Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 4, 1981

УДК 531.35 + 521.1

О ФИГУРАХ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКИХ ТЕЛ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В ТОЧКАХ ЛИБРАЦИИ

Баркин Ю. В.

Рассматривается движение жидкого тела в поле ньютоновского притяжения двух тел, обращающихся относительно общего центра масс по кеплеровским круговым орбитам. При условии, что размеры жидкого тела малы по сравнению с расстояниями между телами, найдены частные решения задачи. Им соответствуют положения центра масс тела в точках либрации ограниченной круговой задачи трех тел, фиксированное положение главных центральных осей инерции в орбитальной системе координат и эллипсоидальные фигуры равновесия.

В [1] сделаны первые шаги к постановке общей задачи о движении системы взаимно гравитирующих деформируемых тел. Основная идея заключается в том, что поступательные движения небесных тел, вращательные движения их осей инерции и движение индивидуальных частиц этих тел взаимосвязаны и, вообще говоря, должны исследоваться совместно. Получены [1] первые интегралы задачи о системе деформируемых тел (интегралы количества движения и момента количества движения, обобщающие классические интегралы) и указаны случаи существования интеграла энергии.

1. Уравнения движения жидкого тела. Рассмотрим движение однородного жидкого тела M в поле ньютоновского притяжения двух тел M_1 и M_2, которые движутся относительно их общего центра масс G по кеплеровским круговым орбитам. Будем рассматривать тела M_1, M_2 как материальные точки и предположим, что масса тела M пренебрежимо мала по сравнению с массами m_1 и m_2 основных тел M_1 и M_2. Частицы жидкого тела взаимодействуют друг с другом по закону Ньютона.

Пусть $GXYZ$ — инерциальная система координат с началом в центре масс тел M_1, M_2 и осями GX, GY, расположенными в плоскости орбиты основных тел; $Gxyz$ — вращающаяся система координат, ось Gz которой совпадает с осью GZ, а ось Gx совпадает с линией M_1M_2 и направлена в сторону тела M_2; $OXYZ$ — система координат с началом в центре масс O жидкого тела и осями, параллельными соответствующим осям координат $GXYZ$; $O\xi\eta\xi$ — «собственная» система координат тела M, оси которой направлены по его мгновенным главным центральным осям инерции.

Движение тела опишем следующими координатами: x_0, y_0, z_0 — координаты его центра масс O в неподвижных осях, ψ, θ, φ — углы Эйлера, определяющие взаимную ориентацию осей координат $O\xi\eta\zeta$ и $OXYZ$, ξ, η, ζ, u, v, w — координаты и проекции относительной скорости отдельной частицы тела в системе координат $O\xi\eta\zeta$, p, q и r — проекции угловой скорости вращения собственной системы координат на оси $O\xi$, $O\eta$ и $O\zeta$.

Уравнения движения тела M получаются из принципа наименьшего действия в форме Гамильтона — Остроградского [2] и в переменных x_0, y_0, z_0, p, q, r, u, v, w, ξ, η, ζ имеют следующий вид:

$$x_0^{\cdot\cdot} = \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial x_0} \tag{1.1}$$

$$\frac{d}{dt}(Ap+P)+qR-rQ+(C-B)qr = \tag{1.2}$$
$$=\left(\frac{\partial U}{\partial \psi}-\cos\theta\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}+\cos\varphi\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial \xi}+v\frac{\partial u}{\partial \eta}+w\frac{\partial u}{\partial \zeta}+2(qw-rv)=\frac{\partial U'}{\partial \xi}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial D}{\partial \xi}+ \tag{1.3}$$
$$+\eta r^{\cdot}-\zeta q^{\cdot}-(x_0^{\cdot\cdot}a_{11}+y_0^{\cdot\cdot}a_{21}+z_0^{\cdot\cdot}a_{31})-(x_0^{\cdot}a_{13}+y_0^{\cdot}a_{23}+z_0^{\cdot}a_{33})q+$$
$$+(x_0^{\cdot}a_{12}+y_0^{\cdot}a_{22}+z_0^{\cdot}a_{32})r-p(\xi p+\eta q+\zeta r)+\xi\Omega^2$$

Здесь

$$m=\rho_0\int d\tau,\quad \rho_0=\mathrm{const},\quad \Omega=\sqrt{p^2+q^2+r^2}$$
$$A=\rho_0\int(\eta^2+\zeta^2)\,d\tau,\quad B=\rho_0\int(\xi^2+\zeta^2)\,d\tau$$
$$C=\rho_0\int(\eta^2+\xi^2)\,d\tau,\quad P=\rho_0\int(\eta w-\zeta v)\,d\tau$$
$$Q=\rho_0\int(\zeta u-\xi w)\,d\tau,\quad R=\rho_0\int(\xi v-\eta u)\,d\tau$$

Уравнения для y_0, z_0, q, r, v, w получаются из уравнений (1.1)—(1.3) циклической перестановкой соответствующих переменных. Система уравнений будет замкнута, если к ним добавить уравнение неразрывности $\partial u/\partial\xi+\partial v/\partial\eta+\partial w/\partial\zeta=0$ и кинематические уравнения Эйлера [3].

В уравнениях (1.1)—(1.3) Ω — величина угловой скорости вращения осей инерции тела, A, B и C — главные центральные моменты инерции, соответствующие осям тела $O\xi$, $O\eta$ и $O\zeta$, P, Q и R — проекции момента количества движения частиц жидкости в «собственной» системе координат на оси $O\xi$, $O\eta$ и $O\zeta$, a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ — направляющие косинусы осей $O\xi\eta\zeta$ в координатной системе $OXYZ$, известные функции углов Эйлера [3], m — масса жидкого тела, D — давление. Интегрирование распространено на весь объем τ, занимаемый телом M в данный момент времени.

Силовая функция U ньютоновского взаимодействия жидкого тела с основными телами M_1 и M_2 представляется следующим разложением:

$$U=f\sum_{i=1}^{2}\left\{\frac{m_i m}{r_i}+\frac{m_i}{2r_i^3}[B+C-2A+ \right. \tag{1.4}$$
$$\left. +3(B-A)\beta_i^2+3(C-A)\gamma_i^2]\right\}+W$$
$$r_i^2=(x_0-x_i)^2+(y_0-y_i)^2+z_0^2$$
$$\beta_i=a_{11}\frac{x_0-x_i}{r_i}+a_{21}\frac{y_0-y_i}{r_i}+a_{31}\frac{z_0}{r_i}$$
$$\gamma_i=a_{13}\frac{x_0-x_i}{r_i}+a_{23}\frac{y_0-y_i}{r_i}+a_{33}\frac{z_0}{r_i}$$

Здесь f — гравитационная постоянная, r_i — расстояние между центром масс тела M и телом M_i $(i = 1, 2)$, β_i и γ_i — косинусы углов, образованных прямой M_iO с осями инерции $O\eta$ и $O\zeta$, x_i, y_i $(z_i = 0)$ — координаты тела M_i в инерциальной системе координат. Функция W объединяет все высшие гармоники разложения U, начиная с третьих.

Функция U' характеризует ньютоновское взаимодействие произвольной частицы тела M, занимающей объем тела $d\tau$, с его остальными слагаемыми и материальными точками M_1 и M_2:

$$U' = \sum_{i=1}^{2} U_i' + U_0', \quad U_i' = \frac{fm_i}{R_i}$$

$$R_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z^2, \quad U_0' = f\rho_0 \int \frac{d\tau}{R_0}$$

Здесь R_i — расстояние от тела M_i до текущей точки жидкого тела с координатами x, y, z в инерциальной системе координат, R_0 — расстояние между двумя произвольными точками тела M с координатами x', y', z' и x, y, z в осях $GXYZ$ соответственно, т. е.

$$x = x_0 + a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta \ldots$$

$$x' = x_0 + a_{11}\xi' + a_{12}\eta' + a_{13}\zeta' \ldots$$

где ξ, η, ζ и ξ', η', ζ' — координаты указанных точек в «собственных» осях. Интегрирование в U_0' распространено на весь объем, занимаемый телом M.

Отметим некоторые особенности уравнений (1.1)—(1.3). Эти уравнения образуют систему интегродифференциальных уравнений. Движение индивидуальных частиц тела отнесено к его главным центральным осям инерции. Три основных типа движения жидкого тела — поступательное, вращательное и деформационное — взаимосвязаны [1]. Уравнения (1.1)—(1.3) допускают один первый интеграл, который представляет собой обобщение классического интеграла Якоби для ограниченной круговой задачи трех материальных точек или задачи двух точек и абсолютно твердого тела.

2. Фигуры равновесия жидкого тела, расположенного в прямолинейных точках либрации. Зададимся целью отыскать такие частные решения уравнений (1.1)—(1.3), согласно которым тело M движется как абсолютно твердое тело. Для таких движений частицы жидкого тела неподвижны относительно его главных центральных осей инерции, т. е. $u = v = w = 0$, $P = Q = R = 0$, а моменты инерции A, B, C сохраняют постоянные значения.

Сделаем упрощающее предположение. Пусть размеры тела малы по сравнению с расстояниями OM_1 и OM_2. Тогда можно ввести в рассмотрение малый параметр $\mu = \bar{R}/\bar{r}$, где $\bar{R}$ — наибольший размер жидкого тела, $\bar{r}$ — минимальное расстояние до притягивающих тел M_1, M_2.

Пренебрежем в правых частях уравнений движения членами порядка μ. Тогда уравнения поступательного движения отщепляются от уравнений (1.2), (1.3) и принимают вид соответствующих уравнений ограниченной круговой задачи трех тел (трех материальных точек). Уравнения (1.2) и (1.3) при этом остаются взаимосвязанными и интегрируются лишь после того, как найдено какое-либо решение уравнений (1.1) при $\mu = 0$. Отметим, что при $\mu = 0$ в правых частях уравнений (1.2) сохраняются члены, вычисленные для приближенного значения силовой функции U, определяемой формулой (1.4) при $W = 0$.

С учетом сделанных предположений уравнения (1.1) и (1.2) допускают стационарные решения

$$x_0 = \alpha_i \cos nt, \quad y_0 = \alpha_i \sin nt, \; z_0 = 0, \quad n^2 = f(m_1 + m_2)a_0^{-3/2}$$
$$p = 0, \quad q = n, \quad r = 0, \quad \theta = \pi/2, \quad \varphi = 0, \quad \psi = nt \tag{2.1}$$

Здесь a_0 — радиус орбиты основных тел, α_i — постоянная координата центра масс тела M на вращающейся оси Gx, соответствующей одной из трех точек либрации ($\alpha_1 = -a_0\rho_1$, $\alpha_2 = a_0\rho_2$, $\alpha_3 = a_0(1+\rho_3)$, где ρ_1, ρ_2, ρ_3 — постоянные величины, значения которых определяются в результате решения известных алгебраических уравнений в зависимости лишь от одного параметра $\nu = m_2/m_1$ [3]).

Решение (2.1) означает, что центр масс жидкого тела расположен в одной из прямолинейных точек либрации, а его главные центральные оси инерции занимают фиксированное положение во вращающихся осях $Gxyz$. При этом тело вращается с постоянной угловой скоростью n (равной среднему орбитальному движению основных тел) относительно оси $O\eta$, ортогональной плоскости орбиты.

Остается выяснить, допускаются какие-либо решения уравнения (1.3) для значения переменных (2.1) и при $\mu = 0$. Покажем, что при некоторых предположениях относительно формы жидкого тела подобные решения существуют.

Предположим, что тело M — однородный эллипсоид с полуосями a, b и c (для определенности полагаем $a > c > b$), соответствующими осям инерции $O\xi$, $O\eta$ и $O\zeta$, и выясним, какие ограничения должны быть наложены на параметры задачи, чтобы уравнения (1.3) допускали эллипсоидальные фигуры равновесия для решения (2.1).

Для этого выпишем значение силовой функции U_0' однородного эллипсоида для внутренней точки (ξ, η, ζ) [3]

$$U_0' = f(F_0 - F_1\xi^2 - F_2\eta^2 - F_3\zeta^2) \tag{2.2}$$

$$F_0 = \beta\int_0^\infty \frac{ds}{R(s)}, \quad F_\lambda = \beta\int_0^\infty \frac{ds}{(\lambda^2+s)R(s)}, \quad \lambda = a, b, c \tag{2.3}$$
$$\beta = \pi abc\rho_0, \quad R(s) = [(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)]^{1/2}$$

Силовые функции U_1' и U_2' при $\mu = 0$ определяются следующими формулами:

$$U_i' = \frac{1}{2r_i^3}[2r_i^2 - 2\xi r_i - r^2 + 3\zeta^2] \quad (i = 1, 2), \qquad r = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2}$$

где r_i — расстояние от тела M_i до соответствующей точки либрации, r — расстояние частицы жидкости с координатами ξ, η, ζ от центра масс тела M.

Далее можно показать, что в случае решения (2.1) и при $\mu = 0$ гидродинамические уравнения (1.3) допускают первый интеграл

$$D/\rho_0 = \Phi_1\xi^2 + \Phi_2\eta^2 + \Phi_3\zeta^2 + \Phi_4\xi + \text{const} \tag{2.4}$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}n^2 + f\left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3}\right) - fF_1 \tag{2.5}$$

$$\Phi_2 = -\frac{1}{2} f\left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3}\right) - fF_2$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} f\left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3}\right) - fF_3$$

$$\Phi_4 = n^2 \alpha_i - f\left(\frac{m_1}{r_1^2} + \frac{m_2}{r_2^2}\right)$$

Для существования эллипсоидальных фигур равновесия необходимо, чтобы изобара D = const, определяемая уравнениями (2.4) и (2.5), совпадала с внешней поверхностью жидкого эллипсоида. Для этого достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\Phi_1 a^2 = \Phi_2 b^2 = \Phi_3 c^2 \tag{2.6}$$

$$\Phi_4 = 0 \tag{2.7}$$

Условие (2.7) уже удовлетворяется в силу решения (2.1) для орбитального движения тела [3].

Условия (2.6) совместно с формулами (2.5) определяют новые последовательности эллипсоидальных фигур равновесия для каждой из прямолинейных точек либрации, причем найденные фигуры равновесия переходят в эллипсоиды Роша при $\nu = 0$ ($m_2 = 0$).

3. Фигуры равновесия жидкого тела в треугольных точках либрации. При $u = v = w = 0$, $\mu = 0$ уравнения (1.1), (1.2) допускают еще одно стационарное решение [4]

$$x_0 = \frac{a_0(1-\nu)}{2(1+\nu)} \cos nt - \frac{a_0\sqrt{3}}{2} \sin nt, \quad y_0 = \frac{a_0(1-\nu)}{2(1+\nu)} \sin nt + \frac{a_0\sqrt{3}}{2} \cos nt, \quad z_0 = 0 \tag{3.1}$$

$$p = 0, \quad q = n, \quad r = 0, \quad \theta = \pi/2, \quad \varphi = 0, \quad \psi = \psi_0 + nt$$

$$\cos 2\psi_0 = \frac{-(1+\nu)}{2\sqrt{1-\nu+\nu^2}}, \quad \sin 2\psi_0 = \frac{(1-\nu)\sqrt{3}}{2\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \tag{3.2}$$

(для системы Земля — Луна $\nu = 1 / 81{,}3$ и $\psi_0 = 60°18'24''$).

Решение (3.1) означает, что центр масс тела M расположен в треугольной точке либрации L_4 ограниченной круговой задачи трех тел, а оси инерции сохраняют неизменное положение во вращающейся системе координат $Gxyz$. Оси $O\xi$ и $O\zeta$ расположены в плоскости орбиты, а ось $O\xi$ повернута на постоянный угол ψ_0 от подвижной оси Gx (фигура).

Предположим теперь, что тело — однородный эллипсоид с полуосями $a > c > b$. Тогда силовая функция U_0' по-прежнему будет определяться формулами (2.2), (2.3), а для силовых функций U_1', U_2' с принятой точностью будем иметь следующие выражения:

$$U'_{1,2} = \frac{fm_{1,2}}{8a_0^3} \{\xi^2(-\cos^2\psi_0 + 5\sin^2\psi_0 \pm 3\sqrt{3}\sin 2\psi_0) + \zeta^2(-\sin^2\psi_0 + 5\cos^2\psi_0 \mp 3\sqrt{3}\sin 2\psi_0) - 6\xi\zeta(\sin 2\psi_0 \pm \sqrt{3}\cos 2\psi_0) - 4\eta^2\}$$

где ψ_0 — постоянный угол, определяемый формулой (3.2).

В результате первый интеграл гидродинамических уравнений принимает вид

$$D/\rho_0 = \Psi_1\xi^2 + \Psi_2\eta^2 + \Psi_3\zeta^2 + \Psi_4\xi + \Psi_5\zeta + \Psi_6\xi\eta + \mathrm{const}$$

$$\Psi_1 = \frac{3}{4}n^2 - \frac{3f}{8a_0^3}[(m_1 + m_2)\cos 2\psi_0 + \sqrt{3}(m_2 - m_1)\sin 2\psi_0] - fF_1$$

$$\Psi_2 = -\frac{1}{2}n^2 - fF_2$$

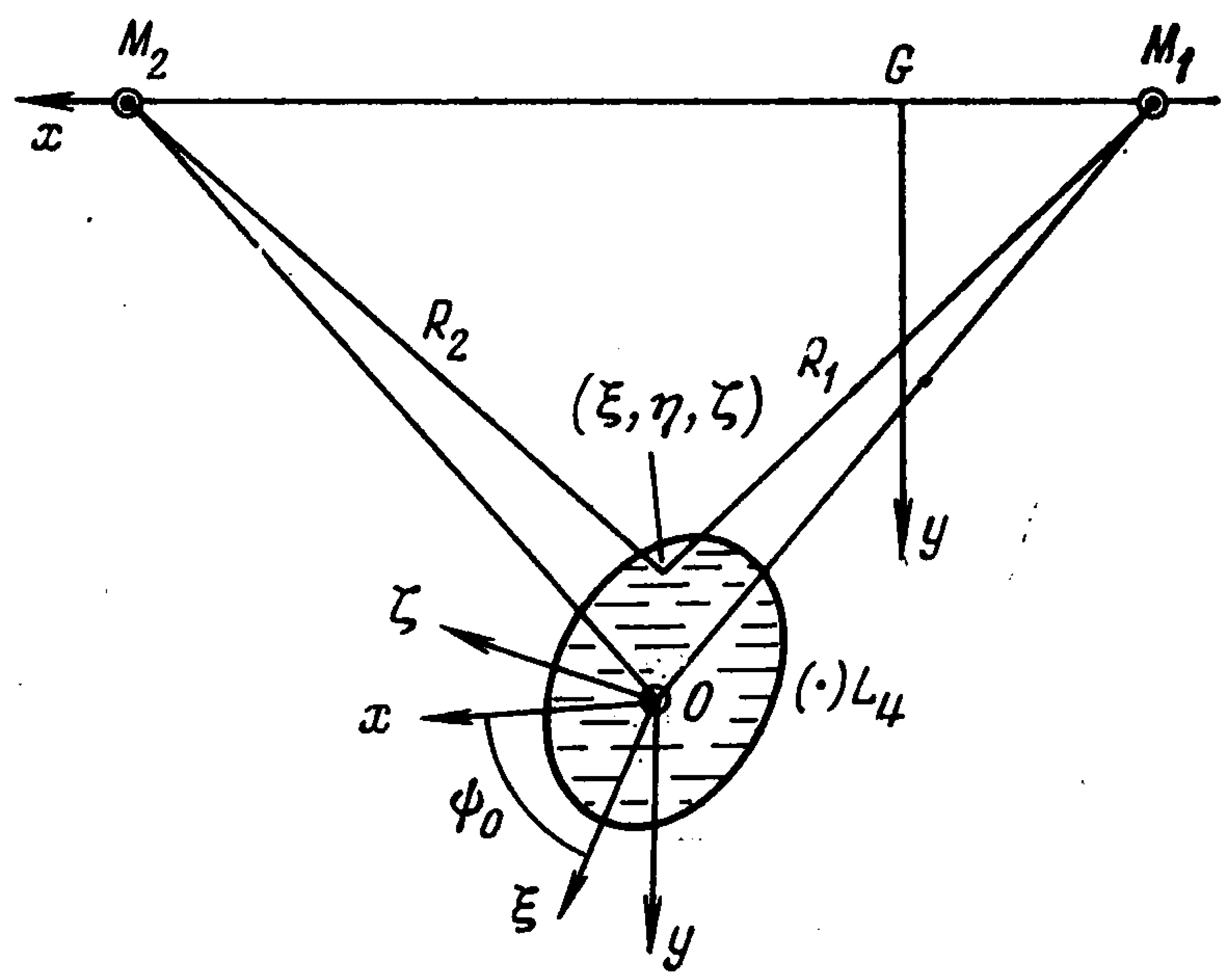
$$\Psi_3 = \frac{3}{4}n^2 + \frac{3f}{8a_0^3}[(m_1 + m_2)\cos 2\psi_0 + \sqrt{3}(-m_1 + m_2)\sin 2\psi_0] - fF_3$$

$$\Psi_4 = \left[\frac{n^2a_0(1-\nu)}{2(1+\nu)} - \frac{fm_1}{2a_0^2} + \frac{fm_2}{2a_0^2}\right]\cos\psi_0 - \left[\frac{n^2a_0\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}f}{2a_0^2}(m_1 + m_2)\right]\sin\psi_0$$

$$\Psi_5 = \left[\frac{n^2a_0(1-\nu)}{2(1+\nu)} - \frac{fm_1}{2a_0^2} + \frac{fm_2}{2a_0^2}\right]\sin\psi_0 + \left[\frac{n^2a_0\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}f}{2a_0^2}(m_1 + m_2)\right]\cos\psi_0$$

$$\Psi_6 = -\frac{3fm_1}{4a_0^3}(\sin 2\psi_0 + \sqrt{3}\cos 2\psi_0) - \frac{3fm_2}{4a_0^3}(\sin 2\psi_0 - \sqrt{3}\cos 2\psi_0)$$

Условия существования эллипсоидальных фигур равновесия тела, рас-



положенного в треугольной точке либрации, в соответствии с решением (3.1) представляются системой равенств

$$\Psi_1a^2 = \Psi_2b^2 = \Psi_3c^2, \quad \Psi_4 = \Psi_5 = \Psi_6 = 0$$

Можно убедиться, что $\Psi_6 = 0$ для найденного значения ψ_0 (3.2), а величины Ψ_4 и Ψ_5 обращаются в нуль в силу решения уравнений поступательно-вращательного движения (3.1). Остальные равенства преобразуются к виду

$$(^3/_4n^2[1 + \delta(\nu)] - fF_1)a^2 = (-^1/_2n^2 - fF_2)b^2 = \tag{3.3}$$

$$= (^3/_4n^2[1 - \delta(\nu)] - fF_3)c^2, \quad \delta(\nu) = \frac{\sqrt{1 - \nu + \nu^2}}{1 + \nu}$$

Равенства (3.3) совпадают при $\nu = 0$ с известными условиями существования эллипсоидов Роша [5] и определяют последовательность эллипсоидальных фигур равновесия для жидкого тела, расположенного в треугольной точке либрации L_4.

Замечания. 1°. Условие $\mu = 0$ означает, что в правых частях уравнений (1.1) пренебрегаем членами порядка $(\bar{R}/\bar{r})^2$ (для реальных небесных тел величина весьма малая).

2°. При $\mu = 0$ вращательное движение осей инерции тела M определяется вторыми гармониками силовых функций тел M, M_1 и M, M_2 (в этом случае функция U определяется формулой (1.4) при $W = 0$).

3°. При $\mu = 0$ и заданном круговом движении относительного равновесия жидкого тела постановка задачи о его эллипсоидальных фигурах равновесия совпадает с постановкой задачи Роша [5].

4°. Для отыскания строгих частных решений уравнений движения и изучения их устойчивости можно воспользоваться известными методами, например [2, 5] и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баркин Ю. В.*, *Демин В. Г.* Задача о движении системы взаимогравитирующих деформируемых небесных тел: Аннотации докл. Всес. конф. по механике сплошных сред. Ташкент: Фан, 1979, с. 36.
2. *Моисеев Н. Н.*, *Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
3. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975, 799 с.
4. *Баркин Ю. В.* О движении космического аппарата относительно центра масс, расположенного в точке либрации системы Земля — Луна.— Космические исследования, 1980, т. 18, № 2, с. 191.
5. *Лихтенштейн Л.* Фигуры равновесия вращающейся жидкости. М.: Наука, 1965. 252 с.

Москва

Поступила в редакцию 22.II.1980