ЛИТЕРАТУРА

1. *Емельянова И. С., Фуфаев Н. А.* Об особенностях изучения состояний равновесия неголономной системы.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 6, с. 19.
2. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
3. *Илиев Ил.* Геометрично разгмждане на метода на кинематическите характеристики. — Научн. тр. Высш. пед. ин-та, 1969, т. 7, кн. 1, с. 29.
4. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения неголономных систем.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 1, с. 260.
5. *Николенко И. В.* О влиянии неголономных связей на характер равновесия системы.— Прикл. механика, 1965, т. 1, вып. 10, с. 65.

Пловдив

Поступила в редакцию 5.V.1980

УДК 532.36

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ СИЛ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

Козлов В. В.

В заметке изучается влияние диссипативных сил на устойчивость равновесий натуральных механических систем. Доказано, что если в положении равновесия аналитическая потенциальная энергия не имеет локального минимума, то после добавления сколь угодно малых диссипативных сил это равновесие станет неустойчивым.

1. Гипотеза о неустойчивости. Рассмотрим натуральную механическую систему с n степенями свободы; ее обобщенные координаты обозначим $(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x}$. Пусть $K(\mathbf{x}^\cdot, \mathbf{x}) = \Sigma a_{ij}(\mathbf{x}) x_i^\cdot x_j^\cdot$ — кинетическая, а $\Pi(x_1, \ldots, x_n)$ — потенциальная энергия этой системы. Критические точки функции $\Pi(\mathbf{x})$ и только они являются положениями равновесия. Всюду ниже $\mathbf{x} = 0$ — критическая точка функции $\Pi(\mathbf{x})$ и $\Pi(0) = 0$. Если в положении равновесия потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то равновесие устойчиво (теорема Лагранжа). Есть предположение, что когда система аналитична (т. е. функция $a_{ij}(\mathbf{x})$ и $\Pi(\mathbf{x})$ аналитические) и в положении равновесия потенциальная энергия не имеет локального минимума, то соответствующее состояние равновесия неустойчиво. По-видимому, аналогичное утверждение справедливо и для бесконечно дифференцируемого случая, однако, как показывает известный пример Пенлеве — Уинтнера

$$K = x^{\cdot 2}/2, \quad \Pi(x) = \exp x^{-2} \cos x^{-1} \quad (x \neq 0, \ \Pi(0) = 0)$$

нужно дополнительно требовать изолированность положения равновесия (или, по крайней мере, отсутствие критических точек функции $\Pi(\mathbf{x})$ в области $\{x: \Pi(\mathbf{x}) < 0, \|\mathbf{x}\| < \varepsilon\}$ при малых $\varepsilon > 0$). Доказательство этих предположений представляет сложную задачу, решенную лишь в некоторых частных случаях (см., например, [1—3]).

2. Неустойчивость равновесия при действии сил вязкого трения. Предположим, что на систему действуют еще непотенциальные силы $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^\cdot)$: $\mathbf{R}^n\{\mathbf{x}\} \times \mathbf{R}^n\{\mathbf{x}^\cdot\} \to \mathbf{R}^n$ — некоторые гладкие вектор-функции. Уравнения движения будут иметь тогда следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}^\cdot} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^\cdot), \quad L = K - \Pi \tag{1}$$

Непотенциальные силы F будем называть силами вязкого трения, если $\mathbf{F}(\mathbf{x}, 0) = 0$ и $E^\cdot < 0$ при $\mathbf{x}^\cdot \neq 0$; здесь $E = K + \Pi$ — полная энергия системы (ср. с [4], гл. VIII). Нетрудно проверить, что положения равновесия новой механической системы будут снова совпадать с критическими точками функции $\Pi(\mathbf{x})$. При этом состояния равновесия устойчивые по теореме Лагранжа, останутся устойчивыми и при добавлении сил вязкого трения. В следующем пункте будет доказана

Теорема. Пусть точка $\mathbf{x} = 0$ не является локальным минимумом функции $\Pi(\mathbf{x})$. Состояние равновесия $(\mathbf{x}, \mathbf{x}^\cdot) = (0, 0)$ системы (1) неустойчиво, если выполнено одно из следующих условий:

А) функция $\Pi(x_1, \ldots, x_n)$ разлагается в сходящийся степенной ряд по $x_1, \ldots, x_n$ в окрестности нуля;

Б) функция $\Pi(\mathbf{x})$ бесконечно дифференцируема в окрестности нуля и при некотором $\varepsilon > 0$ в области $\{\mathbf{x}\colon \Pi(\mathbf{x}) < 0, \|\mathbf{x}\| < \varepsilon\}$ нет ее критических точек.

Постановка задачи об устойчивости равновесий при наличии сил вязкого трения и только что сформулированное утверждение восходят к исследованиям Пуанкаре по устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости с учетом диссипации энергии [4]. Эту теорему можно рассматривать как обобщение известных результатов Кельвина [2, 4], Четаева [2], Сальвадори [5] и др. авторов о влиянии диссипативных сил на устойчивость равновесия. Нас интересует не столько сам факт неустойчивости положения равновесия, сколько механизм этого явления, проясняющийся в ходе доказательства теоремы.

3. Доказательство теоремы. *Случай* Б. Рассмотрим движение $\mathbf{x}(t)$ со следующими начальными данными: $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}^\cdot(0) = 0$; $\Pi(\mathbf{x}_0) < 0$ и $\|\mathbf{x}_0\| \leqslant \varepsilon$. Докажем существование некоторого малого числа $\delta > 0$, такого, что если $\|\mathbf{x}^\cdot(t)\| < \delta$, то $K^{\cdot\cdot}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t)) \geqslant c_1 > 0$ (c_1, как и определяемые ниже числа $c_2, \ldots, c_5$, не зависит от времени, но зависит от ε и начальных условий). Для этого воспользуемся преобразованием Лежандра $\mathbf{p} = \partial K/\partial \mathbf{x}^\cdot$ и «каноническими» уравнениями

$$\mathbf{p}^\cdot = -\frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{x}^\cdot = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{p}}$$

Очевидно, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, 0) = 0$. Вычислим сначала

$$K^\cdot = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p}^\cdot + \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}^\cdot = -\frac{\partial K}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial K}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$$

Далее

$$K^{\cdot\cdot} = \left\langle \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{p}^2} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle + \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{p})$$

где $\langle , \rangle$ — обычное скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$, а гладкая функция $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ обращается в нуль при $\mathbf{p} = 0$. Поскольку $E^\cdot(\mathbf{x}, \mathbf{x}^\cdot) \leqslant 0$ и $E(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0^\cdot) = \Pi(\mathbf{x}_0) < 0$, то траектория движения $\mathbf{x}(t)$ при $t \geqslant 0$, лежит в области $U = \{\mathbf{x}\colon \Pi(\mathbf{x}) \leqslant \Pi(\mathbf{x}_0) < 0\}$. В этой области при $\|\mathbf{x}\| \leqslant \varepsilon$ нет критических точек функции $\Pi(\mathbf{x})$, метрика $K(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ невырождена, следовательно, при малых $\delta > 0$ из неравенства $\|\mathbf{x}^\cdot\| < \delta$ будет следовать оценка $K^{\cdot\cdot} \geqslant c_1 > 0$.

Так как $E^\cdot = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}^\cdot) = 0$ только при $\mathbf{x}^\cdot = 0$, а для остальных значений скорости $f < 0$, то при $\mathbf{x} \in U \cap \{\|\mathbf{x}\| < \varepsilon\}$ и $\delta/2 \leqslant \|\mathbf{x}^\cdot\| \leqslant \varepsilon$ функция $f = E^\cdot \leqslant -c_2$ $(c_2 > 0)$. Докажем, что $E(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}^\cdot(t)) \to -\infty$ при $t \to +\infty$, если $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ и $\|\mathbf{x}^\cdot(t)\| < \varepsilon$. Это противоречие будет доказывать неустойчивость состояния равновесия $(\mathbf{x}, \mathbf{x}^\cdot) = (0, 0)$.

Действительно, при $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ и $\|\mathbf{x}^\cdot(t)\| < \varepsilon$ функция $|K^\cdot(t)| \leqslant c_3$ $(c_3 > 0)$. Если в некоторый момент времени $\|\mathbf{x}^\cdot\| < \delta/2$, то за конечный отрезок времени (в силу оценок $|K^\cdot| \leqslant c_3$, $K^{\cdot\cdot} \geqslant c_1$) величина $\|\mathbf{x}^\cdot\|$ станет не меньше δ. Причем отрезок времени Δ, когда $\|\mathbf{x}^\cdot\|$ увеличивается от $\delta/2$ до δ, допускает оценку $\Delta \geqslant c_4 > 0$. В течение этого времени $E^\cdot \leqslant -c_2 < 0$ и, следовательно, функция E уменьшится по крайней мере на $c_5 = c_2 c_4 > 0$. Таким образом, если существует последовательность $\{t_k\}$, $t_k \to \infty$ $(k \to \infty)$, такая, что $\|\mathbf{x}^\cdot(t_k)\| < \delta/2$, то, очевидно, $E(t) \to -\infty$ при $t \to \infty$. Если же, начиная с некоторого момента времени, $\|\mathbf{x}^\cdot(t)\| \geqslant \delta/2$, то снова $E(t) \to -\infty$ при $t \to \infty$.

Случай А выводится из случая Б, поскольку при достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует лишь нулевое критическое значение аналитической функции $\Pi : \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| < \varepsilon\} \to \mathbf{R}$ (см. [6]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.— Л., ОНТИ, Глав. ред. общетехн. лит-ры, 1935. 386 с.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
3. *Паламодов В. П.* Об устойчивости равновесия в потенциальном поле.— Функциональный анализ и его приложения, 1977, т. 11, вып. 4, с. 42—55.
4. *Аппель П.* Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. М.— Л.: ОНТИ, Глав. ред. общетехн. лит-ры, 1936. 375 с.
5. *Salvadori L.* Sull'estensione ai sistemi dissipativi del criterio di stabilità del Routh.— Ricerche Mat., 1968, v. 15, No 2.
6. *Souček J.*, *Souček V.* Morse—Sard theorem for real—analytic functions.— Comment. Math. Univ. Carolinae, 1973, v. 13, No 1. p. 45—51.

УДК 531.35

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И БИФУРКАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА

Осепашвили В. З., Суликашвили Р. С.

На основе теоремы Рауса—Ляпунова [1] и ее обращения [2] исследуется устойчивость и бифуркация стационарных движений тяжелого гиростата со свободно вращающимся ротором.

Уравнения движения тяжелого гиростата со свободно вращающимся ротором с одной неподвижной точкой допускают следующие первые интегралы:

$$U=\frac{1}{2}\Big[\sum_{(1\,2\,3)}(J_1\omega_1^2+2I\varphi^{\cdot}\omega_1\alpha_1+2\gamma_1e_1)+I\varphi^{\cdot 2}\Big]=\text{const} \tag{1}$$

$$U_1=\sum_{(1\,2\,3)}(J_1\omega_1+I\varphi^{\cdot}\alpha_1)\gamma_1=k=\text{const}$$

$$U_2=\varphi^{\cdot}+\sum_{(1\,2\,3)}\omega_1\alpha_1=\Omega=\text{const}$$

$$U_3=\sum_{(1\,2\,3)}\gamma_1^2=1$$

Здесь ω_i — проекции вектора абсолютной угловой скорости гиростата на его главные оси инерции x_i, J_i — главные моменты инерции гиростата, α_i— косинусы углов, образуемых осью ротора с осями x_i, I — момент инерции ротора относительно его оси вращения, φ — угол поворота ротора, γ_i — косинусы углов, образуемых восходящей вертикалью с осями x_i, e_i — постоянные, пропорциональные проекциям на оси x_i вектора, проведенного из неподвижной точки O в центр масс тела C. Знак суммирования с символом (123) означает, что слагаемые получаются из написанных круговой перестановкой индексов 1,2,3.

Исследуем стационарные движения рассматриваемой механической системы, их устойчивость и бифуркацию.

Введем в расмотрение функцию

$$W=U-\omega(U_1-k)+1/2\lambda\omega^2(U_3-1)-I_\mu(U_2-\Omega)$$

где ω, λ, μ — неопределенные множители Лагранжа.

Согласно теореме Рауса—Ляпунова для определения стационарных движений системы имеем уравнения

$$\partial W/\partial\omega_1=J_1\omega_1+g_1-\omega J_1\gamma_1-I\mu\alpha_1=0 \qquad (1\;2\;3) \tag{2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial\varphi^{\cdot}}=\sum_{(1\,2\,3)}I\omega_1\alpha_1+I\varphi^{\cdot}-\omega\sum_{(1\,2\,3)}I\alpha_1\gamma_1-I\mu=0$$

$$\frac{\partial W}{\partial\gamma_1}=e_1-\omega(J_1\omega_1+I\varphi^{\cdot}\alpha_1)+\lambda\omega^2\gamma_1=0 \qquad (1\,2\,3)$$