Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 4, 1981

УДК 531.38

ОБЛАСТИ ВОЗМОЖНОСТИ ДВИЖЕНИЯ В НЕКОТОРЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Погосян Т.И., Харламов М.П.

Изучаются области возможности движения — проекции интегральных многообразий на конфигурационное пространство. Показано, что в системах с симметрией и в лиувиллевых системах перестройки таких областей возможны лишь одновременно с перестройкой интегральных многообразий. Приведен пример системы с гироскопическими силами, в которой области возможности движения меняют топологический тип вне бифуркационного множества.

1. Пусть $q_1, \ldots, q_n$ — обобщенные координаты, $q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}$ — обобщенные скорости механической системы, определяемой функцией Лагранжа

$$L(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{q}) q_i^{\cdot} q_j^{\cdot} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{q}) q_i^{\cdot} + c(\mathbf{q}) \tag{1.1}$$

Кривую $(q_1(t), \ldots, q_n(t))$, удовлетворяющую уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}} \left(\mathbf{q}(t), \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \left(\mathbf{q}(t), \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt}\right) = 0 \tag{1.2}$$

называем движением в рассматриваемой системе, а соответствующую кривую $(q_1(t), \ldots, q_n(t), dq_1(t)/dt, \ldots, dq_n(t)/dt)$ в фазовом пространстве $(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})$ — фазовой траекторией.

Пусть уравнения (1.2) обладают первыми интегралами

$$K_\alpha(q_1, \ldots, q_n, q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}) = k_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, m) \tag{1.3}$$

Подмножество, высекаемое в фазовом пространстве соотношениями (1.3), называется интегральным многообразием. Обозначим его $I_{k_1, \ldots, k_m}$. Интегральное многообразие целиком состоит из фазовых траекторий.

Изучение фазовых траекторий системы тесно связано с классификацией интегральных многообразий. Последняя, в свою очередь, базируется на изучении бифуркационного множества Σ — множества точек в пространстве констант интегралов (1.3), при переходе через которые меняется топологический тип интегральных многообразий [1]. Если множество Σ найдено и для каждой связной компоненты $\mathbf{R}^m \setminus \Sigma$ указан топологический или дифференцируемый тип соответствующего интегрального многообразия, то говорят, что исследована фазовая топология задачи.

Однако знание типов фазовых траекторий не всегда дает представление о реальном поведении рассматриваемой системы. В связи с этим бывает важно изучить, как устроены движения, т. е. проекции фазовых траекторий на конфигурационное пространство.

Очевидно, что при заданных $k_1, \ldots, k_m$ соответствующие движения проходят через те и только те точки $(q_1, \ldots, q_n)$, в которых равенства (1.3) разрешимы относительно $q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}$. Множество таких точек обозначим $M_{k_1, \ldots, k_m}$ и назовем областью возможности движения (ОВД). Ясно, что ОВД есть проекция интегрального многообразия $I_{k_1, \ldots, k_m}$ на конфигурационное пространство. Для заданной точки ОВД вектор $(q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot})$ — решение (1.3) назовем допустимой скоростью. Точки ОВД, в которых меняется топологический тип множества допустимых скоростей (критические значения упомянутой проекции), назовем обобщенной границей ОВД. Обобщенная граница содержит в себе топологическую границу. Поставим задачу классификации типов ОВД с учетом обобщенных границ.

2. Обрисуем кратко ситуацию, имеющую место в системах с симметрией (подробности см. в [2]).

Рассмотрим натуральную механическую систему с конфигурационным пространством M. Она задается римановой метрикой на M (скалярным произведением $\langle , \rangle_x$ в касательных пространствах к M, гладко зависящим от точки $x \in M$) и функцией V на M. Функция Лагранжа такой системы $L(v) = {}^1/_2 \langle v, v\rangle_x - V(x)$ (v — вектор, касательный к M в точке x) имеет в локальных координатах вид (1.1), причем все $b_i(\mathbf{q}) \equiv 0$.

Пусть на M свободно действует однопараметрическая группа диффеоморфизмов $\{g^\tau\}$, сохраняющая функцию V и скалярное произведение. Тогда в дополнение к интегралу энергии

$$H(v) \equiv {}^1/_2 \langle v, v\rangle_x + V(x) = h \tag{2.1}$$

система допускает линейный по скоростям интеграл

$$J(v) \equiv \langle u, v\rangle = s \tag{2.2}$$

(h и s — постоянные, $u(x) = (d/d\tau)_{\tau=0} g^\tau(x)$ — ненулевое векторное поле, порождающее действие группы).

При фиксированных $x \in M$, $s \in \mathbf{R}$ множество $J^{-1}(s)$ представляет собой гиперплоскость в пространстве касательных векторов в точке x к многообразию M. Определим векторное поле $u^s(x)$ так, что $u^s(x) \in J^{-1}(s)$ и $u^s(x) \perp J^{-1}(0)$ в заданной римановой метрике. Функция $V_s(x) = V(x) + {}^1/_2 \langle u^s, u^s\rangle_x$ называется приведенным потенциалом.

В этой задаче ОВД имеют вид $M_{h,s} = \{x \in M : V_s(x) \leqslant h\}$. Очевидно, что изменение типа $M_{h,s}$ возможно лишь в случае, когда h переходит через критическое значение V_s. Последнее означает, однако, что (h, s) пересекает бифуркационное множество интегралов (2.1), (2.2) [1]. Таким образом, перестройки ОВД возможны лишь на бифуркационном множестве.

3. Рассмотрим систему с двумя степенями свободы, принадлежащую к типу Лиувилля. В подходящих координатах (x, y) функция Лагранжа такой системы имеет вид

$$L = \frac{1}{2}[U(x) + V(y)][\alpha^2(x)x^{\cdot 2} + \beta^2(y)y^{\cdot 2}] - \frac{\varphi(x) + \psi(y)}{U(x) + V(y)}$$

Это снова функция вида (1.1) с $b_i(\mathbf{q}) \equiv 0$. Система допускает два квадратичных первых интеграла

$$H \equiv \frac{1}{2}(U + V)(\alpha^2 x^{\cdot 2} + \beta^2 y^{\cdot 2}) + \frac{\varphi(x) + \psi(x)}{U + V} = h \tag{3.1}$$

$$K \equiv \frac{1}{2}(U + V)(V\alpha^2 x^{\cdot 2} - U\beta^2 y^{\cdot 2}) + \frac{\varphi V - \psi U}{U + V} = k$$

Из соотношений (3.1) находим

$$^1/_2 (U + V)^2\alpha^2 x^{\cdot 2} = hU + k - \varphi, \quad ^1/_2 (U + V)^2\beta^2 y^{\cdot 2} = hV - k - \psi$$

так что соответствующая область возможности движения определяется неравенствами

$$M_{h,k} = \{(x, y) : hU(x) + k - \varphi(x) \geqslant 0, \ hV(y) - k - \psi(y) \geqslant 0\}$$

Очевидно, что перестройка $M_{h,k}$ возможна лишь в тех случаях, когда на границе $M_{h,k}$ имеется критическая точка одной из функций $hU + k - \varphi$ или $hV - k - \psi$. Покажем, что тогда (h, k) принадлежит бифуркационному множеству интегралов (3.1).

Пусть, например, точка (x, y) такова, что

$$hU(x) + k - \varphi(x) = 0, \quad hV(y) - k - \psi(y) = 0 \tag{3.2}$$

$$hV'(y) - \psi'(y) = 0$$

Положим $x^{\cdot} = y^{\cdot} = 0$. В силу (3.2)

$$H(x, y, 0, 0) = h, \quad K(x, y, 0, 0) = k \tag{3.3}$$

Кроме того, частные производные функций H и K в такой точке

$$H_{x^{\cdot}} = H_{y^{\cdot}} = 0, \quad K_{x^{\cdot}} = K_{y^{\cdot}} = 0, \quad H_y = K_y = 0$$

$$H_x = -\frac{1}{U + V}(hU' - \varphi'), \quad K_x = -\frac{V}{U + V}(hU' - \varphi')$$

В частности

$$\operatorname{grad} H - V(y) \operatorname{grad} K \,|_{(x, y, 0, 0)} = 0$$

Таким образом, в рассматриваемой точке интегралы (3.1) зависимы, а тогда в силу (3.3) $(h, k) \in \Sigma$. Следовательно, и здесь перестройки ОВД могут иметь место лишь на бифуркационном множестве.

Выше был рассмотрен элементарный случай. Системы Лиувилля произвольной размерности изучены в [3]. Конкретные примеры двумерных систем подробно исследованы в [3, 4].

4. Остановимся на задаче о движении несимметричного твердого тела, закрепленного в центре масс, в ньютоновском поле сил. Результаты продолжают исследования [5]. С этой же работой согласованы все обозначения.

Понижение порядка с помощью интеграла площадей (постоянная которого обозначается далее через s) приводит к механической системе на сфере Пуассона

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1 \tag{4.1}$$

(ν_i — компоненты в подвижном триэдре направляющего вектора оси «центр масс — притягивающий центр»). При $s \neq 0$ система не натуральна — лагранжиан (функция Рауса), имеющий в локальных координатах на сфере (4.1) вид (1.1), содержит существенным образом слагаемые, линейные по обобщенным скоростям.

Обозначая через $a > b > c$ величины, обратные главным центральным моментам инерции тела, введем на сфере (4.1) локальные координаты λ, μ

$$\nu_1^2 = \frac{(a-\lambda)(a-\mu)}{(a-b)(a-c)}, \quad \nu_2^2 = \frac{(\lambda-b)(b-\mu)}{(a-b)(b-c)}, \quad \nu_3^2 = \frac{(\lambda-c)(\mu-c)}{(a-c)(b-c)}$$

Первые интегралы приведенной системы примут вид [5]

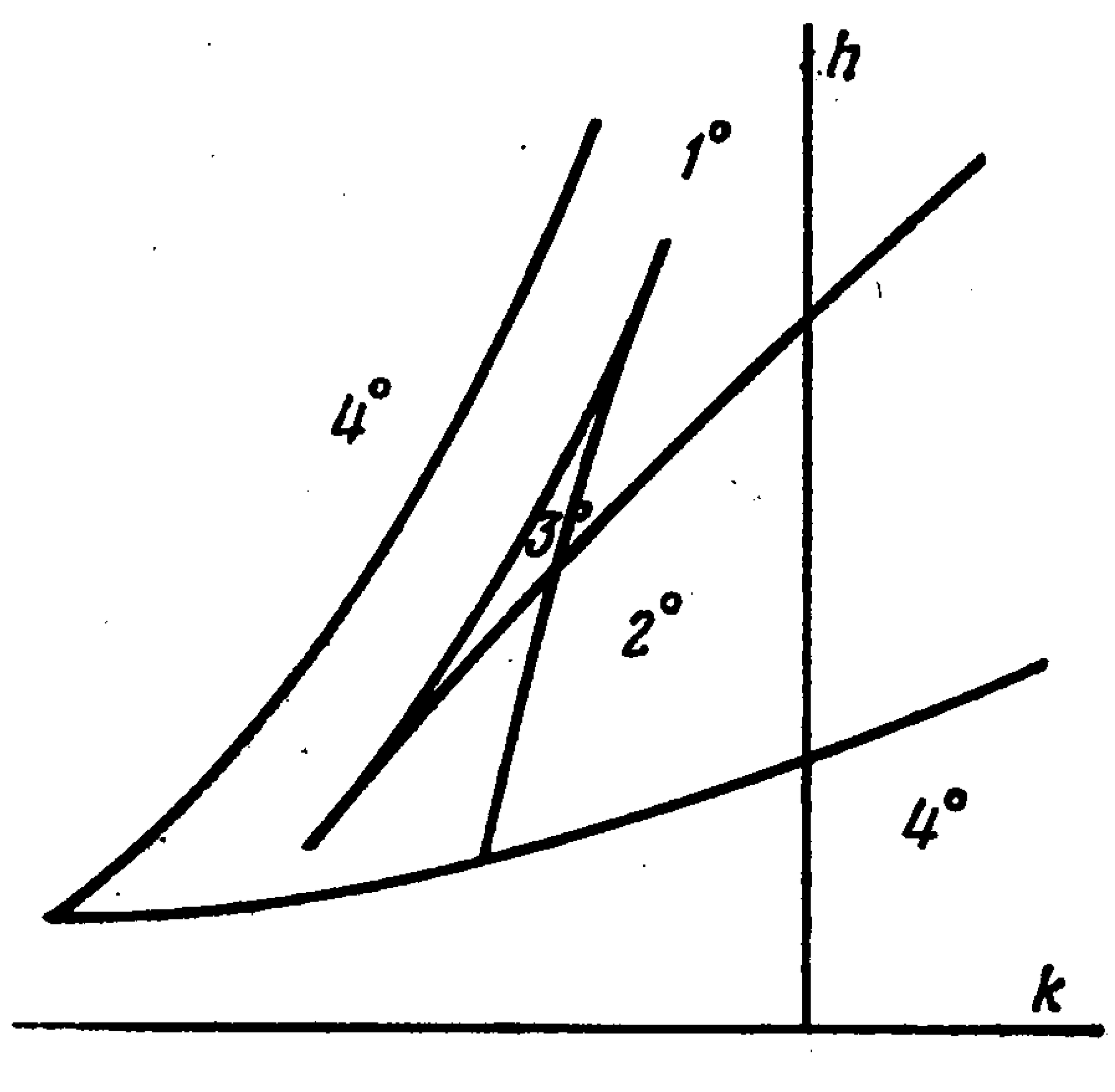
$$(4.2) \qquad H \equiv \frac{\lambda-\mu}{8\lambda\mu}\left(\frac{\lambda\lambda^{\cdot 2}}{f(\lambda)} - \frac{\mu\mu^{\cdot 2}}{f(\mu)}\right) + \frac{abcs^2}{2\lambda\mu} + \frac{\lambda\mu}{2} = h$$

$$K \equiv \frac{\lambda-\mu}{8\lambda^2\mu^2}\left(\frac{\lambda^2\lambda^{\cdot 2}}{f(\lambda)} - \frac{\mu^2\mu^{\cdot 2}}{f(\mu)}\right) - \frac{s}{2\lambda^2\mu^2}\left(\lambda^2\sqrt{-\frac{f(\mu)}{f(\lambda)}}\,\lambda^{\cdot} - \right.$$

$$\left. - \mu^2\sqrt{-\frac{f(\lambda)}{f(\mu)}}\,\mu^{\cdot}\right) + \frac{s^2}{2\lambda^2\mu^2}[(bc+ca+ab)\lambda\mu - abc(\lambda+\mu)] +$$

$$+ \frac{1}{2}[\lambda+\mu-(a+b+c)] = k, \quad f(\tau) = (a-\tau)(b-\tau)(c-\tau)$$

Их бифуркационное множество для малых значений s изображено на фиг. 1. Интегральные многообразия $I_{h,k}$ состоят в областях 1°, 2° из двух, а в области 3° — из четырех непересекающихся двумерных торов, несущих условно-периодические движения. В области 4° $I_{h,k} = \varnothing$ [5]. Исследуем в этой задаче области возможности движения — области на сфере (4.1), заметаемые неподвижным в пространстве единичным вектором.



Фиг. 1

Перепишем (4.2) в виде

$$(4.3) \qquad u^2 + v^2 = (2\lambda\mu h - \lambda^2\mu^2 - abcs^2)\,/\,(\lambda-\mu)$$

$$(4.4) \qquad \frac{1}{\lambda\mu^2}\left[u - \frac{s\sqrt{-\lambda f(\mu)}}{\lambda-\mu}\right]^2 + \frac{1}{\lambda^2\mu}\left[v + \frac{s\sqrt{\mu f(\lambda)}}{\lambda-\mu}\right]^2 = \frac{2k+a+b+c-s^2-\lambda-\mu}{\lambda-\mu}$$

$$u = \lambda^{\cdot}\sqrt{\lambda/f(\lambda)}\,/\,2, \quad v = \mu^{\cdot}\sqrt{-\mu/f(\mu)}\,/\,2$$

Таким образом, множество допустимых скоростей в точке (λ, μ) есть множество точек пересечения окружности (4.3) и эллипса (4.4).

Очевидно, точка (λ, μ) принадлежит обобщенной границе ОВД тогда и только тогда, когда соответствующие кривые (4.3), (4.4) имеют хотя бы одну точку касания. Записывая условие пропорциональности градиентов по u, v, находим, что в точке касания

$$(4.5) \qquad u = \frac{s\tau\sqrt{-\lambda f(\mu)}}{(\lambda-\mu)(\tau-\mu)}, \quad v = \frac{s\tau\sqrt{\mu f(\lambda)}}{(\lambda-\mu)(\lambda-\tau)}$$

(τ — коэффициент пропорциональности градиентов). Обозначим

$$x = (\lambda - \tau)(\tau - \mu), \quad y = (\lambda - \tau) - (\tau - \mu) \tag{4.6}$$

Подстановка (4.5) в (4.3), (4.4) приводит к уравнениям

$$x^2 + [2h - (2k + a + b + c)\tau + \tau^2]\,x + s^2 f(\tau) = 0 \tag{4.7}$$

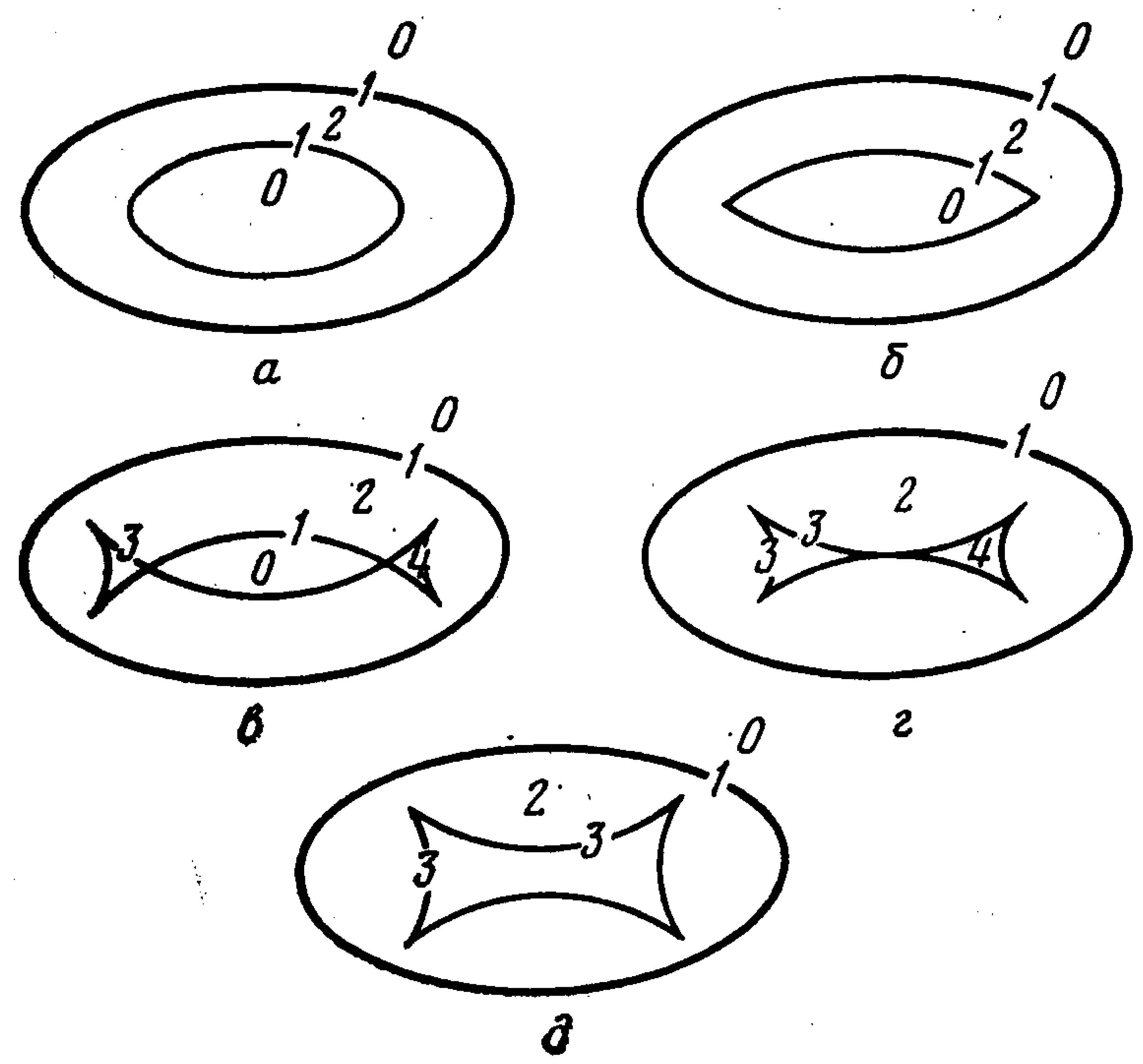
$$y = x\frac{(2k + a + b + c - 2\tau)\,x - s^2 f'(\tau)}{x^2 - s^2 f(\tau)}$$

из которых определяется зависимость $x(\tau)$, $y(\tau)$. Окончательно, уравнения обобщенной границы находим из (4.6)

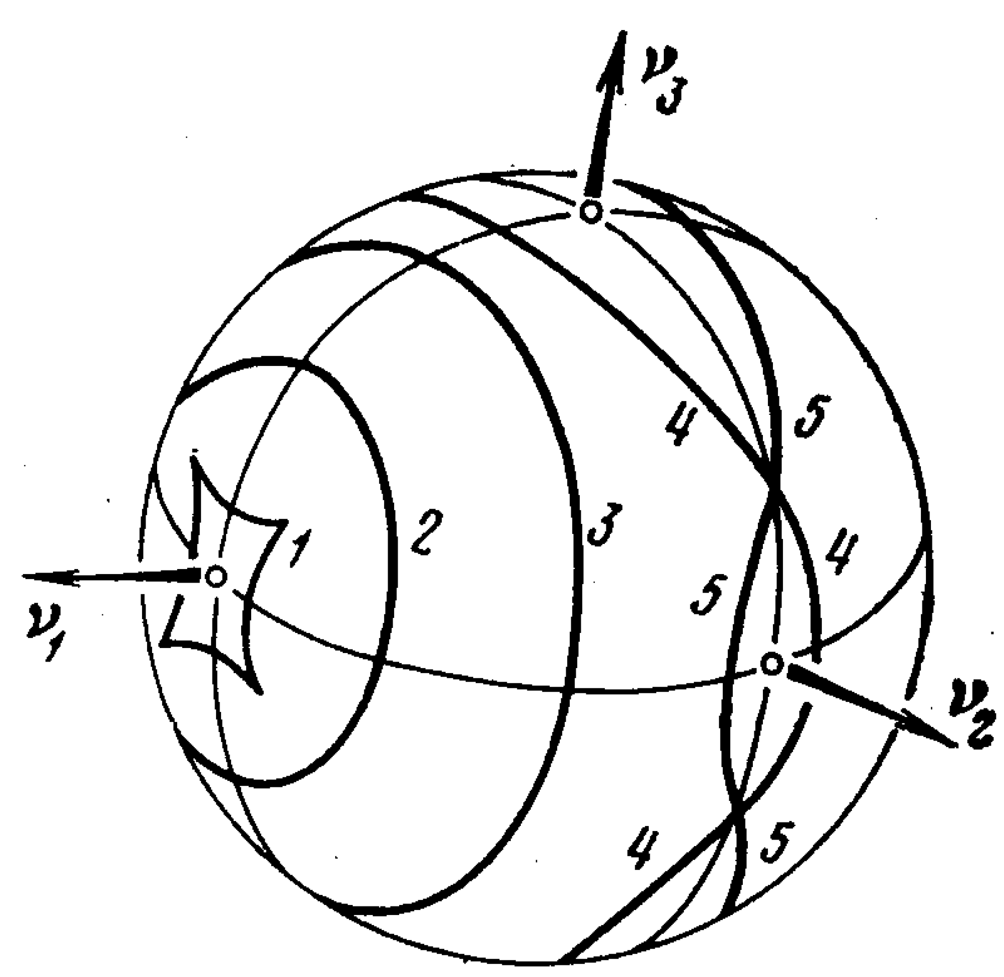
$$\begin{Bmatrix}\lambda \\ \mu\end{Bmatrix} = \tau + \frac{1}{2}\left[y(\tau) \pm \sqrt{y^2(\tau) + 4x(\tau)}\right] \tag{4.8}$$

Заметим, что в точках обобщенной границы ОВД система (4.3), (4.4) полностью аналитически разрешима и можно показать, что решение (4.5) единственно, если $x < 0$. При условии $x > 0$ эллипс и окружность имеют еще две точки пересечения. Не останавливаясь на достаточно громоздком анализе уравнений (4.7), (4.8) (в частности, на изучении особого случая $x = 0$, когда возможно появление посторонних решений), приведем результат исследования.

На фиг. 2 изображены пять основных типов ОВД, возникающих на сфере (4.1). Цифрами обозначено количество допустимых скоростей в соот-



Фиг. 2



Фиг. 3

ветствующих точках ОВД или ее обобщенной границы. В точках возврата и самопересечения обобщенной границы имеем две допустимые скорости. Легко понять, как получаются эти случаи при проекции интегрального тора на сферу (4.1), и проследить, как устроены образы условно-периодических траекторий на торе.

В областях 1°, 2° (см. фиг. 1) ОВД состоит из двух, а в области 3° — из четырех компонент указанного вида. При этом возможны их частичные или полные взаимные перекрытия. Исчерпывающее описание всех ситуаций в рамках настоящей статьи невозможно. Приведем лишь пример одной из наиболее сложных ситуаций, относящийся к области 3° (фиг. 3). Кривые *1* и *4* ограничивают область типа *2*, *д*, кривые *2* и *3* — область типа *2*, *а*. Область возможности движения симметрична относительно сечения сферы плоскостью $\nu_1 = 0$ (кривая *5*, следовательно, аналогична кривой *4*).

Подчеркнем, что все ситуации, изображенные на фиг. 2, реализуются при заданной постоянной площадей в каждой из областей 1°—3°, на которые бифуркационное множество разбивает плоскость констант интегралов. Таким образом, в рассматриваемой задаче ОВД терпят перестройки и там, где соответствующие интегральные многообразия не меняют своего дифференцируемого типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смейл С.* Топология и механика.— Успехи матем. наук, 1972, т. 27, вып. 2 (164), с. 77.
2. *Татаринов Я. В.* К исследованию фазовой топологии компактных конфигураций с симметрией.— Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1973, № 5, с. 70.
3. *Алексеев В. М.* Обобщенная пространственная задача двух неподвижных центров. Классификация движений.— Бюл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 1965, т. 10, № 4, с. 241.
4. *Харламов М. П.* Фазовая топология одного интегрируемого случая движения твердого тела.— В кн.: Механика твердого тела. Вып. 11. Киев: Наукова думка, 1979, с. 50.
5. *Погосян Т. И., Харламов М. П.* Бифуркационное множество и интегральные многообразия задачи о движении твердого тела в линейном поле сил.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 3, с. 419.

Донецк

Поступила в редакцию
24.IV.1980