ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.— Л., ОНТИ, Глав. ред. общетехн. лит-ры, 1935. 386 с.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
3. *Паламодов В. П.* Об устойчивости равновесия в потенциальном поле.— Функциональный анализ и его приложения, 1977, т. 11, вып. 4, с. 42—55.
4. *Аппель П.* Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. М.— Л.: ОНТИ, Глав. ред. общетехн. лит-ры, 1936. 375 с.
5. *Salvadori L.* Sull'estensione ai sistemi dissipativi del criterio di stabilità del Routh.— Ricerche Mat., 1968, v. 15, No 2.
6. *Souček J.*, *Souček V.* Morse—Sard theorem for real—analytic functions.— Comment. Math. Univ. Carolinae, 1973, v. 13, No 1. p. 45—51.


УДК 531.35

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И БИФУРКАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА

**Осепашвили В. З., Суликашвили Р. С.**

На основе теоремы Рауса—Ляпунова [1] и ее обращения [2] исследуется устойчивость и бифуркация стационарных движений тяжелого гиростата со свободно вращающимся ротором.

Уравнения движения тяжелого гиростата со свободно вращающимся ротором с одной неподвижной точкой допускают следующие первые интегралы:

$$U=\frac{1}{2}\Big[\sum_{(1\,2\,3)}(J_1\omega_1^2+2I\varphi^{\cdot}\omega_1\alpha_1+2\gamma_1e_1)+I\varphi^{\cdot 2}\Big]=\mathrm{const} \tag{1}$$

$$U_1=\sum_{(1\,2\,3)}(J_1\omega_1+I\varphi^{\cdot}\alpha_1)\gamma_1=k=\mathrm{const}$$

$$U_2=\varphi^{\cdot}+\sum_{(1\,2\,3)}\omega_1\alpha_1=\Omega=\mathrm{const}$$

$$U_3=\sum_{(1\,2\,3)}\gamma_1^2=1$$

Здесь $\omega_i$ — проекции вектора абсолютной угловой скорости гиростата на его главные оси инерции $x_i$, $J_i$ — главные моменты инерции гиростата, $\alpha_i$— косинусы углов, образуемых осью ротора с осями $x_i$, $I$ — момент инерции ротора относительно его оси вращения, $\varphi$ — угол поворота ротора, $\gamma_i$ — косинусы углов, образуемых восходящей вертикалью с осями $x_i$, $e_i$ — постоянные, пропорциональные проекциям на оси $x_i$ вектора, проведенного из неподвижной точки $O$ в центр масс тела $C$. Знак суммирования с символом (123) означает, что слагаемые получаются из написанных круговой перестановкой индексов 1,2,3.

Исследуем стационарные движения рассматриваемой механической системы, их устойчивость и бифуркацию.

Введем в расмотрение функцию

$$W=U-\omega(U_1-k)+1/2\lambda\omega^2(U_3-1)-I_\mu(U_2-\Omega)$$

где $\omega$, $\lambda$, $\mu$ — неопределенные множители Лагранжа.

Согласно теореме Рауса—Ляпунова для определения стационарных движений системы имеем уравнения

$$\partial W/\partial\omega_1=J_1\omega_1+g_1-\omega J_1\gamma_1-I\mu\alpha_1=0 \qquad (1\ 2\ 3) \tag{2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial\varphi^{\cdot}}=\sum_{(1\,2\,3)}I\omega_1\alpha_1+I\varphi^{\cdot}-\omega\sum_{(1\,2\,3)}I\alpha_1\gamma_1-I\mu=0$$

$$\frac{\partial W}{\partial\gamma_1}=e_1-\omega(J_1\omega_1+I\varphi^{\cdot}\alpha_1)+\lambda\omega^2\gamma_1=0 \qquad (1\,2\,3)$$

где $g_i = I\varphi^{\cdot}\alpha_i$ — проекции на оси $x_i$ вектора гиростатического момента.

Из уравнений (2) находим

$$\omega_1 = \omega\gamma_1, \quad \gamma_1 = \frac{e_1 - \omega g_1}{\omega^2 (J_1 - \lambda)} \quad (1\ 2\ 3), \quad \varphi^{\cdot} = \mu \tag{3}$$

Подставляя эти значения в интегралы $U_1 = k$, $U_2 = \Omega$ и $U_3 = 1$, получаем следующие соотношения:

$$F(\omega, \lambda, \mu) = \omega^4 - \sum_{(1\,2\,3)} \frac{(e_1 - \omega g_1)^2}{(J_1 - \lambda)^2} = 0 \tag{4}$$

$$\Omega = \mu \left[1 - I \sum_{(1\,2\,3)} \frac{\alpha_1^2}{J_1 - \lambda}\right] + \sum_{(1\,2\,3)} \frac{e_1\alpha_1}{J_1 - \lambda}$$

$$k = \frac{1}{\omega^3}\left[\sum_{(1\,2\,3)} \frac{J_1 e_1^2}{(J_1 - \lambda)^2} - I\mu\omega \sum_{(1\,2\,3)} \frac{(J_1 + \lambda) e_1\alpha_1}{(J_1 - \lambda)^2} + \lambda I^2\mu^2\omega^2 \sum_{(1\,2\,3)} \frac{\alpha_1^2}{(J_1 - \lambda)^2}\right]$$

Из (4) можно найти $k$, $\omega$, $\mu$ как функции от $\lambda$ и $\Omega$. Из соотношений (3) и (4) заключаем, что при заданных значениях параметров $I$, $J_i$, $\alpha_i$, $e_i$ ($i = 1, 2, 3$), т. е. для заданной механической системы, значения величин $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, $\varphi^{\cdot}$, $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$, соответствующие стационарным движениям, можно рассматривать как функции двух назависимых параметров $\lambda$ и $\Omega$. Если величина интеграла площадей $k$ задана, то параметры $\lambda$ и $\Omega$ не будут независимыми; связь между ними определяется соотношением $k = k(\lambda, \Omega)$.

Исследуем устойчивость движения (3) по отношению к величинам $\varphi^{\cdot}$, $\omega_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$). В возмущенном движении положим

$$\omega_1 = \omega_1^{\circ} + \xi_1, \gamma_1 = \gamma_1^{\circ} + \eta_1 \ (1\ 2\ 3), \ \varphi^{\cdot} = \varphi^{\cdot\circ} + \zeta$$

Условия устойчивости [3] получим из теоремы Рауса—Ляпунова как достаточные условия знакоопределенности второй вариации

$$\delta^2 W = IP\zeta^2 + \sum_{(1\,2\,3)} [J_1 z_1^2 - (J_1 - \lambda)\,\omega^2\eta_1] \tag{5}$$

$$z_1 = \xi_1 + \frac{I\alpha_1\zeta}{J_1} - \omega\eta_1 \,(1\ 2\ 3); \quad P = 1 - I \sum_{(1\,2\,3)} \frac{\alpha_1^2}{J_1}$$

на линейном многообразии, определяемом уравнениями

$$\delta U_1 = \sum_{(1\,2\,3)} [J_1\gamma_1^{\circ} z_1 + (2J_1\gamma_1^{\circ}\omega + I\mu\alpha_1)\,\eta_1] = 0 \tag{6}$$

$$\delta U_2 = P\zeta + \sum_{(1\,2\,3)} (\alpha_1 z_1 + \omega\alpha_1\eta_1) = 0, \qquad \delta U_3 = \sum_{(1\,2\,3)} \gamma_1^{\circ}\eta_1 = 0$$

Для положительной определенности квадратичной формы (5) при условиях (6) необходимо и достаточно выполнения условий

$$\Delta_9 > 0, \ D = -\Delta_{10} > 0 \tag{7}$$

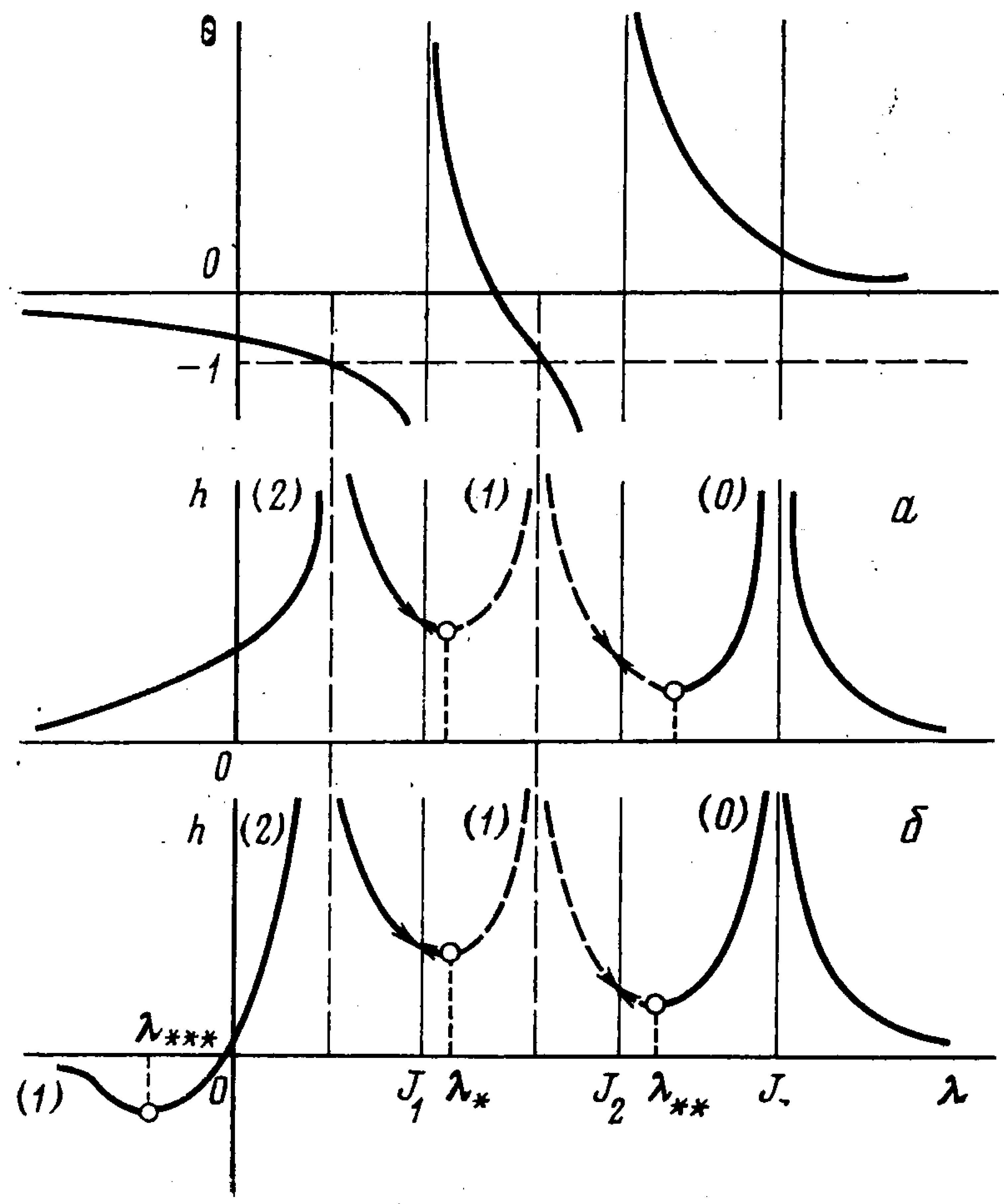
$$\Delta_9 = \frac{J_1J_2J_3I^2P}{\omega^2 (J_1 - \lambda)(J_2 - \lambda)^2} [(J_2 - \lambda)^3 \alpha_1^2 + (J_1 - \lambda)^3 \alpha_2^2 -$$
$$- I(J_1 - J_2)^2 \alpha_1^2\alpha_2^2] [\lambda\omega^2 + (J_3 - \lambda)\,\omega^2\gamma_3^2 +$$
$$+ I\Omega(I - \Omega) - I^2\Omega^2 (J_1 - J_2)^2 \alpha_1^2\alpha_2^2]$$

$$\frac{D}{J_1J_2J_3P\omega^2} = 4I\omega^2 \sum_{(1\,2\,3)} J_1\gamma_1^2 - \sum_{(1\,2\,3)} (J_1 - \lambda)\,\{A(\gamma_3\alpha_2 - \gamma_2\alpha_3)^2 +$$
$$+ B(\gamma_3\alpha_2 - \gamma_2\alpha_3)(J_3 - J_2)\,\gamma_2\gamma_3 + 4\omega^2\gamma_2^2\gamma_3^2 (J_3 - J_2)^2\} +$$
$$+ \omega^2 \left[\sum_{(1\,2\,3)} \gamma_1^2 (J_2 - \lambda)(J_3 - \lambda)\right]\left[\sum_{(1\,2\,3)} J_1\gamma_1^2 - I\left(\sum_{(1\,2\,3)} \gamma_1\alpha_1\right)^2\right]$$

$$A = I\left(I\mu^2 - 2I\mu\omega \sum_{(1\,2\,3)} \gamma_1\alpha_1 + \omega^2 \sum_{(1\,2\,3)} J_1\gamma_1^2\right)$$

$$B = 4I\omega\left(\omega \sum_{(1\,2\,3)} \gamma_1\alpha_1 - \mu\right)$$

Согласно достаточным условиям [2] обратимости теремы Рауса — Ляпунова второе из условий (7) является также и необходимым условием устойчивости движений (3). Последнее утверждение следует также из рассмотрения характеристического полинома для уравнений в вариациях.




Из последнего уравнения (2), если в него подставить выражения для $\gamma_i$ из (3), получим

(8) $$F(\omega, \lambda, \mu) = \omega^4 - \sum_{(1\,2\,3)} \frac{(e_1 - \omega g_1)^2}{(J_1 - \lambda)^2} = 0$$

Рассмотрим частный случай, когда (8) приводится к биквадратному уравнению относительно $\omega$. Для этого необходимо, чтобы имели место равенства

(9) $$e_i g_i = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

При выполнении условий (9) вектор $g = (g_1, g_2, g_3)$ гиростатического момента и вектор $e = (e_1, e_2, e_3)$, проведенный из неподвижной точки $O$ гиростата в его центр масс, ортогональны и лежат в главных плоскостях эллипсоида инерции гиростата для точки $O$. Для определенности будем предполагать, что

$$e_1 = e_2 = 0, \quad e_3 \neq 0$$

Тогда из уравнения (8) получаем выражение

$$\omega^2 = \mu^2/2[R(\lambda) + Q(\lambda)]$$

$$\mu = \frac{\Omega}{1 - \Theta(\lambda)}, \quad \Theta(\lambda) = I \sum_{(1\,2)} \frac{\alpha_1^2}{\lambda - J_1}$$

$$R(\lambda) = I^2 \sum_{(1\,2)} \frac{\alpha_1^2}{(J_1 - \lambda)^2}, \quad Q(\lambda) = \left[R^2(\lambda) + \frac{4e_3^2}{\mu^4 (J_3 - \lambda)^2}\right]^{1/2}$$

Для параметра $k$ из (5) получаем в данном случае выражение

$$k = \frac{1}{\omega^3}\left[\frac{J_3 e_3^3}{(J_3 - \lambda)^2} + I^2\mu^2\omega^2\lambda \sum_{(1\,2)} \frac{\alpha_1^2}{(J_1 - \lambda)^2}\right]$$

Выражение для $D$ приводится к виду

(10) $$D = -\Delta = \omega J_1 J_2 J_3 P \sigma(\lambda)\,[1 + \Theta(\lambda)]\,Q(\lambda)\,\frac{dk}{d\lambda}$$

$$(\sigma(\lambda) = (J_1 - \lambda)(J_2 - \lambda)(J_3 - \lambda))$$

Формула (10) позволяет связать исследование условия устойчивости $D > 0$ с анализом функции $k = k(\lambda, \Omega)$.

Рассмотрим случай

(11) $$(J_2 - J_3)(J_3 - J_1)(J_1 - J_2)\,\alpha_1\alpha_2 \neq 0 \quad (J_1 < J_2 < J_3)$$

и исследуем распределение устойчивых и неустойчивых движений (3) на поверхности $k = k(\lambda, \Omega)$. Для этого рассмотрим функцию $\Theta(\lambda)$ и некоторое сечение поверхности $k = k(\lambda, \Omega)$ плоскостью $\Omega = \Omega_0 \neq 0$. Корни уравнения $\Theta(\lambda) = -1$ вещественны и равны $\lambda = \lambda_1^*, \lambda_2^*$; при этом $\lambda_1^* < J_1 < \lambda_2^* < J_2 < J_3$. Отметим, что значения $\lambda_i^*$ ($i = 1, 2$) не зависят от параметра $\Omega$.

На фигуре показан вид одной ветви линии пересечения поверхности $k = k(\lambda, \Omega)$ с плоскостью $\Omega = \Omega_0 \neq 0$ (другая ветвь получается из первой симметричным отображением относительно оси абсцисс) для случаев, когда а) выполняются условия (4) и $J_3 | e_3 | > I^2\Omega^2$, а уравнение $dk/d\lambda = 0$ имеет два вещественных корня $\lambda = \lambda_*, \lambda_{**}$ $(J_1 < \lambda_* < J_2 < \lambda_{**} < J_3)$ и б) выполняются условия (4) и $J_3 | e_3 | \cdot \cdot I^2\Omega^2$, а уравнение $dk/d\lambda = 0$ имеет три вещественных корня $\lambda = \lambda_*, \lambda_{**}, \lambda_{***} \cdot \cdot (\lambda_{***} < J_1 < \lambda_* < J_2 < \lambda_{**} < \tau_3)$

Заметим, что сечение поверхности $\omega = \omega(\lambda, \Omega$ плоскостью $\Omega = \Omega_0 \neq 0$ имеет вид, аналогичный указанному на фиг., *а*.

Пусть $\lambda > J_3$, тогда $1 + \Theta(\lambda) > 0$, $\sigma(\lambda) < 0$, $dk/d\lambda < 0$ (фигура), и в силу (10) имеем $D > 0$. Следовательно, для значений $\lambda > J_3$ движение (3) устойчиво.

Аналогично, если $\lambda_{**} < \lambda < J_3$, $J_1 < \lambda < \lambda_*$, $\lambda_1^* < \lambda < J_1$ или $\lambda < \lambda_1^*$, то $D > 0$. Если $J_2 < \lambda < \lambda_{**}$ или $\lambda_2^* < \lambda < J_2$, то $D < 0$.

Точно так же можно установить знак величины $D$ в случае, когда выполняются условия (11) и $J_3 | e_3 | < I^2\Omega^2$. На фигуре цифры (0), (1), (2) указывают степень неустойчивости движений (3), а значениям $\lambda = \lambda_*, \lambda_{**}$ или $\lambda = \lambda_*, \lambda_{**}, \lambda_{***}$ соответствуют точки бифуркации, в которых происходит смена устойчивости движений (3).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 144 с.
2. *Рубановский В. Н.* О бифуркации и устойчивости стационарных движений систем с известными первыми интегралами.— В кн.: Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. Вып. 1. М.: ВЦ АН СССР, 1975, с. 121.
3. *Рубановский В. Н., Степанов С. Я.* О теореме Рауса и методе Четаева построения функция Ляпунова из интегралов уравнений движения.— ПММ, 1969, т. 33, вып. 5, с. 904—912.

Тбилиси

Поступила в редакцию
1.XII.1980

Технический редактор *В. М. Пахомова*

Сдано в набор 25.03.81 Подписано к печати 15.05.81 Т-08464 Формат бумаги 70×108 1/16
Высокая печать Усл. печ. л. 15,4+1 Вкл. Усл. кр.-отт. 41,7 тыс. Уч.-изд. л. 14,2 Бум. л. 5,5
Тираж 2661 экз. Зак. 293

Издательство «Наука». 103717, ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука». 121099, Москва, Шубинский пер., 10