Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 4, 1981

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ И В СЛУЧАЯХ, БЛИЗКИХ К КРИТИЧЕСКИМ

Хазин Л. Г., Шноль Э. Э.

Рассматриваются автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Изучается устойчивость положения равновесия вблизи вырожденных (критических) случаев. Даны оценки величины малой притягивающей области при устойчивости в критическом случае и величины «опасных» возмущений при неустойчивости. Сформулированы эталонные теоремы и приведены примеры доказательства соответствующих теорем. Дан перечень всех критических случаев степени вырождения не выше трех и отвечающих им критериев устойчивости.

1. Критические случаи и степень их вырождения. Рассмотрим вещественную систему с гладкими правыми частями

$$du / dt = f(u), \quad f(u^{(0)}) = 0 \tag{1.1}$$
$$u = (u_1, \ldots, u_n), \quad f = (f_1, \ldots, f_n)$$

Пусть $(df/du)_{u=u^{(0)}} = \Gamma$ — матрица линеаризации, λ_k — ее собственные значения.

В проблеме устойчивости положения равновесия различают общий случай, когда вопрос решается в линейном приближении, и критические случаи, в которых ответ зависит и от нелинейных членов.

Будем характеризовать критический случай набором ν условий типа равенства, накладываемых на правые части системы (1.1). Условия могут накладываться не только на Γ, но и на старшие производные f (учитываются лишь условия, влияющие на устойчивость). Число ν называется степенью вырождения, или коразмерностью рассматриваемой задачи. С ростом ν трудности исследования, вообще говоря, возрастают и задача даже может стать неразрешимой (в смысле, указанном в работах [1—3]).

В общей задаче об устойчивости естественно, видимо, иметь полное исследование всех критических случаев до некоторой степени вырождения $\nu = \nu_{\max}$. Среди же случаев с $\nu > \nu_{\max}$ целесообразно рассматривать те, к которым приводят прикладные задачи, или особо интересные математически. Если стать на такую точку зрения, то придется ограничиться $\nu_{\max} = 3$, так как даже полный перечень критических случаев с $\nu = 4$ сейчас не может быть составлен.

Ниже выражение «система устойчива» означает асимптотическую устойчивость положения равновесия $u^{(0)}$, «неустойчивость» означает отсутствие устойчивости по Ляпунову, n_0 — число равных нулю λ_k, n_2 — число пар чисто мнимых собственных значений Γ, для остальных λ_j $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$.

Пример. Пусть в системе (1.1) $n_0 = 2$, $n_2 = 0$ и дополнительного вырождения нет ($\nu = 2$). Тогда жорданова нормальная форма Г содержит клетку. Критерий устойчивости: при $a \neq 0$ имеет место неустойчивость. Здесь a — некоторая комбинация квадратичных коэффициентов. При $a = 0$ ($\nu = 3$) возможна как устойчивость, так и неустойчивость. Критерий устойчивости состоит из неравенств на тейлоровские коэффициенты f до четвертой степени включительно. Приравняв нулю левую часть одного из этих неравенств, получим задачу с $\nu = 4$, не разобранную до сих пор.

2. Формулировки эталонных теорем. Приведем систему (1.1) к нормальной форме до некоторого порядка m (см. [4, 5]) и отбросим члены высшего порядка. Получим

$$v^{\cdot} = h(v), \quad w^{\cdot} = g(v, w)$$

Здесь переменные v отвечают критическим λ_j ($\operatorname{Re} \lambda_j = 0$), w — остальным. Отщепившуюся полиномиальную систему (M) $v^{\cdot} = h(v)$ называют модельной; ее вещественная размерность равна $n_0 + 2n_2$.

Исследование критического случая состоит в доказательстве следующих теорем.

Теорема M (критерий устойчивости модельной системы). Для асимптотической устойчивости положения равновесия системы (M) достаточно выполнения условий M_+ вида $\Phi_1(a) < 0, \ldots, \Phi_N(a) < 0$. Здесь a — коэффициенты системы (M). Если для всех j $\Phi_j(a) \neq 0$ и хотя бы для одного j $\Phi_j(a) > 0$, то положение равновесия $v = 0$ неустойчиво. В этом случае будем говорить о «строгой неустойчивости».

Теорема S. Если выполнены условия M_+, то система (1.1) устойчива.

Теорема NS. Если система (M) строго неустойчива, то система (1.1) неустойчива.

Правильность выбора модельной системы (числа m) устанавливается лишь теоремами S и NS. Иногда некоторые члены степени, не большей m, не влияют на устойчивость и в модельную систему не включаются.

Рассмотрим теперь системы, мало отличающиеся от (1.1) в смысле C_1:

$$du/dt = f^{(\varepsilon)}(u), \quad \| f^{(\varepsilon)} - f \|_1 < \varepsilon \tag{2.1}$$

$$\| g \|_1 = \sum_k \max | g_k | + \sum_{k,j} \max \left| \frac{\partial g_k}{\partial x_j} \right|$$

Теорема S_ε. Пусть для системы (1.1) выполнены условия M_+. Тогда для всех систем (2.1) с $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$: 1) существует окрестность G_1 точки $u^{(0)}$, такая, что всякая траектория, начинающаяся в G_1, остается в G_1 при $0 \leqslant t < \infty$; 2) все траектории, начинающиеся в G_1, при $t \to \infty$ входят в малую окрестность $G_{2\varepsilon}$ точки $u^{(0)}$. Диаметр $d(G_{2\varepsilon}) \leqslant C\varepsilon^{\varkappa_+}$.

Теорема NS_ε. Пусть для системы (1.1) модельная система строго неустойчива. Тогда при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ для каждой из систем (2.1) существует решение $u_\varepsilon(t)$, для которого $| u_\varepsilon(0) | = \delta(\varepsilon)$, $\sup_{t>0} | u_\varepsilon(t) | > a$. Здесь $\delta(\varepsilon) \leqslant C\varepsilon^{\varkappa_-}$, a не зависит от ε.

Показатели $\varkappa_+$, $\varkappa_-$ для всех случаев с $\nu \leqslant 3$ указаны в п. 5.

Замечания. 1°. В ряде критических случаев (обычно при $n_0 \neq 0$) нормой является неустойчивость. Теорема M тогда имеет вид: «если $\Phi(a) \neq 0$, то имеет место неустойчивость» (см. пример п. 1). Теоремы S и S_ε в этих случаях отсутствуют.

2°. В теоремах S_ε главной является правильная оценка диаметра притягивающей области $d\ (G_{2\varepsilon})$. Доказательства используют функции Ляпунова, построенные в соответствующих теоремах S. В теоремах NS_ε наиболее существенна правильная оценка (ε). Доказательство того, что для системы (2.1) $\delta\ (\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, если система (1.1) неустойчива, элементарно (см. работу [6]).

3°. Возмущение $f^{(\varepsilon)} - f$ может зависеть от t или быть случайной функцией. Если мала лишь величина

$$\| f^{(\varepsilon)} - f \|_0 = \sum_k \max | f_k^{(\varepsilon)} - f_k |$$

то теоремы S_ε и NS_ε остаются в силе, но показатели $\varkappa_+$ и $\varkappa_-$ могут уменьшиться (см. п. 6).

4°. Если матрица Г диагонализируема и система (M) содержит кроме линейных лишь члены степени m, то явное использование условий M_+ не требуется. Теоремы S и S_ε начинаются тогда так: «если система (M) асимптотически устойчива, то...» (см. п. 6).

5°. Для систем, зависящих от параметров, теоремы S_ε и NS_ε связаны с понятиями мягкой и жесткой потери устойчивости [7], опасных и безопасных границ области устойчивости в пространстве параметров (см. работы [6, 8]) [1].

3. **Перечень критических случаев** с $\nu \leqslant 3$. Чтобы перечислить все критические случаи с $\nu = 3$, необходимо во всех случаях с $\nu = 2$ выписать критерии устойчивости и заменять поочередно одно из полученных неравенств на равенство. Поэтому здесь приводятся модельные системы и критерии устойчивости для $\nu = 1, 2$ (критерии для $\nu = 3$ см. в п. 4).

Ниже x_k — действительные переменные, $z_k = \sqrt{\rho_k}\, e^{i\varphi_k}$ — комплексные переменные, значок «*» означает комплексное сопряжение, a, b, α, β, γ — действительные числа, A, B — комплексные числа. Ссылки указывают работы, где, по-видимому, впервые получены приведенные критерии.

Приведем теперь перечень критических случаев с $\nu \leqslant 3$.

Случаи 1—3: $n_0 = 1$, $n_2 = 0$ [9].

1) $(M)\ x^{\boldsymbol{\cdot}} = ax^2$. Неустойчивость при $a \neq 0$ $(\nu = 1)$.

2) Дополнительное вырождение: $a = 0$, $\nu = 2$. $(M) : x^{\boldsymbol{\cdot}} = bx^3$. Устойчивость при $b < 0$, неустойчивость при $b > 0$.

3) Двукратное дополнительное вырождение: $a = b = 0$, $\nu = 3$.

Случаи 4—6: $n_0 = 0$, $n_2 = 1$ [9].

4) $\nu = 1$; $(M) : z^{\boldsymbol{\cdot}} = i\omega z + A_1 z\rho$. Устойчивость при $a_1 < 0$, неустойчивость при $a_1 > 0$, $a_1 = \operatorname{Re} A_1$.

5) Дополнительное вырождение: $a_1 = 0$, $\nu = 2$; $(M)\, z^{\boldsymbol{\cdot}} = i\omega z + z\,(A_1\rho + A_2\rho^2)$. При $a_2 < 0$ имеет место устойчивость, при $a_2 > 0$ — неустойчивость, $a_2 = \operatorname{Re} A_2$.

6) Двукратное дополнительное вырождение: $a_1 = a_2 = 0$.

Случаи 7—8: $n_0 = 2$, $n_2 = 0$ [10].

---

[1] *Шноль Э. Э., Хазин Л. Г.* Об устойчивости стационарных решений общих систем дифференциальных уравнений вблизи критических случаев. М.: Препринт, Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1979, № 91; *Хазин Л. Г., Шноль Э. Э.* О мягкой и жесткой потере устойчивости стационарных решений дифференциальных уравнений. М.: Препринт, Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1979, № 128.

7) $\nu = 2$; $(M) : x_1^{\cdot} = x_2,\ x_2^{\cdot} = ax_1^2$. Неустойчивость при $a \neq 0$.

8) Дополнительное вырождение: $a = 0,\ \nu = 3$.

Замечание 7°. Случай, когда кратному $\lambda = 0$ отвечают два собственных вектора Г, соответствует $\nu = 4$, и поэтому в этом списке отсутствует.

Случаи 9—10: $n_0 = n_1 = 1$.

9) $\nu = 2$; $(M) : z^{\cdot} = i\omega z,\quad x^{\cdot} = ax^2$. Неустойчивость при $a \neq 0$ [9].

10) Дополнительное вырождение: $a = 0,\ \nu = 3$[2].

11) $n_0 = 3,\ n_2 = 0,\ \nu = 3$ [11].

При двух парах чисто мнимых λ $(n_0 = 0,\ n_2 = 2)$ есть один случай «общего положения» $(\nu = 2)$ и пять с дополнительным вырождением $(\nu = 3)$. В трех из них дополнительное условие (резонансное соотношение) накладывается на линейные члены, а в двух — на нелинейные (квадратичные и кубичные). Пусть

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1,\quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega_2,\quad \omega_2 > \omega_1 > 0$$
$$\omega_2 \neq 2\omega_1,\quad \omega_2 \neq 3\omega_1$$

12) $\nu = 2; (M): z_k^{\cdot} = i\omega_k z_k + z_k(A_{k1}\rho_1 + A_{k2}\rho_2), k = 1, 2$ [11].

$M_+ : a_{11} < 0,\quad a_{22} < 0$; при $a_{12} > 0$ и $a_{21} > 0\ \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$; $a_{jk} = \operatorname{Re} A_{jk}$.

13) Дополнительное вырождение: $a_{11} = 0,\ \nu = 3$ [6].

14) Дополнительное вырождение: при $a_{12} > 0$ и $a_{21} > 0$ $\Delta = 0,\ \nu = 3$.

Две пары чисто мнимых λ и внутренний резонанс: случаи 15) — 17).

15) Резонанс 1 : 1 $(\omega_2 = \omega_1)$; $\nu = 3$[3].

16) Резонанс 1 : 2 $(\omega_2 = 2\omega_1)$; $\nu = 3$ [12, 13].

17) Резонанс 1 : 3 $(\omega_2 = 3\omega_1)$; $\nu = 3$ [3].

Остальные случаи

18) $n_0 = 1,\ n_2 = 2,\ \nu = 3$.

19) $n_0 = 2,\ n_2 = 1,\ \nu = 3$.

20) $n_0 = 0,\ n_2 = 3,\ \nu = 3$ [14].

4. Критерии устойчивости для случаев коразмерности 3.

3) $(M) : x^{\cdot} = cx^4$ неустойчивость при $c \neq 0$.

6) $(M) : z^{\cdot} = i\omega z + z(A_1\rho + A_2\rho^2 + A_3\rho^3)$, $\operatorname{Re} A_1 = \operatorname{Re} A_2 = 0$. Устойчивость при $\operatorname{Re} A_3 < 0$ и неустойчивость при $\operatorname{Re} A_3 > 0$.

8) $(M) : x^{\cdot} = y + d_0x^2 + dxy + d_1x^3;\qquad y^{\cdot} = ax^3 + bxy + a_1x^4 + b_1x^2y + cy^2$. Условия M_+ представляют собой три неравенства: $P < 0$, $Q^2 < 8P^2$, $g < 0$. Здесь $P = a - d_0b$; $Q = b + 2d_0$, $g = (c + 3a_1/a - 2d)\,Q + 5Q_1$; $Q_1 = b_1 - 2d_0c - d_0d + 3d_1$. Невыписанные члены третьей и четвертой степеней несущественны для устойчивости[4].

10) $(M) : x^{\cdot} = b\,|\,z\,|^2 + b_2x^3$; $z^{\cdot} = i\omega z + Azx$.

---

[2] *Хазин Л. Г.* Об устойчивости положения равновесия в некоторых критических случаях. М.: Препринт, Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1979, № 10.

[3] *Хазин Л. Г.* О резонансной неустойчивости положения равновесия при кратных частотах. М.: Препринт, Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1975, № 97.

[4] Обсуждение этого критерия и его простой вывод см. в работе: *Хазин Л. Г.* М.: Препринт, Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1980, № 9.

Условия M_+ имеют вид: $ab < 0$, $b_2 < 0$; $a = \operatorname{Re} A$.

(11) $(M): x_1^{\cdot} = x_2,\ x_2^{\cdot} = x_3,\ x_3^{\cdot} = ax_1^2$.

Неустойчивость при $a \neq 0$.

13) (M): $\rho_1^{\cdot} = \rho_1(a_{12}\rho_2 + a_{11}^{(1)}\rho_1^2)$; $\rho_2^{\cdot} = \rho_2(a_{21}\rho_1 + a_{22}\rho_2)$; $\varphi_k^{\cdot} = h_k(\rho, \varphi)$

Здесь $a_{22} < 0$, a_{12} и a_{21} не положительны одновременно. Условие $M_+ : a_{11}^{(1)} < 0$.

14)

$$(M): \begin{cases} \rho_1^{\cdot} = \rho_1(-\rho_1 + a\rho_2) + \rho_1 \sum a_{jk}^{(1)}\rho_j\rho_k \\ \rho_2^{\cdot} = l\rho_2(\rho_1 - a\rho_2) + \rho_2 \sum a_{jk}^{(2)}\rho_j\rho_k, \quad \varphi_k^{\cdot} = h_k(\varphi, \rho) \end{cases}$$

Здесь $a > 0$, $l > 0$. Условие $M_+ : K < 0$. Здесь

$$K = a^2(la_{11}^{(1)} + a_{11}^{(2)}) + a(la_{12}^{(1)} + a_{12}^{(2)}) + la_{22}^{(1)} + a_{22}^{(2)}.$$

15) $(M): z_1^{\cdot} = i\omega z_1 + z_2;\ z_2^{\cdot} = i\omega z_2 + Bz_1 \mid z_1 \mid^2$

Неустойчивость при $\operatorname{Im} B \neq 0$.

16) $(M): z_1^{\cdot} = i\omega z_1 + B_1 z_1^* z_2;\ z^{\cdot}_2 = 2i\omega z_2 + B_2 z_1^2$.

Неустойчивость при $B_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$, $B_2 / B_1^* \neq \gamma < 0$.

17) Критерий устойчивости не может быть задан явными формулами

18) (M): $x^{\cdot} = ax^2$; $z_k^{\cdot} = i\omega_k z_k$, $k = 1, 2$

Неустойчивость при $a \neq 0$.

19) (M): $x_1^{\cdot} = x_2$, $x_2^{\cdot} = ax_1^2$, $z^{\cdot} = i\omega z$

20) Пусть $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$; $\lambda_{5,6} = \pm i\omega_3$ и отсутствуют резонансы младших порядков: $\omega_j \neq \omega_k$, $\omega_j \neq 2\omega_k$, $\omega_j \neq 3\omega_k$, $\omega_j \neq \omega_k + \omega_l$; $\omega_j \neq 2\omega_k + \omega_l$.

$$(M):\ \rho_k^{\cdot} = \rho_k \sum a_{kj}\rho_j; \quad k, j = 1, 2, 3$$

Уравнения для φ_k не выписаны. Назовем растущим инвариантным лучом системы (M) решение вида $\rho_k(t) = c_k r(t)$, $r^{\cdot} = r^2$, $c_k \geqslant 0$ (не все $c_k = 0$).

Условие M_+: среди решений системы (M) нет растущих инвариантных лучей. Проверка M_+ сводится к рассмотрению семи линейных систем $A\rho = e$ при $\rho_k \geqslant 0$. Здесь $A = \| a_{jk} \|$, в качестве e берутся векторы (1, 1, 1), . . ., (0, 0, 1). Если хотя бы одна из этих систем имеет решение, то система (M) неустойчива.

5. Показатели в системах S_ε и NS_ε. В таблице приведены показатели $\varkappa_+$ и $\varkappa_-$, фигурирующие в теоремах S_ε и NS_ε. Большинство приведенных показателей неулучшаемо. Если показатели могут быть увеличены, то в скобках указано гипотетическое неулучшаемое значение. Отметим, что если отказаться от требования $u^{(0)} \in G_{2\varepsilon}$, то показатели $\varkappa_+$ в некоторых случаях, где есть нулевые λ, могут быть увеличены. Прочерк для $\varkappa_+$ означает, что в данном случае устойчивость невозможна. В случаях 8 и 10 показатели $\varkappa_-$ зависят от того, какое из условий нарушается.

6. Пример доказательства теоремы S_ε (случай 20). Пусть система (1.1) удовлетворяет условиям случая 20 (п. 3). Нормализуем (1.1) гладким преобразованием (обратимым в окрестности $u^{(0)}$) до членов третьего порядка включительно. Получим

(6.1) $\dot{z}_k = i\omega_k z_k + p_k^{(3)}(z) + r_{1k};\quad \dot{w}_j = \lambda_j w_j + q_j^{(2)}(w) + q_j^{(3)}(z, w) + r_{2j}$

Здесь z_k — комплексные переменные ($k = 1, 2, 3$), w_j — комплексные или вещественные переменные. Если есть кратные λ_j, то в уравнениях для w могут быть также линейные слагаемые. Верхний индекс — степень одно-

N	$\varkappa_+$	$\varkappa_-$	N	$\varkappa_+$	$\varkappa_-$
1	—	$1/2$	11	—	$5/6$
2	$1/3$	$1/2$	12	$1/2$	$1/2$
3	—	$1/4$	13	$1/4$	$1/4$
4	$1/2$	$1/2$	14	$1/4$	$1/4$ ($1/4$)
5	$1/4$	$1/4$	15	—	1
6	$1/6$	$1/6$	16	—	1
7	—	$3/4$	17	$1/2$	$1/2$
8	$1/4$	$1/3$; $1/4$	18	—	$1/2$
9	—	$1/2$	19	—	$1/2$ ($3/4$)
10	$1/3$	$1/2$; $1/3$ ($1/2$)	20	$1/2$	$1/2$

родного полинома; полиномы $q_j^{(3)}$ линейны по переменным w; $|r_{1k}(z, w)|$, $|r_{2j}(z, w)| \leqslant C(|z|^4 + |w|^4)$; для векторов имеем

$$|z|^2 = \sum_k |z_k|^2,\quad |w|^2 = \sum_j |w_j|^2 \ldots$$

Система (6.1) в вещественной записи примет вид

(6.2)
$$\begin{aligned}
&\dot{x} = \Gamma_1 x + P^{(3)}(x) + R^{(x)}\\
&\dot{y} = \Gamma_2 y + Q^{(2)}(y) + Q^{(3)}(x, y) + R^{(y)}\\
&|Q^{(3)}| \leqslant C|x|^2 y,\quad |R^{(x)}(x, y)|\\
&|R^{(y)}(x, y)| \leqslant C(|x|^4 + |y|^4)\\
&\dim x = 6,\quad \dim y = n - 6
\end{aligned}$$

Модельной системе (M) отвечает в вещественной записи система

(6.3) $\dot{x} = \Gamma_1 x + P^{(3)}(x)$

Рассмотрим произвольную систему вида (6.3), являющуюся вещественной записью нормализованной системы. Пусть Γ_1 диагонализируема и все $\operatorname{Re}\lambda(\Gamma_1) = 0$.

Лемма 1 [14]. Пусть $x = \Phi_1(t, \xi)$ — общее решение системы (6.3) и $x = \Phi_2(t, \xi)$ — общее решение однородной системы $\dot{x} = P^{(3)}(x)$ ($\Phi_k \times (0, \xi) = \xi$). Тогда $\Phi_1(t, \xi) = \exp(t\Gamma_1)\Phi_2(t, \xi)$, в частности, $|\Phi_1(t, \xi)| = |\Phi_2(t, \xi)|$.

Лемма 2. Пусть дана однородная система

(6.4) $\dot{x} = h(x),\quad h(\alpha x) = \alpha^m h(x),\ m > 1\quad (\forall \alpha > 0)$

Если система (6.4) асимптотически устойчива, то существует однородная функция Ляпунова, для которой

(6.5) $\dot{L} \leqslant -\gamma|x|^{m+1},\ L(\alpha x) = \alpha^2 L(x)\ (\gamma > 0)$

Следствие. Существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что при $|\delta h(x)| < \varepsilon_0 |x|^m$ система $x^{\cdot} = h(x) + \delta h(x)$ асимптотически устойчива одновременно с системой (6.4).

Замечание 8°. Лемма 2 есть следствие из теоремы 22.1 работы [15] (там же приведены соответствующие литературные ссылки).

Следствие. Из леммы 1 и 2 следует, что если система (6.3) устойчива, то она допускает однородную функцию Ляпунова $L_1(x)$ с оценкой (6.5).

Лемма 3. (Теорема S). Если система (6.3) устойчива, то система (6.2) также устойчива.

Доказательство. Пусть $L_2(y)$ — квадратичная функция Ляпунова системы: $y^{\cdot} = \Gamma_2 y + Q^{(2)}(y)$ с оценкой $L_2^{\cdot} < -\gamma_2 |y|^2$. В силу однородности $|\partial L_1/\partial x| \leqslant C_1 |x|$, $|\partial L_2/\partial y| \leqslant C_1 |y|$.

Положим

$$L(u) = L(x, y) = L_1(x) + L_2(y)$$
$$u = (u_1, \ldots, u_n) = (x_1, \ldots, x_6, y_1, \ldots, y_{n-6})$$
$$L^{\cdot}|_{(6,2)} \leqslant -\gamma_1 |x|^4 + C_2 |x| |u|^4 - \gamma_2 |y|^2 + C_2 |y| (|x|^2 |y| + |u|^4) \leqslant -\gamma_3 |u|^4 + C_3 |u|^5, \ \gamma_3 > 0$$

В силу (6.2)

$$L^{\cdot} < -\gamma |u|^4, \quad (|u| < C_0, \ \gamma > 0) \tag{6.6}$$

Теорема 1 (Теорема S для случая 20). Если система (6.3) устойчива, то... (далее согласно эталонной формулировке п. 2), показатель $\varkappa_+ = 1/2$.

Доказательство. Обозначим через U область действия неравенства (6.6), $U(a)$ — область $0 \leqslant L \leqslant a$, $S(a)$ — границу $U(a)$. Поскольку $L(\alpha u) = \alpha^2 L(u)$, то при $u \in S(a)$

$$K_1 a^{1/2} \leqslant |u| \leqslant K_2 a^{1/2} \tag{6.7}$$

Пусть при $a < a_1$ $U(a) \subset U$. Положим $G_1 = U(a_1)$. При $\varepsilon = 0$ на $S(a_1)$ $L^{\cdot} < \eta < 0$. Поэтому при $\varepsilon < \varepsilon_1$ в силу возмущенной системы (2.1) $L^{\cdot} < \eta/2$ на $S(a_1)$, т. е. траектории любой из систем (2.1) входят в область G_1.

Производная L в силу системы (2.1) имеет вид

$$L^{\cdot} = \sum \frac{\partial L}{\partial u_k} (f_k + f_k^{(\varepsilon)} - f_k) \leqslant -\gamma |u|^4 + C_1 \varepsilon |u| \tag{6.8}$$

Правая часть (6.8) отрицательна при $|u| > C_2 \varepsilon^{1/3}$, т. е. в силу (2.1) $u(t)$ «монотонно» (в смысле убывания L) приближается к $u = 0$ до расстояния $\sim \varepsilon^{1/3}$. Отметим, что в (6.8) использовалась лишь малость $|f - f^{(\varepsilon)}|$.

Пусть $\| f^{(\varepsilon)} - f \|_1 < \varepsilon$. При $\varepsilon < \varepsilon_0$ по теореме о неявной функции в окрестности $u = 0$ существует единственное решение $u^{(\varepsilon)}$ системы $f^{(\varepsilon)}(u) = 0$; при этом $|u^{(\varepsilon)}| \leqslant C\varepsilon$. Обозначим $\delta f(u) = f^{(\varepsilon)}(u) - f(u - u^{(\varepsilon)})$. Тогда

$$\left| \frac{\partial (\delta f)}{\partial u_k} \right| \leqslant \left| \frac{\partial f^{(\varepsilon)}(u)}{\partial u_k} - \frac{\partial f(u)}{\partial u_k} \right| + \left| \frac{\partial f(u)}{\partial u_k} - \frac{\partial f(u - u^{(\varepsilon)})}{\partial u_k} \right|$$

Первое слагаемое $< \varepsilon$ по (2.1), второе $< C_3 \varepsilon$ ввиду гладкости f. Поскольку $\delta f(u^{(\varepsilon)}) = 0$, имеем

$$|\delta f(u)| < C_4 \varepsilon |u - u^{(\varepsilon)}| \tag{6.9}$$

Фиксируем некоторую функцию $f^{(\varepsilon)}$; пусть $L^{(\varepsilon)}(u) = L(u - u^{(\varepsilon)})$. Производная $L^{(\varepsilon)}$ в силу (2.1) имеет вид

$$\frac{dL^{(\varepsilon)}}{dt} \equiv \frac{\partial L^{(\varepsilon)}}{\partial u} f^{(\varepsilon)}(u) = \frac{\partial L}{\partial u}(u - u^{(\varepsilon)}) (f^{(\varepsilon)}(u) - f(u - u^{(\varepsilon)})) + \frac{\partial L}{\partial u}(u - u^{(\varepsilon)}) f(u - u^{(\varepsilon)}) \leqslant C_5 \varepsilon |u - u^{(\varepsilon)}|^2 - \gamma |u - u^{(\varepsilon)}|^4 \tag{6.10}$$

Здесь первое слагаемое оценено в силу (6.9), второе — в силу (6.6). Правая часть (6.10) меньше $-|u-u^{(\varepsilon)}|^4 \gamma/2$ при $|u-u^{(\varepsilon)}| > G_6\varepsilon^{1/2}$.

Положим $G_2 = \{u, L^{(\varepsilon)}(u) \leqslant q\varepsilon\}$, $q = (C_6/K_1)^2$. Окрестность G_2 получается из $U(q\varepsilon)$ сдвигом на величину $\leqslant C\varepsilon$ и инвариантна для выбранной системы (2.1). При $\varepsilon \leqslant \varepsilon_2$ область $U(2q\varepsilon)$ содержит любую из областей G_2; положим $G_{2\varepsilon} = U(2q\varepsilon)$. При этом диаметр $d(G_{2\varepsilon}) \leqslant K_2(2q\varepsilon)^{1/2} = C_7\varepsilon^{1/2}$ (K_1 и K_2 см. в (6.7)).

Замечания. 9°. При доказательстве теоремы 1 использованы только: а) асимптотическая устойчивость модельной системы; б) отсутствие в (6.3) квадратичных членов. Поэтому доказанная теорема справедлива для любого $n_2 \geqslant 1$ при отсутствии резонансов двух младших порядков ($\omega_j \neq \omega_k$; $\omega_j \neq 2\omega_k$, $\omega_j \neq \omega_j + \omega_k$).

10°. Если предположить малость лишь $|f^{(\varepsilon)} - f|$ неулучшаемым показателем $\varkappa_+$ при любом $n_2 \geqslant 1$ будет $^1/_3$. Поясним это на примере $n_2 = 1$. Пусть система двух уравнений в комплексной записи имеет вид

$$z^{\cdot} = i\omega z + \varepsilon^{2/3} h(\rho\varepsilon^{-2/3}) z - \rho z \quad (\rho = |z|^2) \tag{6.11}$$

Здесь $h(\rho) \equiv 1$ при $\rho \leqslant 1$; $0 \leqslant h(\rho) < 1$ при $1 < \rho < 2$, $h(\rho) \equiv 0$ при $\rho > 2$. Среди решений (6.11) есть устойчивый предельный цикл $|z| = \varepsilon^{1/3}$ и $G_{2\varepsilon} = \{z, |z| \leqslant \varepsilon^{1/3}\}$. При этом $|f - f^{(\varepsilon)}| \leqslant \varepsilon$, $\|f - f^{(\varepsilon)}\|_1 \sim \varepsilon^{2/3}$.

7. Пример доказательства теоремы NS_ε — случай 16. Схема излагаемого ниже доказательства типична. Неустойчивость модельной системы доказывается построением решения, траектория которого l стремится к положению равновесия при $t \to -\infty$. Строится коническая окрестность $\Omega(l)$ со следующими свойствами: а) внутри Ω решения полной системы в некоторой метрике монотонно растут; б) на боковой границе Ω траектории только входят в Ω (ср. с работами [16, 17]). При $\varepsilon \neq 0$ свойства а) и б) сохраняются в окрестности $u^{(0)}$ величиной порядка $\varepsilon^{\varkappa_-}$, что дает теорему NS_ε.

В некоторых случаях удается построить полиномиальные функции Четаева в полной окрестности $u^{(0)}$ (или в ее большой части), это позволяет упростить доказательства и получить неулучшаемые показатели $\varkappa_-$ в случаях 7), 15) и некоторых других. Эта схема здесь обсуждаться не будет.

Пусть система (1.1) удовлетворяет условиям случая 16). Пусть размерность $n = 4$ (т. е. наименьшей возможной для этого случая). Леммы 4 и 5 повторяют результаты работ [12, 13] в той форме, в которой они в дальнейшем будут использоваться. Нормализуем систему (1.1) до членов второго порядка включительно. Получим в комплексной форме

$$z_1^{\cdot} = i\omega z_1 + B_1 z_1^* z_2 + O(|z|^3), \quad z_2^{\cdot} = 2i\omega z_2 + B_2 z_1^2 + O(|z|^3) \tag{7.1}$$

Модельная система имеет вид

$$z_1^{\cdot} = i\omega z_1 + B_1 z_1^* z_2, \quad z_2^{\cdot} = 2i\omega z_2 + B_2 z_1^2 \tag{7.2}$$

Положим

$$z_k = \sqrt{\rho_k}\, e^{i\varphi_k}, \quad B_1 = b_1 e^{-i\beta_1},$$
$$B_2 = b_2 e^{i\beta_2}, \; \psi = \varphi_2 - 2\varphi_1, \; k = 1, 2$$

Из (7.2) получим

$$\begin{aligned} \rho_1^{\cdot} &= 2b_1\rho_1\rho_2^{1/2}\cos(\psi - \beta_1) \\ \rho_2^{\cdot} &= 2b_2\rho_1\rho_2^{1/2}\cos(\psi - \beta_2) \\ \psi^{\cdot} &= -2b_1\rho_1^{1/2}\sin(\psi - \beta_1) - b_2\rho_1\rho_2^{-1/2}\sin(\psi - \beta_2) \end{aligned} \tag{7.3}$$

Лемма 4. Пусть $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $\beta = \beta_1 - \beta_2 \neq \pi$. Тогда положение равновесия (0, 0) системы (7.2) неустойчиво.

Доказательство $\rho_2 = r(t)$, $\rho_1 = kr(t)$, $r^{\cdot} = 2b_1k^{3/2}\cos\psi_0$, $\psi = \psi_0 = \text{const}$ является растущим решением системы (7.3), если положить при $\beta \neq 0$

$$k = \frac{b_1}{2b_2}\left[(8 + \cos^2\beta)^{1/2} - \cos\beta\right] \tag{7.4}$$

$$\operatorname{tg}\psi_0 = \frac{b_2k - b_1\cos\beta}{b_1\sin\beta}, \quad \cos\psi_0 > 0$$

При $\beta = 0$ $k = b_1/b_2$, $\psi_0 = 0$.

Лемма 5 (теорема NS). Пусть $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $\beta \neq \pi$. Тогда положение равновесия системы (7.1) неустойчиво.

Доказательство. Положим $\rho_1 = R\cos\theta$, $\rho_2 = R\sin\theta$, $d\tau = R^{1/2}dt$. Из (7.1) получим

$$R^{\cdot} = R\Pi(\theta, \psi) + O(R^{3/2}) \quad (^{\cdot} \equiv d/d\tau) \tag{7.5}$$

$$\Pi = \cos\theta(\sin\theta)^{1/2}[b_1\cos\theta\cos(\psi - \beta_1) + b_2\sin\theta\cos(\psi - \beta_2)]$$

$$\theta^{\cdot} = g_1(\theta, \psi) + O(R^{1/2}), \quad \psi^{\cdot} = g_2(\theta, \psi) + O(R^{1/2}) \tag{7.6}$$

$$g_1 = \cos\theta(\sin\theta)^{1/2}[-b_1\sin\theta\cos(\psi - \beta_1) + b_2\cos\theta\cos(\psi - \beta_2)]$$

$$g_2 = (\sin\theta)^{-1/2}[2b_1\sin\theta\sin(\psi - \beta_1) + b_2\cos\theta\sin(\psi - \beta_2)]$$

Растущему решению модельной системы отвечает неподвижная точка $P(\theta_0, \psi_0)$ угловой системы (7.7)

$$\theta^{\cdot} = g_1(\theta, \psi), \quad \psi^{\cdot} = g_2(\theta, \psi) \tag{7.7}$$

При этом $\operatorname{ctg}\theta_0 = k$, $\Pi(\theta_0, \psi_0) = \Pi_0 > 0$.

Линеаризуя систему (7.7) в P, получим матрицу

$$\Lambda = \frac{d(g_1, g_2)}{d(\theta, \psi)} = kb_2\begin{Vmatrix} -3\cos\psi_0 & -\sin\psi_0 \\ 3\sin\psi_0 & -2\cos\psi_0 \end{Vmatrix}$$

Поскольку $\cos\psi_0 > 0$, оба собственных значения матрицы Λ лежат в левой полуплоскости. Пусть $l(\theta, \psi)$ — квадратичная функция Ляпунова, так что в силу (7.7) $l^{\cdot} \leqslant -\gamma_l$ в окрестности $U_1(P)$. Пусть окрестность $U_2(P) \subset U_1$ такова, что при $(\theta, \psi) \in U_2$, $R < R_1$ в силу (7.5) $R^{\cdot} > {}^1/{}_2\Pi_0R$. Пусть $l_* > 0$ такова, что линия $l(\theta, \psi) = l_*$ целиком лежит в U_2. Пусть, наконец, $R_2 < R_1$ таково, что при $l(\theta, \psi) = l_*$ и $R < R_2$ в силу (7.6) $l^{\cdot} < -\gamma_1 < 0$. Всякое решение систем (7.5), (7.6) (и тем самым системы (7.1)), для которого при $\tau = 0$, $l(\theta(0), \psi(0)) < l_*$, $R(0) = \delta < R_2$, монотонно растет ($R^{\cdot} > 0$) до выполнения равенства $R = R_2$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь наряду с системой $z^{\cdot} = F(z)$ (7.1) возмущенную систему $z^{\cdot} = F^{(\varepsilon)}(z)$, $z = (z_1, z_2)$ или (в вещественной записи) систему (2.1).

Теорема 2 (*теорема* NS_ε *для случая* 16). Формулировка теоремы стандартная (см. п. 2), показатель $\varkappa_- = 1$.

Доказательство. Из теоремы о неявной функции следует, что система $F^{(\varepsilon)}(z) = 0$ имеет при $\varepsilon < \varepsilon_0$ единственное решение $z^{(\varepsilon)}$, близкое к $z = 0$: $F^{(\varepsilon)}(z^{(\varepsilon)}) = 0$, $|z^{(\varepsilon)}| < C\varepsilon$. При этом (см. п. 6) $F^{(\varepsilon)}(z) = F(z - z^{(\varepsilon)}) + \delta F$; $|\delta F| \leqslant C_1\varepsilon|z - z^{(\varepsilon)}|$. Введем переменную $v = z - z^{(\varepsilon)}$ (т. е. $v_1 = z_1 - z_1^{(\varepsilon)}$, $v_2 = z_2 - z_2^{(\varepsilon)}$). Положим

$$v_k = \sqrt{\rho_k}\,e^{i\varphi_k}, \quad \psi = \varphi_2 - 2\varphi_1, \quad \rho_1 = R\cos\theta \tag{7.8}$$

$$\rho_2 = R\sin\theta, \quad d\tau = R^{1/2}dt$$

Из системы $z^{\cdot} = E^{(\varepsilon)}(z)$ получим

$$
R^{\cdot} = R\Pi(\theta, \psi) + O(R^{3/2}) + \Delta\Pi(R, \theta, \psi), \quad |\Delta\Pi| \leqslant CR^{1/2}\varepsilon
$$
$$
\theta^{\cdot} = g_1(\theta, \psi) + O(\sqrt{R}) + \Delta g_1 \tag{7.9}
$$
$$
\psi^{\cdot} = g_2(\theta, \psi) + O(\sqrt{R}) + \Delta g_2, \quad |\Delta g| < C\varepsilon R^{-1/2}
$$

Пусть $l(\theta, \psi) < l_*$, $R < R_2$ (см. лемму 5). Тогда в силу (7.9) $R^{\cdot} > {}^1/_2\Pi_0 R - CR^{1/2}\varepsilon$, что превышает ${}^1/_4\Pi_0 R$ при $R > C_1\varepsilon^2$. Пусть $l(\theta, \psi) = l_*$. Тогда при $R < R_2$ в силу (7.9) имеем $l^{\cdot} \leqslant -\gamma_1 + C_2\varepsilon R^{-1/2}$, что меньше $-\gamma_1/2$ при $R > C_3\varepsilon^2$. Если $R(0) > C_0\varepsilon^2$ ($C_0 = \max(C_1, C_2)$) $l(\theta(0), \psi(0)) < l_*$, то $R(\tau)$ монотонно растет, пока не достигнет $R = R_2$. Заметим, что ${}^1/_2|v|^2 < R < |v|^2$. Таким образом, существуют $v(\tau)$, для которых $|v(0)| \leqslant C_4\varepsilon$ и $\sup_{\tau>0}|v(\tau)| > R_2^{1/2}$. Для $z = v + z^{(\varepsilon)}$ получим $|z(0)| \leqslant C_5\varepsilon$ и $\sup_{t>0}|z(t)| \geqslant a = {}^1/_2 R_2^{1/2}$.

Авторы благодарят участников университетской школы «Методы исследования стационарных движений механических систем» за конструктивную критику. Авторы признательны Белецкому В. В., Бурду В. Ш., Гаврилову И. К., Колесову Ю. С., Юдовичу В. И. за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И.* Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости по Ляпунову и проблемы топологической классификации особых точек аналитической системы дифференциальных уравнений.— Функциональный анализ, 1970, т. 4, вып. 3, с. 1.
2. *Ильяшенко Ю. С.* Аналитическая неразрешимость проблемы устойчивости и проблемы топологической классификации особых точек аналитических систем дифференциальных уравнений.— Матем. сб., 1972, т. 99, вып. 2, с. 162.
3. *Хазин Л. Г., Шноль Э. Э.* Простейшие случаи алгебраической неразрешимости в задачах об асимптотической устойчивости.— Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 6, с. 1309.
4. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
5. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 255 с.
6. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
7. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
8. *Баутин Н. Н.* Поведение динамических систем вблизи границы области устойчивости. Л.— М.: Гостехиздат, 1949. 164 с.
9. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения.— Собр. соч. Т. 2. М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1956, с. 7.
10. *Ляпунов А. М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения.— Собр. соч. Т. 2. М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1956, с. 272.
11. *Каменков Г. В.* Устойчивость и колебания нелинейных систем.— Избр. тр. Т. 2. М.: Наука, 1972. 214 с.
12. *Куницын А. Л.* Об устойчивости в критическом случае чисто мнимых корней при внутреннем резонансе.— Дифференц. уравнения, 1971, т. 7, № 9, с. 1704.
13. *Хазина Г. Г.* Некоторые вопросы устойчивости при наличии резонансов.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 1, с. 56.
14. *Молчанов А. М.* Устойчивость в случае нейтральности линейного приближения.— Докл. АН СССР, 1961, т. 141, № 1, с. 24.
15. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
16. *Четаев Н. Г.* Одна теорема о неустойчивости.— Докл. АН СССР, 1934, т. 1, № 9, с. 529.
17. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980, 300 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.IV.1980