Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 4, 1981

УДК 532/534

МЕТОД ПОДВИЖНЫХ КООРДИНАТ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Медведев А. Е., Фомин В. М.

Метод построения разностной сетки совместно с решением физической задачи [1] применяется к решению упругопластических и газодинамических задач. Изучаются два различных вариационных критерия выбора координатной сетки. Первый критерий строится на основе рассмотрения функционала, зависящего от скорости потока и движения криволинейных подвижных координат. Получена оценка поведения криволинейных координат в зависимости от локальных свойств потока. На примере свойств решения модельного уравнения Хопфа предлагается второй критерий выбора функционала, зависящего от невязки разностной схемы, что позволяет учесть свойства не только решения, но и разностной схемы.

При расчете многомерных задач механики сплошной среды со свободными границами и большими деформациями необходимо применять численные алгоритмы, учитывающие априорно основные особенности решения. Был предложен [1] метод построения разностной сетки совместно с решением задачи. В дальнейшем [2, 3] этот метод применялся для решения некоторых простейших задач газовой динамики.

1. Уравнения упругопластичности в криволинейных подвижных координатах и вариационный критерий построения сетки, зависящей от потока. Рассмотрим взаимно-однозначное отображение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{q})$ пространства $G = \{t, q^1, q^2, q^3\}$ на пространство $X = \{t, x^1, x^2, x^3\}$, сохраняющее разделение на пространственные координаты и время. Отображение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{q})$ задает криволинейную подвижную координатную сетку, а вектор $\mathbf{w} = \partial\mathbf{x}/\partial t$ — скорость ее движения в постранстве X.

Обозначим

$$a_j^{\,i} = \frac{\partial x^i}{\partial q^j}, \quad b_j^{\,i} = \frac{\partial q^i}{\partial x^j}, \quad a_\beta^{\,i} b_j^{\,\beta} = \delta_j^{\,i}, \quad \Delta = \det \| a_j^{\,i} \|$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^i = \left(\frac{\partial}{\partial q^\beta} a_\alpha^{\,k} \right) b_k^{\,i} \quad (\alpha, \beta, i, j, k = 1, 2, 3)$$

(по повторяющемуся индексу производится суммирование). Уравнения, описывающие пространственное движение идеальной упругопластической среды в декартовых координатах X, имеют вид [4, 5]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho u^k) = 0, \quad \frac{\partial \rho u^i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho u^i u^k + P\delta_i^{\,k} - S^{ik}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\rho u^k\left(e + \frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho}\right) - S^{ik}u^i\right] = 0$$

$$\frac{dS^{ij}}{dt} - \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\mu\,(u^i\delta_j^{\,k} + u^j\delta_i^{\,k}) - \frac{2}{3}u^k\delta_j^{\,i}\right] = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор скорости, μ — модуль сдвига, давление $P = P(\rho, e)$ — известная функция, S^{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений.

Условие пластичности берется в форме Мизеса $S^{ij}S^{ij} \leqslant {}^2/_3\sigma_s{}^2$.

Применяя формулы законов сохранения в криволинейных координатах [6] для тензоров первого C^α и второго рангов $E^{\alpha\beta}$, где в рассматриваемом случае

$$C^\circ = \rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right), \quad C^i = \rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right)u^i + Pu^i - S^{ki}u^k$$

$$\| E^{\alpha\beta} \| = \begin{Vmatrix} \rho & \rho u^k \\ \rho u^i & \rho u^i u^k + P\delta_i{}^k - S^{ik} \end{Vmatrix} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

и формулу для материальной производной в координатах G, получим уравнения идеальной упругопластичности в криволинейных подвижных координатах

$$\frac{\partial \rho\Delta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q^k}[\rho\Delta(v^k - \omega^k)] = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \rho\Delta(v^i - w^i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q^k}\{\Delta[\rho(v^i - \omega^i)(v^k - \omega^k) - \xi^{ik}]\} +$$

$$+ \Delta\rho\left[\frac{\partial \omega^i}{\partial t} + \frac{\partial \omega^i}{\partial q^k}(2v^k - \omega^k) + \left(v^k v^l - \frac{1}{\rho}\xi^{kl}\right)\Gamma^i_{kl} +\right.$$

$$\left.+ \frac{1}{\rho} g^{ik}\frac{\partial P}{\partial q^k}\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\Delta\left(e + g_{nm}\frac{v^n v^m}{2}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial q^k}\left\{\Delta\left[\rho\left(e + g_{nm}\frac{v^n v^m}{2}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times(v^k - \omega^k) + Pv^k - \xi^{rl}a_l{}^n v^s g_{rs}\right]\right\} = 0$$

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\xi^{ml}a_m{}^i a_l{}^j) - \frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial q^k}(\Delta\omega^i\xi^{ml}a_m{}^n a_l{}^j) +$$

$$+ \Delta v^k\left[\frac{\partial}{\partial q^k}(\xi^{ml}a_m{}^i a_l{}^j) + \Gamma_{kn}{}^i\xi^{ml}a_m{}^n a_l{}^j + \Gamma_{kn}{}^i\xi^{ml}a_m{}^i a^n{}_l\right] -$$

$$-\mu\left\{\left[\delta_j{}^k\left(\frac{\partial \omega^m}{\partial q^n}a_m{}^i + \omega^m\frac{\partial a_m{}^i}{\partial q^n}\right) +\right.\right.$$

$$\left.\left.+ \delta_i{}^k\left(\frac{\partial \omega^m}{\partial q^n}a_n{}^j + \omega^m\frac{\partial a_m{}^j}{\partial q^n}\right)\right]b_k{}^n - \frac{2}{3}\delta_k{}^i\frac{\partial \Delta v^k}{\partial q^k}\right\} = 0$$

$$g^{ij} = b_k{}^i b_k{}^j, \quad g_{ij} = a_i{}^k a_j{}^k, \quad v^i = u^k b_k{}^i, \quad \omega^i = w^k b_k{}^i$$

$$\xi^{ij} = S^{kl}b_k{}^i b_l{}^j, \quad \Delta = \det\| a_j{}^i \| \; (i, j, k, l, m, n, r, s = 1, 2, 3)$$

Данное отображение будет взаимно-однозначным, если якобиан преобразования $\Delta = \det\| a_j{}^i \| \neq 0$. В полученной системе уравнений (1.1) вектор-функция $\mathbf{w} = \partial\mathbf{x}/\partial t$ в общем случае должна быть задана. Однако при решении конкретных краевых задач конечно-разностным методом удобно исходить из условия, что $\mathbf{w}$ определяется в процессе решения на каждый фиксированный момент времени.

Для этой цели, используя идею работы [1], будем определять вектор-функцию $\mathbf{w}$ на основе вариационного принципа. Составим функционал

$$\Phi(\mathbf{w}) = \int\limits_{\Omega_t} F\, d\Omega_t \tag{1.2}$$

$$F=\left(\mathbf{w}-\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{u}\right)^2+[\varepsilon_1(\operatorname{div}\mathbf{w})^2+\varepsilon_2\Gamma^2+\varepsilon_3(\operatorname{rot}\mathbf{w})^2]\times \tag{1.3}$$
$$\times\left[\left(\rho T\frac{dS}{dt}+\operatorname{div}\mathbf{g}\right)+c\right]+\left[k_*\operatorname{div}\mathbf{w}-\operatorname{div}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{u}\right)\right]^2$$

Здесь Ω_t — область занимаемой средой в момент времени t, а ε_1, ε_2, ε_3, c, k_* — неотрицательные постоянные нормирующие множители, $\mathbf{g}$ — вектор притока тепла.

В начальный момент времени $t=0$ криволинейные координаты $\mathbf{q}$ выбираются в зависимости от области, занимаемой средой Ω_0 в виде $\mathbf{q}=\Psi(\mathbf{x})$.

Первое слагаемое в (1.3) характеризует отклонение от лагранжевых координат. Второе слагаемое представляет произведение двух сомножителей: первый есть сумма квадратов изменения объема $(\operatorname{div}\mathbf{w})^2$, сдвига

$$\Gamma^2=4\left[\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial w^i}{\partial x^i}\right)^2+\left(\frac{\partial w^1}{\partial x^1}\frac{\partial w^2}{\partial x^2}+\frac{\partial w^1}{\partial x^1}\frac{\partial w^3}{\partial x^3}+\frac{\partial w^2}{\partial x^2}\frac{\partial w^3}{\partial x^3}\right)\right]+$$
$$+3\left[\left(\frac{\partial w^1}{\partial x^2}+\frac{\partial w^2}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial w^1}{\partial x^3}+\frac{\partial w^3}{\partial x^1}\right)+\left(\frac{\partial w^2}{\partial x^3}+\frac{\partial w^3}{\partial x^2}\right)^2\right]$$

и вращения $(\operatorname{rot}\mathbf{w})^2$ ячейки координатной сетки, второй определяет диссипацию энергии в среде. Второе слагаемое требует, чтобы искажение координатной сетки было тем меньше, чем больше диссипация энергии в среде. Последнее слагаемое в (1.3) характеризует концентрацию координатной сетки в области больших градиентов скоростей $\mathbf{u}$.

Таким образом, задачу об определении неизвестной функции $\mathbf{w}$ можно сформулировать следующим образом: среди класса допустимых функций $\mathbf{w}$ в области $\Omega_t(t,q^1,q^2,q^3)$ найти ту, которая реализует минимум функционала (1.2) с дифференциальным условием (1.1) и граничным условием

$$\mathbf{w}\,|_{\partial\Omega_t}=(\partial\Psi/\partial\mathbf{x})\,\mathbf{u}\,|_{\partial\Omega_t}$$

Следует заметить, что аналогично формулируется задача определения вектор-функции $\mathbf{w}$ для газодинамических течений, только дифференциальные условия (1.1) будут в этом случае иметь вид [1, 6]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial q^k}[\rho\Delta(v^k-\omega^k)]=0 \tag{1.4}$$
$$\frac{\partial\rho\Delta(v^i-\omega^i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial q^k}[\rho\Delta(v^i-\omega^i)(v^k-\omega^k)]+$$
$$+\Delta\rho\left[\frac{\partial\omega^i}{\partial t}+\frac{\partial\omega^i}{\partial q^k}(2v^k-\omega^k)+v^kv^l\Gamma_{kl}^{\ i}+\frac{g^{ik}}{\rho}\frac{\partial P}{\partial q^k}\right]=\Delta\rho F^i$$
$$\frac{\partial\rho\Delta\left(e+g_{km}\dfrac{v^kv^m}{2}\right)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial q^j}\left[\Delta\rho\left(e+g_{km}\frac{v^kv^m}{2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times(v^j-\omega^j)+\Delta Pv^j\right]=\Delta\rho g_{km}F^kv^m$$
$$e=e(P,\rho)\quad(i,j,k,l,m=1,2,3)$$

где $\mathbf{F}$ — вектор массовых сил.

2. Примеры координатных сеток в зависимости от свойств потока.

Пример 1. Рассмотрим одномерные нестационарные течения идеального газа без ударных волн. В этом случае $\rho T dS/dt + \operatorname{div}\mathbf{g} \equiv 0$, т. е. диссипация энергии отсутствует. Уравнение Эйлера, обеспечивающее минимум функционала (1.2) при условиях (1.4) для $i, j, k, l, m = 1$ в области $x_0(t) \leqslant x \leqslant x_1(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ имеет вид

$$\alpha^2 w_{xx} - w = k_* \varphi_{xx} - \varphi - \alpha^2 \tag{2.1}$$

$$\varphi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} u(x, t), \quad \alpha^2 = (\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2) c + k_*$$

с граничными условиями

$$w\,|_{x_0(t)} = \varphi\,|_{x_0(t)} = \varphi_0(t), \quad w\,|_{x_1(t)} = \varphi\,|_{x_1(t)} = \varphi_1(t)$$

Решая уравнение (2.1), находим

$$\begin{aligned} w(x,t) = {} & \left(1 - \frac{k_*}{\alpha^2}\right)\left(\operatorname{sh}\frac{x_1 - x_0}{\alpha}\right)^{-1}\left[\varphi_0(t)\operatorname{sh}\frac{x_1 - x}{\alpha} + \right. \\ & \left. + \varphi_1(t)\operatorname{sh}\frac{x - x_0}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\operatorname{sh}\frac{x - x_0}{\alpha}\int_{x_0}^{x_1}\varphi(\xi, t)\operatorname{sh}\frac{x_1 - \xi}{\alpha}\, d\xi\right] + \\ & + \alpha^2\left[1 - \left(\operatorname{sh}\frac{x_1 - x}{\alpha} + \operatorname{sh}\frac{x - x_0}{\alpha}\right)\left(\operatorname{sh}\frac{x_1 - x_0}{\alpha}\right)^{-1}\right] + \\ & + \frac{k_*}{\alpha^2}\varphi(x, t) - \left(1 - \frac{k_*}{\alpha^2}\right)\frac{1}{\alpha}\int_{x_0}^{x}\varphi(\xi, t)\operatorname{sh}\frac{x - \xi}{\alpha}\, d\xi \end{aligned}$$

Если $k_* = \alpha^2$, то справедлива следующая

Теорема. При расчете одномерных нестационарных течений идеального газа без ударных волн при выборе нормирующих множителей из условий $(\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2) < {}^1/_4$, $k_* = {}^1/_2 \pm {}^1/_2\,(1 - 4c\,(\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2))^{1/2}$ координаты Лагранжа будут оптимальными, т. е. $w(x, t) = \varphi(x, t)$. Координатную сетку $x = x(t, q)$ находим как решение уравнения с начальным условием $dx/dt = w(x, t)$, $x\,|_{t=t_0} = \Psi^{-1}(q)$.

Якобиан преобразования $\Delta = \Delta(x, t)$ при этом удовлетворяет уравнению с начальным условием

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} - w\frac{\partial \Delta}{\partial x} = \Delta\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \Delta\,|_{t=t_0} = \frac{1}{\Psi'(x)} \tag{2.2}$$

Разрешая уравнение (2.2), находим

$$\Delta = \frac{\exp\left[f_2(t) - f_2(t_0)\right]}{\Psi'(x - [f_1(t) - f_1(t_0)])} \tag{2.3}$$

$$f_2(t) = \int \frac{\partial w(f_1(t), t)}{\partial f_1}\, dt$$

где $f_1(t)$ определяется как решение уравнения $df_1/dt = w(f_1, t)$.

Из (2.3) следует, что $\Delta(x, t) \neq 0$ в области решения.

Пример 2. При решении уравнений идеальной газовой динамики с наличием ударных волн обычно используют схемы сквозного счета, при этом аддитивно в давление вводится псевдовязкость

$$P_* = P + \gamma\, \partial u/\partial x$$

где γ — постоянный коэффициент. Тогда диссипация энергии в газе (без притока тепла) выразится формулой $\gamma\,(\partial u/\partial x)^2$.

Учитывая это, уравнение Эйлера минимума функционала (1.2) при условиях (1.4) в области $(x_0(t) \leqslant x \leqslant x_1(t),\ 0 \leqslant t < t_*)$ в координатах X запишем в виде

$$hw_{xx} + h_x w_x - w = k_* u_{xx} - u - h \tag{2.4}$$

$$h = \gamma\varepsilon u_x^2 + \alpha^2, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + 4\varepsilon_2, \quad \alpha^2 = c\varepsilon + k_*^2$$

с граничными условиями

$$w\,|_{x_0(t)} = u\,|_{x_0(t)} = u_0(t), \qquad w\,|_{x_1(t)} = u\,|_{x_1(t)} = u_1(t)$$

Пусть в фиксированный момент времени t заданное решение $u\,(x, t)$ на отрезке $x \in [x_0(t), x_1(t)]$ будет дважды непрерывно дифференцируемой функцией по переменной x.

Для исследования поведения функции $w\ (x, t)$ введем новую переменную

$$\xi(x) = \beta\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{h(x)}, \quad \beta = \left(\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{h(x)}\right)^{-1}$$

При этом ξ изменяется в пределах от 0 до 1. Пусть

$$w(x) = -y(\xi) + \int_{x_0}^{x}\frac{k_* u_x}{h(x)}\,dx + u_0$$

где $y\,(\xi)$ — новая неизвестная функция, удовлетворяющая уравнению с граничными условиями:

$$y_{\xi\xi} = \frac{h(\xi)}{\beta^2}\,y + \frac{h(\xi)}{\beta^3\sqrt{\gamma\varepsilon}}\int_0^{\xi}(h - k_*)\sqrt{h - \alpha^2}\,d\xi + \frac{h^2(\xi)}{c^2} \tag{2.5}$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = \frac{k_*}{c\sqrt{\gamma\varepsilon}}\int_0^1\sqrt{h - \alpha^2}\,d\xi - u_1 + u_0$$

Положим $k_* \leqslant \alpha^2$, т. е. $k_*^2 - k_* + c\varepsilon \geqslant 0$. Тогда $h - k_* \geqslant 0$ и интеграл в правой части уравнения (2.5) будет неотрицательной функцией. Оценивая правую часть уравнения (2.5) сверху и снизу, получим соответствующие оценки на функцию $w\,(x)$ вида $w_-\,(\xi) \leqslant w\,(\xi) \leqslant w_+\,(\xi)$, где

$$w_+(\xi) = u(\xi) + h_*\left[(\operatorname{ch}\sigma_* - 1)\frac{\operatorname{sh}\sigma_*\xi}{\operatorname{sh}\sigma_*} - (\operatorname{ch}\sigma_*\xi - 1)\right] +$$

$$+ \frac{1}{\beta\sqrt{\gamma\varepsilon}}\left(\left\{\xi - \frac{\operatorname{sh}\sigma_*\xi}{\operatorname{sh}\sigma_*}\int_0^1\Psi_*(\xi)\,d\xi + \left[\int_0^{\xi}\Psi_*(\xi)\,d\xi - \xi\int_0^1\Psi_*(\xi)\,d\xi\right\}\right]\right.$$

$$w_-(\xi) = u(\xi) + h_0\left[(\operatorname{ch}\sigma_0 - 1)\frac{\operatorname{sh}\sigma_0\xi}{\operatorname{sh}\sigma_0} - (\operatorname{ch}\sigma_0\xi - 1)\right] +$$

$$+ \frac{1}{\beta\sqrt{\gamma\varepsilon}}\left\{\left(\xi - \frac{\operatorname{sh}\sigma_0\xi}{\operatorname{sh}\sigma_0}\right)\int_0^1\Psi_0(\xi)\,d\xi + \left[\int_0^{\xi}\Psi_0(\xi)\,d\xi - \xi\int_0^1\Psi_0(\xi)\,d\xi\right]\right\}$$

$$h_* = \max h\,(\xi), \quad h_0 = \min h\,(\xi), \quad \sigma_* = h_*^{1/2}/\beta, \quad \sigma_0 = h_0^{1/2}/\beta$$

$$\Psi_*(\xi) = (h_* - k_*)(h_* - \alpha^2)^{1/2} - (h - k_*)(h - \alpha^2)^{1/2}$$

$$\Psi_0\,(\xi) = (h_0 - k_*)\,(h_0 - \alpha^2)^{1/2} - (h - k_*)\,(h - \alpha^2)^{1/2}$$

Доказанное выше позволяет сформулировать теорему.

Теорема. При расчете одномерных течений идеального газа с псевдовязкостью, введенной аддитивно в давление $P_* = P + \gamma\, \partial u/\partial x$, на известном течении $u(x)$ с введенными выше ограничениями, будет справедлива следующая оценка скорости сгущения криволинейных подвижных координат:

$$w_-(\xi(x)) \leqslant w(x) \leqslant w_+(\xi(x))$$

если нормирующие множители в функционале (1.2) удовлетворяют неравенству $k_*^2 - k_* + c\varepsilon \geqslant 0$.

Замечание. Для одномерных уравнений, описывающих поведение идеальной упругопластической среды, уравнение Эйлера (2.4) минимума функционала (1.2) сохранит свой вид, только

$$h = -\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x}\varepsilon + c\varepsilon + k_*^2$$

где σ_x — компонента тензора напряжений.

Соответствующим образом выбирая постоянные c, ε, k, можно сделать так, что $h(x) \geqslant 0$ при $x_0(t) \leqslant x \leqslant x_1(t)$, и следовательно, данная теорема будет справедлива и для упругопластических течений.

Пример 3. Рассмотрим построение функционала (1.2), основанное на минимизации погрешности решения основной краевой задачи. Для простоты изложения все исследования проведем на примере решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2.6}$$

имеющего автомодельное решение $u = x/t$ в области

$$D\ (x_1(t) \leqslant x \leqslant x_2(t),\quad 0 < t_0 \leqslant t < \infty)$$

Уравнение (2.6) в криволинейных координатах имеет вид

$$\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u - \frac{\partial x}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial q} = 0 \tag{2.7}$$

где $x = x(t, q)$ — искомая криволинейная подвижная сетка. Для решения уравнения (2.7) используем разностную схему типа Лакса, первое дифференциальное приближение которой будет представимо в форме

$$\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u - \frac{\partial x}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial q} = \left(\mu\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\frac{\partial x}{\partial q} -$$
$$-\left(\mu\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\frac{\partial u}{\partial q},\quad \mu = \frac{h^2}{2\tau}$$

Это позволяет записать функционал (1.2) в виде

$$\begin{gathered}\Phi = \int\limits_{\Omega} F^2\, d\Omega \\ F = \left(\mu\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\frac{\partial x}{\partial q} - \left(\mu\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\frac{\partial u}{\partial q}\end{gathered} \tag{2.8}$$

Здесь h и τ — соответственно разностные шаги по пространству и времени.

Таким образом, для нахождения $x = x(t, q)$ сформулируем следующую задачу: среди класса допустимых функций $x(t; q)$ в области Ω ($q(t) \leqslant q \leqslant q_2(t)$, $0 < t_0 \leqslant t < \infty$) найти ту, которая реализует минимум функционала (2.8) с дифференциальной связью (2.7) при краевых и начальных условиях

$$t = t_0,\quad x = q,\quad q = q_i(t),\quad \partial x/\partial t = u\quad (i = 1, 2)$$

где $q_i(t)$ находятся из решения уравнений с начальным условием

$$\frac{\partial x(t, q_i)}{\partial t} = u(t, x(t, q_i)), \quad x(t, q_i(t)) = x_i(t)$$

$$t = t_0, \quad x_i(t_0) = q_i(t_0)$$

Применяя стандартную процедуру вариации функционала (2.8) и исключая множитель Лагранжа, находим уравнение Эйлера

$$\frac{\partial u}{\partial q}\left\{\frac{\partial}{\partial q}\left[\left(2\mu\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} - \tau\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)F\right] - \tau\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(F\frac{\partial x}{\partial q}\right) + 2\mu\frac{\partial^2}{\partial q^2}\left(F\frac{\partial x}{\partial q}\right)\right\} - \frac{\partial x}{\partial q}\left\{\frac{\partial}{\partial q}\left[\left(2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} - \tau\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)F\right] - \tau\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(F\frac{\partial u}{\partial q}\right) + 2\mu\frac{\partial^2}{\partial q^2}\left(F\frac{\partial u}{\partial q}\right)\right\} = 0 \tag{2.9}$$

На известном решении $u = x/t$ имеем уравнение с краевыми и начальными условиями

$$\frac{\partial}{\partial q}\left[\left(t\frac{\partial x}{\partial t} - x\right)^2 \frac{\partial x}{\partial q}\right] = 0 \tag{2.10}$$

$$t = t_0, \quad x = q, \quad q = \frac{x_i(t)}{t} t_0, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{x}{t} \quad (i = 1, 2)$$

Решая задачу (2.10), получим

$$x(t, q) = qt/t_0 \tag{2.11}$$

Тогда $w(x, t) = x/t$, $\Delta(x, t) = t/t_0 \neq 0$.

Из полученного решения (2.11) видно, что криволинейные координаты совпадают с лагранжевыми координатами $x = x_0 t/t_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лисейкин В. Д., Яненко Н. Н.* Метод подвижных координат в газовой динамике.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Т. 7, № 2. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1976, с. 75.
2. *Janenko N. N., Kroshko E. A., Liseikin V. D., Fomin V. M., Shapeev V. P., Shitov Ju. A.* Methods for the Construction of Moving Grids for Problems of Flued Dynamics with big Deformations.— In: Lect. Notes in Physics, 1976, No. 59, p. 454.
3. *Яненко Н. Н., Данаев Н. Т., Лисейкин В. Д.* О вариационном методе построения сеток.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Т. 8, № 4. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1977, с. 157.
4. Физика взрыва. / Под ред. Станюковича К. П. М.: Наука, 1975. 704 с.
5. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
6. *Гнесин В. И., Гродзинский В. Л., Соколовский Г. А.* Уравнения газовой динамики в неинерциальной деформируемой системе координат.— ПММ, 1978, т. 42, 5, с. 841.

Москва

Поступила в редакцию
27.XI.1979