Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 4, 1981

УДК 531.36 : 534

ВЫРОЖДЕННЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ В СЛУЧАЕ ПОРОЖДАЮЩЕГО СЕМЕЙСТВА КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Гольдман П. С., Нагаев Р. Ф.

Рассматривается задача о существовании и устойчивости в малом периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром μ, которая в порождающем приближении допускает устойчивое в большом семейство квазипериодических решений. Получены четыре группы разнохарактерных критериев устойчивости периодических решений, которые отличаются наличием синхронизации не всех порождающих быстрых фаз. Зависимость рассматриваемых решений от прочих фаз, называемых квазистатическими, отсутствует полностью.

Невырожденный частный случай синхронизации всех быстрых фаз рассмотрен ранее [1], изучались и другие частные аспекты рассматриваемой здесь общей задачи [2—5]. Техника построения периодического решения в виде рядов по степеням малого параметра разработана Пуанкаре и другими авторами [2].

1. Структура порождающей системы задачи. Для приложений, связанных с небесной механикой и техникой, актуальна задача о периодических решениях следующей почти-консервативной динамической системы:

$$p^{\cdot} = -\partial H/\partial q + \mu Q,\quad q^{\cdot} = \partial H/\partial p,\quad u^{\cdot} = U \tag{1.1}$$
$$H = H(q, p),\quad Q = Q(q, p, u, \psi, \mu)$$
$$U = U(q, p, u, \psi, \mu)$$

Здесь p и q — соответственно вектор-строка и вектор-столбец сопряженных канонических переменных, u — вектор прочих координат системы, а порождающий гамильтониан H и вектор-функции Q, U периодичны по фазе внешнего возмущения $\psi = \nu t$ и аналитичны по прочим переменным. Предполагается, что в порождающем приближении ($\mu = 0$) изолированная консервативная подсистема допускает общий квазипериодический интеграл. Отвечающие ему быстрые фазы будем условно разбивать на две группы:

$$\psi_i = \omega_i t + \alpha_i,\ i = 1, \ldots, l; \tag{1.2}$$
$$\varphi_s = \Omega_s t + \beta_s,\ s = 1, \ldots, m$$

причем фазы первой и второй групп сопряжены соответственно постоянным действия $I_1, \ldots, I_l$ и $K_1, \ldots, K_m$. Таким образом, фазовое пространство порождающей канонической подсистемы задачи сплошь заполнено торами с $l + m + 1$ угловыми координатами

$$p = p(\psi_1, \ldots, \psi_l, I_1, \ldots, I_l, \varphi_1, \ldots, \varphi_m, K_1, \ldots, K_m, \theta_1, \ldots \tag{1.3}$$
$$\ldots, \theta_n, h_1, \ldots, h_n, \psi)$$
$$q = q(\psi_1, \ldots, \psi_l, I_1, \ldots, I_l, \varphi_1, \ldots, \varphi_m, K_1, \ldots, K_m, \theta_1, \ldots$$
$$\ldots, \theta_n, h_1, \ldots, h_n, \psi)$$

Здесь $\theta_1, \ldots, \theta_n, h_1, \ldots, h_n$ — прочие сопряженные постоянные интегрирования, так что $l + m + n$ — размерность вектора p (или q). Парциальные частоты первой группы $\omega_1, \ldots, \omega_l$ — существенные взаимно независимые функции переменных действия, причем

$$\omega_i = \partial H / \partial I_i \tag{1.4}$$

Порождающий гамильтониан в переменных действия имеет вид $H = H(I_1, \ldots, I_l, K_1, \ldots, K_m)$. Это означает, что матричный коэффициент крутизны

$$e_{ij} = \partial\omega_i / \partial I_j = \partial^2 H / \partial I_i \partial I_j \tag{1.5}$$

имеет ранг l. Парциальные частоты второй группы $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ также взаимно независимы и удовлетворяют равенствам

$$\Omega_s = \partial H / \partial K_s \tag{1.6}$$

Однако среди них могут встретиться изохронные фазы ($\Omega_s = \mathrm{const}$), относительно которых предполагается наличие сильной несоизмеримости с частотой возмущения ν.

Кроме того, эти частоты таковы, что величины

$$\infty > \Omega_s |_{K_1 = \ldots = K_m = 0} > 0 \tag{1.7}$$

и не малы. Отметим также, что частоты, не являющиеся изохронными, при $K_1 = \ldots = K_m = 0$ могут оказаться и равными друг другу. Изохронные фазы могут в общем интеграле (1.3) и не принадлежать второй группе. Предполагается, что порождающая система такова (или может быть сделана такой), что частоты, отвечающие этим фазам, тождественно равны ν и поэтому могут быть отнесены к явно входящей в (1.3) внешней фазе ψ. В этом случае порождающий гамильтониан в соотношениях (1.4) — (1.6) определен с точностью до постоянного слагаемого νI, где I — постоянная действия, сопряженная изохронной резонансной фазе. Отметим, наконец, что для частот первой группы выполнение неравенств типа (1.7) не обязательно.

В дальнейшем фазы первой группы, а также их действия и фазовые сдвиги $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ будем называть анизохронными, а соответствующие характеристики второй группы — квазистатическими.

Еще одно существенное предположение относится к виду зависимости общего интеграла (1.3) от квазистатических фаз и действий. Допустим, что переменные величины p и q — аналитические функции величин

$$\lambda_s = \sqrt{K_s} \cos\varphi_s, \quad \mu_s = \sqrt{K_s} \sin\varphi_s \tag{1.8}$$

Последнее векторное уравнение (1.1) в порождающем приближении интегрируется после получения (1.3). Предполагается, что это уравнение допускает эффективное построение устойчивого в большом квазипериодического семейства «чисто вынужденных» решений вида

$$u = u(\psi_1, \ldots, \psi_l, I_1, \ldots, I_l, \varphi_1, \ldots, \varphi_m, K_1, \ldots, K_m, \theta_1, \ldots \ldots, \theta_n, h_1, \ldots, h_n, \psi) \tag{1.9}$$

Последнее обеспечивается, например, если это уравнение при $\mu = 0$ линейное и стационарное по компонентам u.

В дальнейшем, несколько обобщая задачу, будем исходить из системы

$$x^{\cdot} = X(x, \psi, \mu) \tag{1.10}$$

обладающей всеми описанными свойствами и поэтому допускающей при $\mu = 0$ устойчивое в большом семейство квазипериодических решений

$$x = x(\psi, \psi_1, \ldots, \psi_l, I_1, \ldots, I_l, \lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_m, h_1, \ldots, h_n) \tag{1.11}$$

Здесь для простоты записи все постоянные, не принадлежащие группам анизохронных и квазипериодических координат, обозначены $h_1, \ldots, h_n$.

Порождающее T-периодическое решение характеризуется тем, что анизохронные парциальные частоты совпадают с частотой возмущения, а квазистатические действия обращаются в нуль

$$K_s = 0, \ \omega_i(I_1, \ldots, I_l, 0, \ldots, 0) = \nu \tag{1.12}$$

Соотношения (1.12) в силу невырожденности матрицы крутизны (1.5) однозначно определяют значения анизохронных действий. Такое T-периодическое подсемейство из (1.11) зависит от постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, $h_1, \ldots, h_n$.

2. Критерии существования и устойчивости. Система уравнений в вариациях системы (1.10)

$$y^{\cdot} = y\partial X/\partial x \tag{2.1}$$

вблизи искомого T-периодического решения допускает при $\mu = 0$, $l + n$ взаимно независимых решений того же периода [1]

$$(\partial x/\partial\alpha_i), \ i = 1, \ldots, l; \ (\partial x/\partial h_\gamma), \ \gamma = 1, \ldots, n \tag{2.2}$$

и l возрастающих решений вида

$$(\partial x/\partial\alpha_i)\, t + \vartheta_i \tag{2.3}$$

$$\vartheta_i = (e_{ij})^{-1}(\partial x/\partial I_j) \tag{2.4}$$

Здесь $(e_{ij})^{-1}$ — матрица, обратная (1.5); круглые скобки здесь и далее означают, что соответствующая величина вычисляется на порождающем T-периодическом решении. Кроме того, в (2.4) и ниже подразумевается суммирование по повторяющимся индексам i, j, k, от 1 до l, по индексу r — суммирование от 1 до m и по индексу δ — от 1 до n.

Система (2.1) при $\mu = 0$ допускает также m пар комплексно-сопряженных взаимно независимых квазипериодических частных решений вида

$$[(\partial x/\partial\lambda_s) \pm \sqrt{-1}\,(\partial x/\partial\mu_s)] \exp[\mp\sqrt{-1}\,(\varphi_s)] \tag{2.5}$$

Если χ квазистатических частот $\Omega_1, \ldots, \Omega_\chi$ при $K_1 = \ldots = K_m$ становятся равными данному значению (Ω), то соответственно χ частных квазипериодических решений типа (2.5) будут иметь одинаковый частотный спектр. Тем не менее в силу взаимной независимости этих частот (при $K_s = 0$) соответствующие частные решения взаимно независимы. Таким образом, характеристическое уравнение системы (2.1) при $\mu = 0$ имеет n-кратный нулевой корень с простыми элементарными делителями, $(2l)$-

кратный нулевой корень с квадратными элементарными делителями и m пар чисто мнимых показателей вида $\pm\sqrt{-1}$ (Ω_s). Появление последних связано с наличием квазистатических фаз и предопределяет существенное отличие рассматриваемой вырожденной задачи от случая синхронизма по всем фазам [1].

Отметим, наконец, что все прочие характеристические показатели решения в силу устойчивости семейства (1.11) имеют немалые отрицательные вещественные части.

Введем в рассмотрение вектор-строку z, удовлетворяющую системе

$$z^{\cdot} = -z\,(\partial X/\partial x) \tag{2.6}$$

сопряженной (2.1) при $\mu = 0$. Взаимно независимые T-периодические решения (2.6) $v_1, \ldots, v_n$ и $w_1, \ldots, w_l$ подчиним следующим условиям нормировки:

$$v_\delta\,(\partial x/\partial h_\gamma) = \delta_{\gamma\delta};\quad w_j\vartheta_i = \delta_{ij} \tag{2.7}$$

Взаимно независимые квазипериодические частные решения (2.6)

$$(p_s \mp \sqrt{-1}\,\sigma_s)\exp\left[\pm\sqrt{-1}\,(\varphi_s)\right] \tag{2.8}$$

удовлетворяют следующим нормировочным соотношениям:

$$\begin{aligned} &\rho_r\,(\partial x/\partial\lambda_s) + \sigma_r\,(\partial x/\partial\mu_s) = \delta_{sr}\\ &\sigma_r\,(\partial x/\partial\lambda_s) - \rho_r\,(\partial x/\partial\mu_s) = 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Для существования аналитического по μ вблизи точки $\mu = 0$ T-периодического решения (1.10) рассматриваемого типа достаточно, чтобы система $l + n$ трансцендентных уравнений

$$\begin{aligned} &P_\delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, h_1, \ldots, h_n) \equiv \int_0^T v_\delta\,(\partial X/\partial\mu)\,dt = 0\\ &R_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, h_1, \ldots, h_n) \equiv \int_0^T w_j\,(\partial X/\partial\mu)\,dt = 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

допускала простые вещественные решения [2].

Исследования условий асимптотической устойчивости в малом базируются на построении частных решений вида

$$y = \eta\,(t, \mu)\exp\left[\lambda\,(\mu)\,t\right] \tag{2.11}$$

системы уравнений в вариациях (2.1), где λ — характеристический показатель, а η — вектор-столбец с T-периодическими компонентами. Построение решений (2.11), которые при $\mu = 0$ переходят в (2.2), аналогично приведенному в работе [1]. Точно так же показывается, что имеется n аналитических по μ показателей ($\lambda = \lambda_1\mu + \lambda_2\mu^2 + \ldots$), первые приближения к которым λ_1 определяются из условий нетривиальности решений неоднородной системы

$$\begin{aligned} &a_j\partial P_\gamma/\partial\alpha_j + b_\delta\partial P_\gamma/\partial h_\delta = \lambda_1 T b_\gamma\\ &a_j\partial R_i/\partial\alpha_j + b_\delta\partial R_i/\partial h_\delta = 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Кроме того, существует l пар аналитических по $\sqrt{\mu}$ показателей ($\lambda = \pm\,\mu^{1/2}\lambda_1 + \mu\lambda_2 + \mu^{3/2}\ldots$), причем для определения первых двух приближений к ним служат соотношения

(2.13) $a_i \partial R_i / \partial \alpha_j = \lambda_1^2 a_i T$

$$\lambda_2 = \left[\frac{1}{2T} \partial R_j / \partial I_k (e_{ik})^{-1} + \frac{1}{\lambda_1^2 T} \partial R_j / \partial h_\delta \partial P_\delta / \partial \alpha_i - p_{ji}\right] a_i a_j^*$$

(2.14) $$p_{ji} = \int\limits_0^T (w_j \partial x_1 / \partial \alpha_i - \frac{t}{T} \partial R_j / \partial \alpha_i)\, dt$$

Величина x_1 есть T-периодическое решение уравнения первого приближения

(2.15) $x_1^\cdot = (\partial X / \partial x)\, x_1 + (\partial X / \partial \mu)$

а a_i^* — решение системы, сопряженной с (2.13)

(2.16) $a_j^* \partial R_j / \partial \alpha_i = \lambda_1^2 T a_i^*$

которое удовлетворяет условию нормировки $a_i a_i^* = 1$.

Существенно новые критерии устойчивости связаны с наличием квазистатических фаз и отвечают частным решениям (2.11) системы (2.1), которые при $\mu = 0$ обращаются в (2.8). Если при $K_1 = \ldots = K_m = 0$ χ квазистатических частот оказываются равными (Ω), то соответствующие квазипериодические решения аналитичны по μ и характеризуются разложениями

(2.17) $$\eta = a_\xi\, [(\partial x / \partial \lambda_\xi) - \sqrt{-1}\, (\partial x / \partial \mu_\xi)] + \mu \eta_1 + \mu^2 \ldots$$
$$\lambda = \sqrt{-1}\, (\Omega) + \mu \lambda_1 + \mu^2 \ldots$$

где a_ξ $(\xi = 1, \ldots, \chi)$ — некоторые скалярные постоянные, вектор-функции $(\partial x / \partial \lambda_\xi)$, $(\partial x / \partial \mu_\xi)$ отвечают квазистатической фазе, рассматриваемой «кратной» группы с номером ξ, а последовательные приближения η_1, $\eta_2, \ldots$ — T-периодические по t. Здесь и далее по повторяющимся индексам ξ и ζ подразумевается суммирование от 1 до χ.

Подставка рядов (2.17) в (2.2) приводит к следующему уравнению первого приближения

(2.18) $$\eta_1^\cdot = (\partial X / \partial x)\, \eta_1 + a_\xi\, [(\partial' / \partial \mu \partial X / \partial x) - \lambda_1 E]\, [(\partial x / \partial \lambda_\xi) - $$
$$- \sqrt{-1}\, (\partial x / \partial \mu_\xi)] - \sqrt{-1}\, (\Omega)\, \eta_1$$

где штрих означает полное частное дифференцирование по μ.

Выражение для первой поправки к характеристическому показателю λ_1 может быть найдено из условия существования T-периодического решения системы (2.18) и получается в процессе исследования однородной системы

(2.19) $a_\xi\, (q_{\xi\zeta} - \delta_{\xi\zeta} \lambda_1 T) = 0$

$$q_{\xi\zeta} = \int\limits_0^T [\rho_\zeta + \sqrt{-1}\, \sigma_\zeta]\, (\partial' / \partial \mu \partial X / \partial x)\, [(\partial x / \partial \lambda_\xi) - \sqrt{-1}\, (\partial x / \partial \mu_\xi)]\, dt$$

Для асимптотической устойчивости в малом рассматриваемого T-периодического решения достаточно, таким образом, выполнения трех групп критериев.

1°. Анизохронные критерии устойчивости, которые распадаются на две подгруппы и состоят в том, чтобы определяемые согласно (2.13) поправки λ_1 и λ_2 удовлетворяли условиям $\lambda_1^2 < 0$, $\lambda_2 < 0$.

2°. Изохронные критерии устойчивости, подразумевающие отрицательность вещественных частей корней определителя системы (2.12).

3°. Квазистатические критерии устойчивости, которые в соответствии с (2.19) характеризуются выполнением неравенств $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0$.

3. Случай почти-консервативной системы. Использование полученных критериев существования и устойчивости в наиболее общей форме несколько осложняется ввиду присутствия в них периодических решений сопряженной системы (2.6), удовлетворяющих вполне определенным нормировочным соотношениям. Для почти-консервативной системы (1.1) системы уравнений в вариациях (2.1) при $\mu = 0$ является самосопряженной. В силу этого между решениями системы существует соответствие, позволяющее результирующие критерии выразить через явные функционалы, вычисленные на порождающем T-периодическом решении.

С этой целью в исходной почти-консервативной системе (1.1) перейдем, согласно (1.3) — (1.8), от переменных (p, q) к новым каноническим переменным $(\psi_i, I_i, \lambda_s, \mu_s, \theta_\gamma, h_\gamma)$. В результате получим

$$\begin{aligned}
&I_i^{\cdot} = \mu Q\partial q/\partial\psi_i,\ \psi_i^{\cdot} = \omega_i - \mu Q\partial q/\partial I_i\ (i = 1, \ldots, l)\\
&\mu_s^{\cdot} = \Omega_s\lambda_s - \mu Q\partial q/\partial\lambda_s,\ \lambda_s^{\cdot} = -\Omega_s\mu_s + \mu Q\partial q/\partial\mu_s\\
&(s = 1, \ldots, m)\\
&h_\gamma^{\cdot} = \mu Q\partial q/\partial\theta_\gamma,\ \theta_\gamma^{\cdot} = -\mu Q\partial q/\partial h_\gamma\ (\gamma = 1, \ldots, n),\ u^{\cdot} = U
\end{aligned}$$

Устойчивое в большом семейство квазипериодических решений порождающей системы будет

$$\begin{aligned}
&I_i = \mathrm{const},\ \psi_i = \omega_i t + \alpha_i,\ \lambda_s = \sqrt{K_s}\cos\varphi_s\\
&\mu_s = \sqrt{K_s}\sin\varphi_s,\ K_s = \mathrm{const},\ \varphi_s = \Omega_s t + \beta_s\\
&h_\gamma = \mathrm{const},\ \theta_\gamma = \mathrm{const},\ u = u\,(I_i, \psi_i, \lambda_s, \mu_s, h_\gamma, \theta_\gamma)
\end{aligned}$$

В силу этого имеем $l + 2n$ периодических решений системы уравнений в вариациях при $\mu = 0$

$$\begin{aligned}
&\delta I_i = 0,\ \delta\psi_i = \delta_{ij},\ \delta\lambda_s = 0,\ \delta\mu_s = 0,\ \delta h_\gamma = 0\\
&\delta\theta_\gamma = 0,\ \delta u = (\partial u/\partial\alpha_j)\ (j = 1, \ldots, l)\\
&\delta I_i = 0,\ \delta\psi_i = 0,\ \delta\lambda_s = 0,\ \delta\mu_s = 0,\ \delta h_\gamma = \delta_{\gamma\delta}\\
&\delta\theta_\gamma = 0,\ \delta u = (\partial u/\partial h_\delta)\ (\delta = 1, \ldots, n)\\
&\delta I_i = 0,\ \delta\psi_i = 0,\ \delta\lambda_s = 0,\ \delta\mu_s = 0,\ \delta h_\gamma = 0\\
&\delta\theta_\gamma = \delta_{\gamma\delta},\ \delta u = (\partial u/\partial\theta_\delta)\ (\delta = 1, \ldots, n)
\end{aligned}$$

Компоненты вектора ϑ_j (см. (2.4)) применительно к рассматриваемой консервативной задаче будем обозначать штрихом

$$\begin{aligned}
&I_i' = (e_{ij})^{-1},\quad \psi_i' = 0,\quad \mu_s' = \lambda_s' = 0,\quad h_\gamma' = \theta_\gamma' = 0\\
&u' = (e_{jk})^{-1}(\partial u/\partial I_k)
\end{aligned}$$

Переменные сопряженной системы (2.6) будем обозначать звездочкой. Эта система, как и обычно в каноническом случае, переходит в систему уравнений в вариациях, если произвести инверсию

$$\delta I_i \to \psi_i^*,\quad \delta\psi_i \to -I_i^*,\quad \delta\lambda_s \to \lambda_s^*,\quad \delta\mu_s \to \mu_s^*,\quad \delta h_\gamma \to h_\gamma^*,\quad \delta\theta_\gamma \to \theta_\gamma^*$$

и добавить в правые части этих уравнений слагаемые, которые являются линейными однородными формами компонент вектора u^*.

Что же касается последнего векторного уравнения, то оно имеет вид $u^{*\cdot} = -u^* (\partial U/\partial u)$.

В силу сказанного нормированные в соответствии с условиями (2.7) периодические решения сопряженной системы имеют вид

$$I_i^* = (e_{ij}), \quad \psi_i^* = 0, \quad \lambda_r^* = \mu_r^* = 0, \quad h_\gamma^* = \theta_\gamma^* = 0, \quad u^* = 0$$
$$(j = 1, \ldots, l)$$
$$I_i^* = \psi_i^* = 0, \quad \lambda_r^* = \mu_r^* = 0, \quad h_\gamma^* = \delta_{\gamma\delta}, \quad \theta_\gamma^* = 0, \quad u^* = 0$$
$$(\delta = 1, \ldots, n)$$
$$I_i^* = \psi_i^* = 0, \quad \lambda_r^* = \mu_r^* = 0, \quad h_\gamma^* = 0, \quad \theta_\gamma^* = \delta_{\gamma\delta}, \quad u^* = 0$$
$$(\delta = 1, \ldots, n)$$

Уравнения (2.10) для определения параметров порождающего решения будут

$$A_\gamma \equiv \int_0^T (Q\partial q/\partial\theta_\gamma)\,dt = 0, \quad B_\gamma \equiv -\int_0^T (Q\partial q/\partial h_\gamma)\,dt = 0 \tag{3.1}$$
$$(\gamma = 1, \ldots, n)$$
$$R_i \equiv (e_{ij}) \int_0^T (Q\partial q/\partial\alpha_j)\,dt = 0 \quad (i = 1, \ldots, l)$$

В силу невырожденности матрицы (e_{ij}) последние l уравнений (3.1) эквивалентны следующим более простым:

$$C_i \equiv \int_0^T (Q\partial q/\partial\alpha_i)\,dt = 0$$

Система уравнений для определения изохронных критериев устойчивости (2.12) в рассматриваемом почти-консервативном случае приводится к виду

$$\begin{aligned} &a_i\partial A_\delta/\partial\alpha_i + \partial A_\delta/\partial h_\gamma b_\gamma + c_\gamma\partial A_\delta/\partial\theta_\gamma = \lambda_1 T c_\delta \\ &a_i\partial B_\delta/\partial\alpha_i + b_\gamma\partial B_\delta/\partial h_\gamma + c_\gamma\partial B_\delta/\partial\theta_\gamma = \lambda_1 T b_\delta \\ &a_i\partial C_j/\partial\alpha_i + b_\gamma\partial C_j/\partial h_\gamma + c_\gamma\partial C_j/\partial\theta_\gamma = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Анизохронные критерии устойчивости первой подгруппы в соответствии с (2.13) будут определяться из системы

$$(e_{jk})\, a_i\partial C_k/\partial\alpha_i = \lambda_1^2 T a_j \tag{3.3}$$

Система, сопряженная (3.3), может быть приведена к виду

$$(e_{ij})\, b_k\partial C_k/\partial\alpha_i = \lambda_1^2 T b_j$$

где введена новая переменная, удовлетворяющая «взвешенному» условию нормировки

$$a_i\,(e_{ij})^{-1} b_j = 1, \quad a_i^* = (e_{ij})^{-1} b_j \tag{3.4}$$

Для определения анизохронных критериев второй подгруппы требуется раскрыть выражение для матрицы p_{ji} (2.14). Не останавливаясь на промежуточных выкладках, приведем окончательное выражение

$$p_{ji} = \partial D_j/\partial\alpha_i, \quad D_j \equiv \int_0^T (Q\partial q/\partial I_j)\,dt \tag{3.5}$$

Таким образом, в силу (3.4) и (3.5) будем иметь

$$\lambda_2 = \frac{1}{2T}\left[(\partial C_j/\partial I_k - \partial D_k/\partial \alpha_j)(l_{ki})^{-1} + \frac{1}{\lambda_1{}^2 T}(\partial C_j/\partial h_\gamma \partial A_\gamma/\partial \alpha_i + \right.$$
$$\left. + \partial C_j/\partial \theta_\gamma \partial B_\gamma/\partial \alpha_i)\right] a_i b_j$$

Компоненты векторов ρ_s и σ_s, входящие в квазипериодические решения сопряженной системы типа (2.8), удовлетворяющие нормировочным соотношениям типа (2.9), будем обозначать круглыми скобками со звездочкой соответственно сверху и снизу

$$(I_i)^* = (\psi_i)^* = 0, \quad (\lambda_s)^* = \frac{1}{2}\delta_{sr}, \quad (\mu_s)^* = 0, \quad (h_\gamma)^* = (\theta_\gamma)^* = 0,$$
$$(u)^* = 0$$
$$(I_i)_* = (\psi_i)_* = 0, \quad (\lambda_s)_* = 0, \quad (\mu_s)_* = \frac{1}{2}\delta_{sr},$$
$$(h_\gamma)_* = (\theta_\gamma)_* = 0, \quad (u)_* = 0$$

Вследствие этого уравнения (2.19), которые определяют квазистатические критерии устойчивости отвечающие χ-кратному порождающему значению (Ω), будут

$$a_\xi(q_{\xi\zeta} - \delta_{\xi\zeta}\lambda_1 T) = 0$$
$$q_{\xi\zeta} = \int_0^T [(\partial/\partial\lambda_\xi Q \partial q/\partial\mu_\zeta - \partial/\partial\mu_\xi Q\partial q/\partial\lambda_\zeta) -$$
$$- \sqrt{-1}(\partial/\partial\mu_\xi Q\partial q/\partial\mu_\zeta + \partial/\partial\lambda_\xi Q\partial q/\partial\lambda_\zeta)]\, dt$$

Выполнение квазистатических условий устойчивости в линейной задаче о слабом нерезонансном взаимодействии одинаковых линейных осцилляторов

$$q_s^{\cdot\cdot} + \Omega^2 q_s = \mu\,(b_{sr}q_r^{\cdot} + a_{sr}q_r + h_s \sin\omega t) \tag{3.6}$$

где числа Ω и ω взаимно несоизмеримы, а компоненты матриц b_{sr} и a_{sr} постоянны, сводится к выполнению неравенств $\lambda_1 < 0$, в которых λ_1 определяется при исследовании однородной системы линейных уравнений

$$\left[\frac{1}{2}\left(b_{sr} - \sqrt{-1}\,\frac{d_{sr}}{\Omega}\right) - \lambda_1\delta_{sr}\right] a_r = 0$$

Таким образом, в рассматриваемом нерезонансном случае существенны только квазистатические критерии, которые по существу не зависят от величины расстройки $\Omega - \omega = O(1)$ и обеспечивают устойчивость нулевого решения однородной части (3.6).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нагаев Р. Ф.* Случай порождающего семейства квазипериодических решений в теории малого параметра.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 6, с. 990.
2. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
3. *Блехман И. И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971. 894 с.
4. *Акуленко Л. Д.* О резонансных колебательных и вращательных движениях.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 2, с. 245.
5. *Нагаев Р. Ф.* Синхронизация в системе существенно нелинейных объектов с одной степенью свободы.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 2, с. 209.

Ленинград

Поступила в редакцию 30.X.1979