2(r^{-2} + h_0^{-2})]$$
$$q = RF^{-1}, \ \lambda = h_0^2 + \varkappa(H_0^2 - h_0^2), \quad G = {}^1/_2\, m^2 F^{-1}$$

Здесь r, φ, z — цилиндрическая система координат, ось z которой совпадает с продольной осью трубы, r, φ — полярные координаты в плоскости поперечного сечения, внешняя поверхность твердой стенки трубы $r = a_0$, поверхность контакта упругого покрытия с жидкостью $r = h_0$, свободная поверхность жидкости $r = H_0$; остальные обозначения имеют прежнее значение. Для сокращения записи введем соответствие между буквенными и числовыми индексами:

$$\left\{\begin{matrix} r, \varphi, z \to i & r \ \varphi \ z \\ & 1 \ 2 \ 3 \end{matrix}\right\}$$

Чтобы изучить устойчивость установившегося движения по отношению к малым возмущениям, положим [4]

$$v_i = v_i^\circ + \alpha v_i^1, \quad u_i = u_i^\circ + \alpha u_i^1, \quad s_{ij} = s_{ij}^\circ + \alpha s_{ij}^1$$
$$p_1 = p_1^\circ + \alpha p_1^1, \ p_2 = p_2^\circ + \alpha p_2^1$$

где $\alpha \ll 1$, и представим возмущения в виде [4]

$$\{v_i^1, u_i^1, p_1^1, p_2^1, s_{ij}^1\} =$$
$$= \{\varphi_i(r), \Phi_i(r), \varphi_4(r), \Phi_4(r), \Psi_{ij}(r)\}\exp[i\omega(z - ct)]$$

Полагая $\omega \ll 1$, получим следующую краевую задачу (штрих означает производную по r):

$$\varphi_1'''' + 2r^{-1}\varphi_1''' - 3r^{-2}\varphi_1'' + 3r^{-3}\varphi_1' - 3r^{-4}\varphi_1 -$$
$$- i\omega R(v - c)(\varphi_1'' + r^{-1}\varphi_1' - r^{-2}\varphi_1) +$$
$$+ i\omega Rv''\varphi_1 - i\omega Rr^{-1}v'\varphi_1 = 0$$
$$\Phi_1'''' + (2r^{-1} + 4i\omega s)\Phi_1''' + (-3r^{-2} + 6i\omega r^{-1}s + 6i\omega s')\Phi_1'' +$$

$$+(3r^{-3}+4i\omega s''-2i\omega r^{-2}s+2i\omega r^{-1}s')\Phi_1'+(-3r^{-4}+$$
$$+2i\omega s'''-4i\omega r^{-2}s'+4i\omega r^{-3}s)\Phi_1=0$$
$$r=H_0:\ \varphi_1'''+2H_0^{-1}\varphi_1''-H_0^{-2}\varphi_1'+H_0^{-3}\varphi_1-i\omega R(v_m-c)\varphi_1'-$$
$$-i\omega RH_0^{-1}(v_m-c)\varphi_1=0$$
$$\varphi_1''+H_0^{-1}\varphi_1'-[H_0^{-2}+v''(v_m-c)^{-1}]\varphi_1=0$$
$$r=h_0:\ i\omega\varkappa m^2cR^{-1}(\varphi_1'''+2h_0^{-1}\varphi_1''-h_0^{-2}\varphi_1'+h_0^{-3}\varphi_1)=$$
$$=-\Phi_1'''-(2h_0^{-1}+4i\omega s)\Phi_1''+(h_0^{-2}-2i\omega s'-2i\omega h_0^{-1}s)\Phi_1'+$$
$$+(-h_0^{-3}-2i\omega s''+4i\omega h_0^{-2}s)\Phi_1$$
$$i\omega\varkappa m^2R^{-1}[c(\varphi_1''+h_0^{-1}\varphi_1'-h_0^{-2}\varphi_1)+v''\varphi_1]=$$
$$=-\Phi_1''-h_0^{-1}\Phi_1'+h_0^{-2}\Phi_1+2i\omega h_0^{-1}s\Phi_1$$
$$c\varphi_1'+v'\varphi_1=c\Phi_1',\ \varphi_1=\Phi_1,$$
$$r=a_0:\ \Phi_1=0,\ \Phi_1'=0$$
$$v=v_z^\circ(r),\ v_m=v(H_0),\ s=s_{rz}^\circ(r)$$

Для $\varphi_1(r)$ и $\Phi_1(r)$ ищем решения уравнений в виде ряда по степеням ω, получим

$$\varphi_1(r)=c_1r+c_2\left\{r^3+\frac{i\omega R}{144}\left[6r^5(v-c)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{11}{4}qH_0^2r^5-\frac{5}{4}qr^7\right]\right\}+c_3\left[r^{-1}+\frac{1}{8}i\omega RqH_0^2r(\ln r-\ln h_0)^2\right]+$$
$$+c_4\left\{r(\ln r-\ln h_0)+\frac{i\omega R}{96}\left[\frac{1}{4}qr^5+(12r^3v-12r^3c+15qH_0^2r^3-\right.\right.$$
$$\left.\left.-3qr^5)(\ln r-\ln h_0)\right]\right\}$$
$$\Phi_1(r)=b_1r+b_2[r^3-{}^1/_4\,i\omega Gr^5+$$
$$+i\omega G\lambda r^3(\ln r-\ln h_0)]+b_3[r^{-1}+$$
$$+i\omega G\lambda r^{-1}(\ln r-\ln h_0)]+b_4r(\ln r-\ln h_0)$$

Действуя совершенно аналогично проведенному в п. 2 анализу, получим условие устойчивости в виде

$$R^2h_0^2f(\beta)<192\,\varkappa m^2g(\beta)$$
$$f(\beta)=128\beta^6-36\beta^4-144\beta^2+52+$$
$$+(96\beta^6-720\beta^4+288\beta^2)\ln\beta-$$
$$-480\beta^4(\beta^2-1)\ln^2\beta+384\beta^6\ln^3\beta$$
$$g(\beta)=(\beta^4-1)(1-\gamma^2)+(6\beta^4-8\beta^2+2)\ln\gamma-$$
$$-4(1-\gamma^2)\beta^2\ln\beta-8\beta^4\ln\beta\ln\gamma$$
$$\beta=H_0/h_0>1,\qquad \gamma=a_0/h_0<1$$

Полученное условие устойчивости справедливо, если радиус кривизны цилиндрической поверхности трубы имеет порядок характерного линейного размера задачи.

Если полагать, что радиус кривизны цилиндрической поверхности трубы имеет порядок длины волны или больше, то изменятся порядки членов, входящих в уравнения и краевые условия задачи, что приведет к перестройке асимптотических рядов для функций $\varphi_1(r)$ и $\Phi_1(r)$. Поэтому переход к пределу при $a_0\to\infty$ в полученной формуле не имеет смысла и дает неправильный ответ $R=0$. Случай, когда радиус кривизны поверхности трубы имеет порядок длины волны, может быть изучен с помощью метода, изложенного в п. 2. При $a_0 = 0$ жидкость стекает по поверхности сплошного упругого цилиндра. Чтобы изучить устойчивость такого течения, необходимо учесть продольное удлинение упругого цилиндра.

Пусть в размерных переменных уравнение свободной поверхности жидкости в невозмущенном движении $r = H$, уравнение поверхности контакта упругого покрытия с жидкостью $r = h$, уравнение поверхности трубы $r = a$. Выберем $l_0 = h$, $V_0 = \sqrt{gh}$. Тогда $\beta = H/h$, $\gamma = a/h$, $R = h\sqrt{gh}/\nu$. Можно показать, что

$$f(1) = f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 0, \quad f''''(1) = 2304$$
$$g(1) = g'(1) = g''(1) = 0, \quad g'''(1) = 16(1 - \gamma^2 - 4\ln\gamma) > 0$$

Следовательно, при $H - h \ll h$ ($\beta \to 1$) будем иметь [6]

$$f(\beta) = \frac{f''''(1) + \alpha_1(\beta)}{4!}(\beta - 1)^4, \quad g(\beta) = \frac{g'''(1) + \alpha_2(\beta)}{3!}(\beta - 1)^3$$

где $\alpha_1(\beta) \to 0$ и $\alpha_2(\beta) \to 0$ при $\beta \to 1$. Условие устойчивости при $H - h \ll h$ будет иметь вид

$$R^2 < \frac{16}{3}\frac{\rho_1 g}{\mu}[1 - 4\ln\gamma - \gamma^2]\frac{h^2}{H-h}$$

Полученная формула показывает, что при $h = a$ или $\mu \to \infty$ (нет упругого покрытия) течение всегда неустойчиво. Упругое покрытие создает запас устойчивости для основного течения, причем чем меньше величина μ, т. е. чем эластичнее материал покрытия, тем больше запас устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976. 535 с.
2. *Седов Л. И.* Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
3. *Годунов С. К.* Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 303 с.
4. *Линь Цзя-цзяо*, Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.
5. *Иванилов Ю. П.* Об устойчивости плоскопараллельного течения вязкой жидкости над наклонным дном.— ПММ, 1960, т. 24, вып. 2, с. 380—381.
6. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1969. 607 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.III.1980