Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 4, 1981

УДК 531.38

КАЧЕСТВЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЛОСКИХ И БЛИЗКИХ К НИМ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Яхья Х. М.

Исследуются плоские движения твердого тела вокруг неподвижной точки в консервативном силовом поле. Движение описывается одним дифференциальным уравнением второго порядка. В первом приближении исследована устойчивость плоских движений.

Методом малого параметра Пуанкаре изучены периодические движения твердого тела, близкие к плоским.

В работе [1] уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки в консервативном силовом поле, допускающем интеграл площадей, сведены к дифференциальному уравнению

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \pm\frac{\Omega}{\sqrt{2U}} + \frac{1}{2U}(U_y - U_x y')(1+y'^2)^{-1/2} \tag{1}$$

$$x = \sqrt{\frac{C}{A}}\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1-n\sigma^2)\sqrt{(1-k^2\sigma^2)(1-\sigma^2)}},$$

$$y = \sqrt{\frac{A}{C}}\int_0^\rho \frac{d\rho}{(1+m\rho^2)\sqrt{(1-k'^2\rho^2)(1-\rho^2)}}$$

$$\Omega = \frac{f}{\sqrt{AC}}(1-k^2\sigma^2-k'^2\rho^2)\sqrt{(1-n\sigma^2)(1+m\rho^2)}\times$$
$$\times[A-B+C-2(A-B)\sigma^2+2(B-C)\rho^2]$$

$$U = B(1-k^2\sigma^2-k'^2\rho^2)\left[h+U_0-\frac{f^2}{2B}(1-n\sigma^2)(1+m\rho^2)\right]$$

$$k^2 = 1-k'^2 = \frac{A-B}{A-C},\quad n=\frac{A-B}{A},\quad m=\frac{B-C}{C}$$

Здесь A, B, C — главные моменты инерции тела, h — постоянная Якоби, f — постоянная площадей, σ и ρ — эллиптические координаты, связанные с направляющими косинусами оси симметрии поля относительно главных осей инерции тела соотношениями

$$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \frac{1}{\sqrt{(1-n\sigma^2)(1+m\rho^2)}}\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\sigma\sqrt{1-k'^2\rho^2},\right.$$
$$\left.\sqrt{(1-\sigma^2)(1-\rho^2)},\quad \sqrt{\frac{B}{C}}\rho\sqrt{1-k^2\sigma^2}\right)$$

а U_0 — силовая функция исходного поля сил. В этих новых переменных будем исследовать устойчивость одного из простых периодических движений тела, а именно его плоского движения.

Под плоским движением тела понимается движение с переменной угловой скоростью вокруг одной из его главных осей инерции, которая занимает неизменное горизонтальное положение. Тело обладает плоским движением $y(x) = 0$ (вокруг оси C) тогда, когда постоянная площадей $f = 0$, а измененная силовая функция удовлетворяет условию $(\partial U/\partial y)_{y=0} \equiv 0$. Характер движения будет зависеть от значения постоянной Якоби h.

Будем рассматривать орбитальную устойчивость траекторий изображающей точки в плоскости xy сначала при фиксированном значении h. Если $f = 0$, то уравнение траектории (1) приобретает форму

$$2Uy'' + (U_x y' - U_y)(1 + y'^2) = 0 \tag{2}$$

Будем исследовать в первом приближении устойчивость нулевого решения уравнения (2). Разложив функцию U в ряд по степеням y и сохранив в уравнении (2) только линейные члены относительно y, y', получим

$$2U^\circ y'' + U_x{}^\circ y' - U_{yy}{}^\circ y = 0$$

$$U^\circ = U(x, 0), \quad U^\circ{}_x = U_x(x, 0), \quad U_{yy}{}^\circ = U_{yy}(x, y)\big|_{y=0}$$

или, что то же

$$\sqrt{U^\circ}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{U^\circ}\frac{dy}{dx}\right) - \frac{1}{2}\overset{\circ}{U}_{yy} y = 0$$

Введя новую переменную u соотношением $du = dx/\sqrt{U^\circ}$, последнее уравнение приведем к виду

$$\frac{d^2y}{du^2} + p(u)\, y = 0, \qquad p(u) = -\frac{1}{2}\overset{\circ}{U}_{yy}(x(u)) \tag{3}$$

Можно убедиться, что при всех допустимых значениях постоянной Якоби, кроме бифуркационного, $p(u)$ — периодическая функция с периодом

$$T = \oint \frac{dx}{\sqrt{U^\circ}}$$

где интеграл взят на интервале, соответствующем одному обороту в ротационном движении (или полному колебанию в либрационном случае).

Твердое тело может совершать плоские движения $y(x) = 0$ в ньютоновском поле тяготения, когда его центр масс лежит в экваториальной плоскости центрального эллипсоида инерции. В этом случае имеем

$$U = (1 - k^2\sigma^2 - k'^2\rho^2)\Big[h - \frac{a\sqrt{\dfrac{B}{A}}\,\sigma\sqrt{1 - k'^2\rho^2} + b\sqrt{(1-\sigma^2)(1-\rho^2)}}{\sqrt{(1 - n\sigma^2)(1 + m\rho^2)}} - \frac{3g}{2BR(1 - n\sigma^2)(1 + m\rho^2)}\Big] \tag{4}$$

$$p = \frac{C}{A}\left\{k'^2\left(h + \frac{3gA}{2BCR} - k'^2 a\sqrt{\frac{B}{A}}\frac{\sigma}{\sqrt{1 - n\sigma^2}}\times\right.\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{A + 2C}{2C} - \frac{Ak^2}{2C}\sigma^2\right] - b\sqrt{\frac{1 - \sigma^2}{1 - n\sigma^2}}\left[k'^2 + \frac{B}{C} - \frac{Bk^2}{2C}\sigma^2\right]\right\}$$

причем a, b — произведения массы тела на координаты центра масс относительно главных плоскостей, g — ускорение силы притяжения на расстояния R от центра.

Об устойчивости нулевого решения уравнения (2) в первом приближении можно судить, применяя к уравнению Хилла (3) критерий ограниченности решений линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами [2].

Рассмотрим далее ряд простых случаев движения в однородном поле тяжести.

1°. $A = B,\ b = 0$.

а) *Вращательное движение* ($h > a$). Имеем

$$\sigma = -1 + 2\,\mathrm{sn}^2(u, \nu), \quad \nu^2 = \frac{2a}{h+a}$$

$$p = \frac{4C^2}{A^2}\left(1 + \frac{A\nu^2}{4C}\right) - \frac{2C(A+2C)}{A^2}\nu^2\,\mathrm{sn}^2 u$$

Введя обозначение $\alpha = 2C/A$, уравнение (3) приведем к форме уравнения Ламе

$$\frac{d^2y}{du^2} + \left[\alpha\left(\alpha + \frac{\nu^2}{2}\right) - \alpha(\alpha+1)\nu^2\,\mathrm{sn}^2 u\right] y = 0 \tag{5}$$

Попытаемся выяснить картину устойчивости и неустойчивости в плоскости параметров $\alpha\nu$. Когда h возрастает от a до ∞ при фиксированном значении C/A, ν уменьшается от 1 до 0, при условии $0 < C \leqslant B = A$, $0 < \alpha \leqslant 2$. Известно [2], что области устойчивости $\mathbf{O}_s$ и неустойчивости $\mathbf{H}_s$ разделяются линиями Π_s^+, Π_s^-, уравнения которых описывают распределение собственных значений краевой задачи с периодом $2K$, $4K$. Имеем [3], например

$$\alpha(2-\nu^2) + \frac{(\alpha^2-1)(\alpha+2)\nu^4/8}{(2-\nu^2)(1-\alpha^2/4)} - \frac{(\alpha^2-q)(\alpha-2)(\alpha+4)\nu^4/16^2}{(2-\nu^2)(1-\alpha^2/16)} - \\ - \frac{(\alpha^2-25)(\alpha+4)(\alpha+6)\nu^4/48}{(2-\nu^2)(1-\alpha^2/36)} - \ldots = 0 \tag{6}$$

для Π_{2s}^+ и

$$(\alpha-2)(\alpha+2)(2-\nu^2) + \frac{(\alpha-2)(\alpha^2-q)(\alpha+4)\nu^4/8^2}{(2-\nu^2)(1-\alpha^2/16)} - \\ - \frac{(\alpha-4)(\alpha^2-25)(\alpha+6)\nu^4/48^2}{(2-\nu^2)(1-\alpha^2/36)} - \ldots = 0 \tag{7}$$

для Π_{2s}^-. Кривые $\Pi_s^\pm$ проходят через точку $(s, 0)$. Из уравнения (7) видно, что $\alpha = 2$ принадлежит Π_2^-. Можно еще доказать [4], что кривые $\Pi_s^\pm$ имеют в точке $(s, 0)$ касание не ниже первого порядка с линией $\alpha = s$. Область устойчивости $\mathbf{O}_s$ $(s = 0, 1)$ содержит отрезок $s < \alpha \leqslant s+1$ на оси α. Эти свойства изображены на фигуре.

На картине устойчивости особое место занимают следующие случаи.

Случай Ковалевской ($\alpha = 1$). Плоское вращение такого тела устойчиво в предельном случае $\nu = 0$ ($h = \infty$), в то время как неустойчивость имеет место при конечных, но сколь угодно больших значениях h.

Случай $A = 4C$. Покажем, что для этого тела изображающая точка $(^1/_2, \nu)$ всегда принадлежит $\mathbf{O}_0$. Действительно, уравнение (5) принимает вид

$$\frac{d^2y}{du^2} + \left(\frac{1+\nu^2}{4} - \frac{3}{4}\nu^2 \operatorname{sn}^2 u\right) y = 0 \tag{8}$$

и имеет ограниченное (при $0 \leqslant \nu < 1$) общее решение

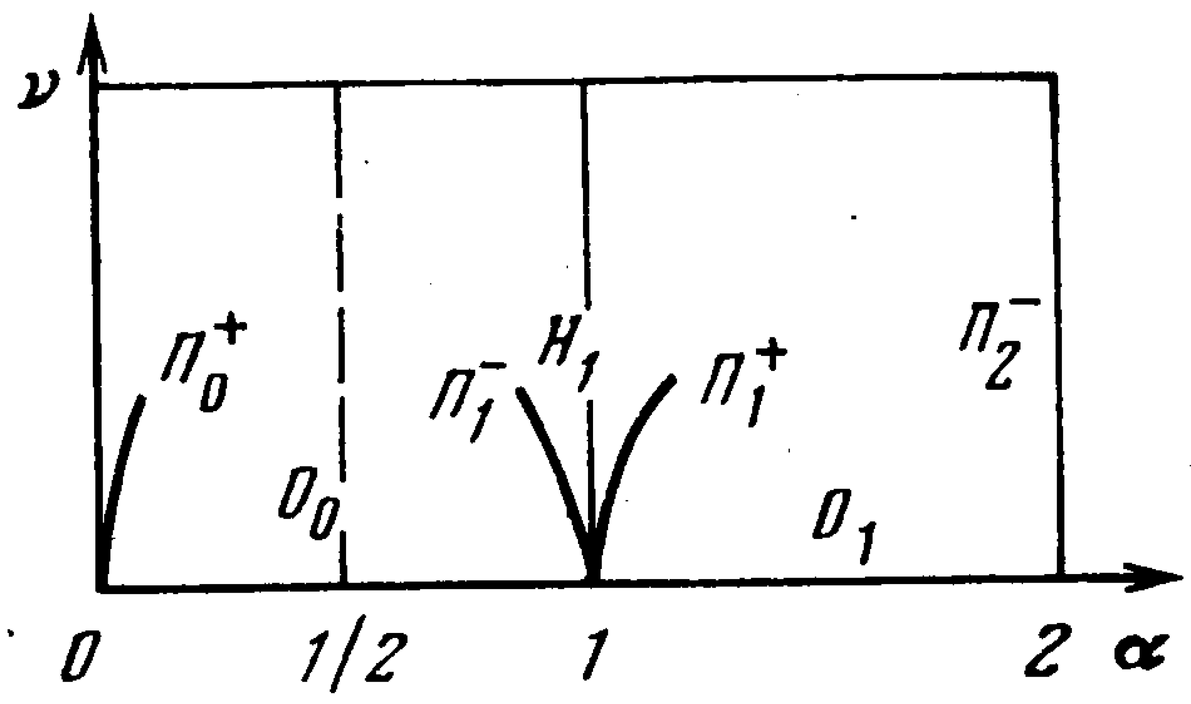
$$y = \left(C_1 \operatorname{cn}\frac{u}{2} \operatorname{dn}\frac{u}{2} + C_2 \operatorname{sn}\frac{u}{2}\right)\left[1 - \nu^2 \operatorname{sn}^2\frac{u}{2}\right]^{-1/2}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

б) *Либрационное движение* $h < a$. В этом случае

$$p(u) = \alpha\left(\frac{1}{2} + \alpha\nu^2\right) - \alpha(\alpha+1)\nu^2 \operatorname{sn}^2 u, \quad \nu^2 = \frac{h+a}{2a}, \quad \alpha = \frac{2C}{A}$$

При $0 < C \leqslant A$ для малых значений ν имеем одну зону устойчивости O_0, содержащую отрезок $0 < \alpha \leqslant 2$. Правая граница ее Π_1 касается линии $\alpha = 2$ в точке $\nu = 0$. В отличие от случая вращательного движения волчок Ковалевской не обладает резонансным характером при малых колебаниях около нижнего положения равновесия. Волчок Горячева—Чаплыгина сохраняет упомянутое свойство, так как в обоих случаях ротационного и либрационного движений имеем для первого приближения уравнение (8).



2°. $B = C$, $a = b = 0$. Чтобы исследовать устойчивость траектории $x = 0$, достаточно выполнить в уравнениях п. 1° замену параметров $a \to c$, $A \leftrightarrow C$.

Получим

а) для вращательного движения при достаточно больших h точка (α, ν) принадлежит s-й области устойчивости O_s для $s < \alpha < s+1$, $s = 2, 3$. При $A = {}^3/_2\, C$, $A = 2C$ движение устойчиво в предельном случае вращения по инерции вокруг оси A, но устойчивость теряется в случае сколь угодно малого расстояния центра масс от точки опоры;

б) для либрационного движения малые плоские колебания около нижнего положения равновесия орбитально устойчивы при отсутствии полной динамической симметрии.

3°. Рассмотрим теперь движение $y = 0$ динамически несимметричного тела $A > B > C$, $c = 0$. Применим критерий Жуковского [2]. Движение принадлежит s-й области устойчивости при выполнении условия (s — целое)

$$s^2\pi^2 < T^2 p(u) \leqslant (s+1)^2\pi^2$$

Для быстрого вращения имеем две области устойчивости

$$s < 2\left(1 - \sqrt{\frac{(A-C)(B-C)}{AB}}\right) + o\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{h}\right) < s+1, \quad s = 0, 1$$

Движение устойчиво для всех допустимых точек плоскости $(B/A, C/A)$, исключая точки в окрестности кривых $C = 0$, $B = C$, $4(A-C)(B-C) =$

$= AB$. Подобный результат получим для быстрого вращения вокруг оси A. Исключительными являются кривые $A = B + C$, $A = B$, $4(A - C)\cdot$ $\cdot(A - B) = BC$.

До сих пор речь шла об условной устойчивости, т. е. устойчивости траекторий при достаточно малых возмущениях начальных условий, сохраняющих значение h и нулевое значение постоянной площадей. В самом деле, первое требование несущественно. Траектория будет устойчивой и при таких возмущениях постоянной Якоби, при которых точка (α, ν) не выходит из первоначальной области устойчивости.

В областях неустойчивости H_s линейного уравнения (3) нулевое решение нелинейного уравнения (2) неустойчиво. Для установления устойчивости нулевого решения нелинейного уравнения в областях O_s необходимо рассмотреть влияние членов высшего порядка.

Займемся теперь доказательством существования счетного множества классов почти плоских периодических вращений тяжелого тела вокруг неподвижной точки. Предполагаем, что тело мало отличается от динамически симметричного, а его центр масс лежит достаточно близко к главной оси инерции. За порождающее решение примем решение $y = 0$ $(p = q =$ $= \gamma_3 = 0)$ при $A = B$, $b = c = 0$, $f = 0$. Введем малый параметр μ таким образом, чтобы $b, c, f, k = [(A - B)(A - C)]^{1/2}$ обращались одновременно в нуль при стремлении μ к нулю. Положим

$$b/b_1 = c/c_1 = f/f_1 = k = \mu$$

где b_1, c_1, f_1 — конечные постоянные.

Будем искать методом малого параметра Пуанкаре периодические решения уравнения (1), обращающиеся в тривиальное при $\mu = 0$, в виде ряда

$$y = \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s y_s \tag{9}$$

Подставляя (9) в уравнение (1), получаем систему уравнений для $\{y_s\}$

$$\sqrt{U_0}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{U_0}\frac{dy_s}{dx}\right) - \frac{1}{2}\overset{\circ}{U}_{yy} y_s = P_s \quad (s = 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

в которой $\{P_s\}$ — алгебраические функции от σ и многочлены относительно $y_{s-1}, \ldots, y_1, y_{s-1}', \ldots, y_1'$, а нулевому индексу соответствует значение функции при $\mu = 0$.

Как было показано выше [2], после надлежащей замены независимой переменной система (10), сведется к системе однотипных неоднородных уравнений Ламе

$$\frac{d^2 y_s}{du^2} + \left[\alpha\left(\alpha + \frac{\nu^2}{2}\right) - \alpha(\alpha + 1)\nu^2 \operatorname{sn}^2(u, \nu)\right] y_s = P_s \tag{11}$$

$$\alpha = 2C/A, \quad \nu^2 = 2a/(h + a)$$

Коэффициенты при y_s в уравнении (11) и функции P_s — периодические функции u с периодом $2K(\nu)$. Если для $s = 1$ можно подобрать постоянные интегрирования так, чтобы решение было единственным периодическим с периодом $2qK$ (q — целое число), то можно единственным образом построить и все остальные y_s ($s = 2, 3, \ldots$) с этим же периодом.

Такую процедуру можно всегда выполнить в случае, когда уравнение в вариациях не допускает ни одного периодического решения с периодом искомого решения [5] или, что то же самое, когда пара чисел (α, ν) не удовлетворяет уравнению собственных значений для функции Ламе с периодом $2qK$.

Последнее уравнение несколько более подробно исследовано для $q = 1, 2, 4$ [6, 7], а в общем случае определяет в области изменения параметров $0 < \alpha \leqslant 2$, $0 \leqslant \nu \leqslant 1$ кривую γ_q. Объединение кривых γ_q ($q = 1, 2, \ldots$) составляет в этой области множество меры нуль. Этим доказывается, что почти для всех значений C/A, ($h > a$) существует счетное множество классов периодических решений уравнения (1) с периодом вида $2q$ (q — целое), обращающихся в решение $y = 0$ при $\mu = 0$ и абсолютно сходящихся при достаточно малых μ. Эти классы, вообще говоря, различны. Траектория с периодом $2qK$ замыкается на эллипсоиде инерции после q ($q/2$) оборотов, когда q — нечетное (четное).

Примеры. 1°. *Периодические траектории с периодом* $2K$. Уравнения собственных значений приведены в п. 1. Если параметры α, ν не удовлетворяют ни одному из этих уравнений, то существует класс периодических решений указанного типа с периодом $2K$.

2°. *Случай* $A = B = 4C$. В этом случае для порождающего решения, как было показано выше, общее решение уравнения в вариациях будет периодическим с периодом $8K$. Существуют три класса периодических решений с периодом $2K$, $4K$, $6K$. Решения с большим периодом совпадают с этими решениями в силу периодичности уравнения (11) и общего решения уравнения в вариациях. Эти рассуждения недостаточны для того, чтобы судить о существовании решений с периодом $8K$ в данном случае.

Для порождающего решения $x = 0$ ($a = b = 0$, $f = 0$), которому соответствует вращение вокруг оси наибольшей инерции A, получаем систему, подобную (11) относительно x_s с параметром $\alpha = 2A/C$.

Найденным решениям соответствует периодическое изменение углов Эйлера θ, φ и, вообще говоря, почти-периодическое движение по отношению к углу прецессии.

Автор благодарит Демина В. Г. за помощь при выполнении этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Яхья Х. М.* О понижении порядка дифференциальных уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки.— Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1976, № 6.
2. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
3. *Ince E. L.* The periodic Lamé Functions.— Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1940, v. 60, No. 1.
4. *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
5. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.— Л.: Гостехиздат, 1952.
6. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 3. М.: Наука, 1967.
7. *Lambe C. G.* Polynomial expressions for the Lamé Functions.— Quart. J. Math. Ser. 2, 1951, No. 5.

Египет

Поступила в редакцию
8.V.1980