УДК 531.31

О ДВУХ ПОДХОДАХ К ИССЛЕДОВАНИЮ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ НЕГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Илиев Ил., Русинов Ив.

Проводится сравнение двух подходов к исследованию равновесия неголономной механической системы, в первом из которых используются уравнения Лагранжа с неопределенными множителями, а во втором — уравнения Чаплыгина или Воронца. Как показано в [1], применение уравнений Чаплыгина к его системам не дает возможности находить равновесные состояния второго рода. Использование уравнения Воронца не всегда приводит к решению той же задачи. В настоящей статье доказано, что при использовании уравнений (4), (2) всегда можно выбрать такую систему допустимых векторов (9), которая позволит определить все равновесные состояния второго рода. Различие в результатах объясняется тем, что уравнения (6), определяющие равновесные состояния, не инвариантны при замене системы допустимых векторов.

Получены уравнения многообразия равновесных состояний (14), инвариантных при замене допустимых векторов.

Один из подходов при изучении положения равновесия неголономной механической системы, подчиненной линейным неголономным связям, основывается на уравнениях движения с неопределенными множителями Лагранжа [1, 2]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^{\varkappa}} - \frac{\partial T}{\partial q^{\varkappa}} = Q_{\varkappa} - \frac{\partial F}{\partial \dot q^{\varkappa}} + \lambda_p \omega_{\varkappa}^{p} \tag{1}$$

$$\omega_{\varkappa}^{p} \dot q^{\varkappa} = 0 \tag{2}$$

Везде индексы λ, μ, ν, θ, $\varkappa$ принимают значения от 1 до n; p, q, r — от $k+1$ до n и a, b, c — от 1 до k. Кинетическая энергия $T = {}^1/_2 g_{\lambda\mu} \dot q^{\lambda} \dot q^{\mu}$ — квадратичная форма, а диссипативная функция $F(q, \dot q)$ предполагается полуопределенной квадратичной формой обобщенных скоростей. Состояния равновесия получаются из соотношений

$$Q_{\varkappa}(q, 0) + \lambda_p \omega_{\varkappa}^{p}(q) = 0 \tag{3}$$

Обозначим через $\alpha_a^{\varkappa}$ координаты допустимых векторов [3]. Введем величины $G_{ab} = g_{\lambda\mu}\alpha_a^{\lambda}\alpha_b^{\mu}$, $G^{pq} = g^{\lambda\mu}\omega_{\lambda}^{p}\omega_{\mu}^{q}$, с помощью которых вычислим $\alpha_p^{\varkappa} = g^{\varkappa\nu}G_{pr}\omega_{\nu}^{r}$ и $\omega_{\varkappa}^{a} = g_{\varkappa\theta}G^{ab}\alpha_b^{\theta}$.

Таким образом, система (1) эквивалентна следующим системам:

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^{\varkappa}} - \frac{\partial T}{\partial q^{\varkappa}} - Q_{\varkappa} + \frac{\partial F}{\partial \dot q^{\varkappa}}\right)\alpha_a^{\varkappa} = 0 \tag{4}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^{\varkappa}} - \frac{\partial T}{\partial q^{\varkappa}} - Q_{\varkappa} + \frac{\partial F}{\partial \dot q^{\varkappa}}\right)\alpha_p^{\varkappa} = \lambda_p \tag{5}$$

При составлении характеристического уравнения по указанной методике (5) можно и не рассматривать. Действительно, в определителе характеристического уравнения каждому из уравнений (5) соответствует столбец, в котором один из элементов единица, а все остальные — нули. Вычеркивание столбца и строки, в которых находится единица, ведет к исключению соответствующего уравнения.

Уравнения (4) вместе с (2) образуют систему дифференциальных уравнений в допустимых векторах [3].

Вторым подходом к исследованию положений равновесия неголономной механической системы является применение систем (2), (4) [4, 5]. Преимуществом этого подхода является уменьшение числа уравнений. В этом случае условия равновесия записываются в следующем виде:

$$Q_{\varkappa}\alpha_a^{\varkappa} = 0 \tag{6}$$

Уравнения Воронца получаются из (4), (2) при следующем выборе системы допустимых векторов:

$$\begin{array}{l}\alpha_1\,(1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ -a_1^{k+1},\ -a_1^{k+2},\ \ldots,\ -a_1^{n})\\ \alpha_2\,(0,\ 1,\ \ldots,\ 0,\ -a_2^{k+1},\ -a_2^{k+2},\ \ldots,\ -a_2^{n})\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_k\,(0,\ 0,\ \ldots,\ 1,\ -a_k^{k+1},\ -a_k^{k+2},\ \ldots,\ -a_k^{n})\end{array}$$

где коэффициенты $a_\lambda{}^p$ находятся из выражений

$$q^{\cdot p} = a_1{}^p q^{\cdot 1} + a_2{}^p q^{\cdot 2} + \ldots + a_k{}^p q^{\cdot k}$$

Уравнения Чаплыгина являются частным случаем уравнений Воронца, когда выражения T, $Q_\varkappa = \partial u/\partial q_\varkappa$, $a_b{}^p$, F не зависят от переменных q^p. Каждая механическая система имеет бесконечное множество систем допустимых векторов, удовлетворяющих условию $\omega_\varkappa{}^p \alpha_a{}^\varkappa = 0$. Переход от одной системы $\alpha_a{}^\varkappa$ к другой $\alpha_{a'}{}^\varkappa$ осуществляется с помощью формул

$$\alpha_{a'}{}^\varkappa = \gamma_{a'}{}^a \alpha_u{}^\varkappa \quad (\det \| \gamma_{a'}{}^a \| \neq 0)$$

Однако, как отмечено в [1], применение уравнений Чаплыгина, а иногда и Воронца при исследовании равновесия неголономной механической системы не дает возможности учесть положения равновесия системы второго рода. Покажем, как можно это учесть при подходящем выборе допустимых векторов.

Предположим, что $\omega_\varkappa{}^p$ — голоморфные функции переменных $q^\varkappa$. Всегда можно сделать такими же и $\alpha_a{}^\varkappa$. Учитывая независимость уравнения (2), их решения относительно $q^{\cdot k+1}, \ldots, q^{\cdot n}$ можно представить следующим образом

$$\varepsilon_a{}^p q^{\cdot a} + \delta_r{}^p \Delta q^{\cdot r} = 0 \tag{7}$$

$$\Delta = \det \| \omega_q{}^p \| \neq 0 \tag{8}$$

Условие (8) выполняется всегда при подходящей перестановке индексов обобщенных координат. Как видно из способа получения $\varepsilon_a{}^p$ и Δ, они являются голоморфными функциями обобщенных координат. В качестве допустимых векторов с голоморфными координатами можно выбрать

$$\alpha_a\,(\Delta\delta_a{}^1,\ \Delta\delta_a{}^2, \ldots, \Delta\delta_a{}^k,\ -\varepsilon_a^{k+1},\ -\varepsilon_a^{k+2}, \ldots, \varepsilon_a{}^n) \tag{9}$$

При неподходящем выборе допустимых векторов, как указано в [1], можно и не достичь учета состояния равновесия второго рода. Проанализируем причины этого. Запишем уравнения (1) в следующем виде:

$$q^{\cdot\cdot\rho} + \Gamma^\rho_{\lambda\mu} q^{\cdot\lambda} q^{\cdot\mu} = Q_\varkappa g^{\varkappa\rho} - \frac{\partial F}{\partial q^{\cdot\varkappa}} g^{\varkappa\rho} + \lambda p \omega_\varkappa{}^p g^{\varkappa\rho} \tag{10}$$

Дифференцируем уравнения связей (2) по времени. Используя уравнения (10), получим

$$\lambda_p G^{pq} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu} \omega_\rho{}^q q^{\cdot\lambda} q^{\cdot\mu} - Q_\varkappa g^{\varkappa\rho} \omega_\rho{}^q - \frac{\partial \omega_\rho{}^q}{\partial q^\varkappa} q^{\cdot\varkappa} q^{\cdot\rho} + \frac{\partial F}{\partial q^{\cdot\varkappa}} g^{\varkappa\rho} \omega_\rho{}^q \tag{11}$$

Таким образом, множители Лагранжа выражаются в виде функций обобщенных координат $q^\varkappa$ и скоростей $q^{\cdot\varkappa}$. В состоянии равновесия

$$\lambda_p = -G_{pq} Q_\varkappa g^{\varkappa\rho} \omega_\rho{}^q \tag{12}$$

Подставляя соотношения (12) и (3) и используя равенство

$$g^{\lambda\mu} = G^{ab} \alpha_a{}^\lambda \alpha_b{}^\mu + G^{pq} \alpha_p{}^\lambda \alpha_q{}^\mu \tag{13}$$

из (6) получим

$$Q_\varkappa \alpha_a{}^\varkappa \omega_\rho{}^a = 0 \tag{14}$$

Формула (14) дает уравнения, определяющие многообразия состояний равновесия системы. Каждое решение уравнений (6) является решением (14). Обратное не всегда выполняется. Замена системы допустимых векторов $\alpha_{a'} = \gamma_{a'}{}^a\alpha_a$ не меняет условий (14), но приводит условия (6) к виду

(15) $$Q_\varkappa \alpha_a{}^\varkappa \gamma_{a'}{}^a = 0$$

Для систем Чаплыгина выполняются условия $Q_p = 0$ и $\alpha_a{}^b = \delta_a{}^b$. В этом случае условие (6) имеет вид $Q_a = 0$ и позволяет определить только равновесные состояния первого рода [1]. Все равновесные состояния можно найти с помощью формулы (14).

Соотношения (6) не инвариантны относительно замены допустимых векторов. Вывод формулы (14) сделан при условии, что уравнения системы (2) взаимно независимы и $\det \| q_{\lambda\mu} \| \neq 0$. Точки, в которых эти основные требования нарушаются, будем называть особыми точками многообразия состояний равновесия.

Проиллюстрируем изложенное задачей о равновесии саней Чаплыгина на наклонной плоскости [2]. Составим функцию Лагранжа

$$L = {}^1/_2 m[(x^{\cdot} + l\varphi^{\cdot}\cos\varphi)^2 + (y^{\cdot} + l\varphi^{\cdot}\sin\varphi)^2 + k^2\varphi^{\cdot 2}] -$$
$$- \text{mg}\sin\alpha\,(y - l\cos\varphi)$$

и введем диссипативную функцию

$$F = {}^1/_2 m[h(x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}) + h_1\varphi^{\cdot 2}]$$

Неголономная связь выражается уравнением $y^{\cdot} = x^{\cdot}\,\mathrm{tg}\,\varphi$.

Обозначим $q^1 = \varphi$, $q^2 = x$, $q^3 = y$. Введем допустимые векторы

(16) $$\alpha_1\ (1, 0, 0),\ \alpha_2\ (0, \cos\varphi, \sin\varphi),\ \omega^3\ (0, -\sin\varphi, \cos\varphi)$$

Условия равновесия по (6) получаются в виде

(17) $$\frac{\partial u}{\partial\varphi} = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi = 0$$

Используя соотношение

$$G^{11} = \frac{1}{mk^2},\quad G^{22} = \frac{l^2 + k^2}{mk^2},\quad G^{12} = G^{21} = -\frac{l}{mk^2}$$

из уравнений (14) находим

(18) $$\frac{\partial u}{\partial\varphi} = 0\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\right)\cos\varphi = 0$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\right)\sin\varphi = 0$$

Решения уравнений (17) и (18) дают одно и то же многообразие равновесных состояний, найденное в [2]. При выборе допустимых векторов Чаплыгина

(19) $$\alpha_1\ (1, 0, 0),\ \alpha_2\ (0, \mathrm{ctg}\,\varphi, 1)$$

по формуле (6) получаются соотношения

(20) $$\partial u/\partial\varphi = 0, \partial u/\partial y = 0$$

Оказывается, что не существует значений переменных x, y и φ, удовлетворяющих соотношениям (20). Вычисляя

$$G^{11} = \frac{1}{mk^2},\quad G^{22} = \frac{l^2 + k^2}{mk^2}\sin^2\varphi,\quad G^{12} = G^{21} = -\frac{l\sin\varphi}{mk^2}$$

и подставляя в (14), устанавливаем, что снова получаются уравнения (18). Это естественно в силу установленной инвариантности (14). Переход от первого ко второму выбору допустимых векторов определяется системой

$$\gamma^1_{1'} = 1,\ \gamma^2_{1'} = 0,\ \gamma^1_{2'} = 0,\ \gamma^2_{2'} = 1/\sin\varphi$$

Результаты, полученные по формуле (6) при допустимых векторах (16) и (19), не совпадают из-за того, что коэффициент $\gamma^2_{2'} = 1/\sin\varphi$ теряет смысл в многообразии состояний равновесия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Емельянова И. С., Фуфаев Н. А.* Об особенностях изучения состояний равновесия неголономной системы.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 6, с. 19.
2. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
3. *Илиев Ил.* Геометрично разгмждане на метода на кинематическите характеристики. — Научн. тр. Высш. пед. ин-та, 1969, т. 7, кн. 1, с. 29.
4. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения неголономных систем.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 1, с. 260.
5. *Николенко И. В.* О влиянии неголономных связей на характер равновесия системы.— Прикл. механика, 1965, т. 1, вып. 10, с. 65.

Пловдив

Поступила в редакцию 5.V.1980

УДК 532.36

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ СИЛ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

Козлов В. В.

В заметке изучается влияние диссипативных сил на устойчивость равновесий натуральных механических систем. Доказано, что если в положении равновесия аналитическая потенциальная энергия не имеет локального минимума, то после добавления сколь угодно малых диссипативных сил это равновесие станет неустойчивым.

1. Гипотеза о неустойчивости. Рассмотрим натуральную механическую систему с n степенями свободы; ее обобщенные координаты обозначим $(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x}$. Пусть $K(\mathbf{x}^\cdot, \mathbf{x}) = \Sigma a_{ij}(\mathbf{x}) x_i^\cdot x_j^\cdot$ — кинетическая, а $\Pi(x_1, \ldots, x_n)$ — потенциальная энергия этой системы. Критические точки функции $\Pi(\mathbf{x})$ и только они являются положениями равновесия. Всюду ниже $\mathbf{x} = 0$ — критическая точка функции $\Pi(\mathbf{x})$ и $\Pi(0) = 0$. Если в положении равновесия потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то равновесие устойчиво (теорема Лагранжа). Есть предположение, что когда система аналитична (т. е. функция $a_{ij}(\mathbf{x})$ и $\Pi(\mathbf{x})$ аналитические) и в положении равновесия потенциальная энергия не имеет локального минимума, то соответствующее состояние равновесия неустойчиво. По-видимому, аналогичное утверждение справедливо и для бесконечно дифференцируемого случая, однако, как показывает известный пример Пенлеве — Уинтнера

$$K = x^{\cdot 2}/2, \quad \Pi(x) = \exp x^{-2} \cos x^{-1} \quad (x \neq 0, \quad \Pi(0) = 0)$$

нужно дополнительно требовать изолированность положения равновесия (или, по крайней мере, отсутствие критических точек функции $\Pi(\mathbf{x})$ в области $\{x\colon \Pi(\mathbf{x}) < 0, \|\mathbf{x}\| < \varepsilon\}$ при малых $\varepsilon > 0$). Доказательство этих предположений представляет сложную задачу, решенную лишь в некоторых частных случаях (см., например, [1—3]).

2. Неустойчивость равновесия при действии сил вязкого трения. Предположим, что на систему действуют еще непотенциальные силы $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^\cdot)\colon \mathbf{R}^n\{\mathbf{x}\} \times \mathbf{R}^n\{\mathbf{x}^\cdot\} \to \mathbf{R}^n$ — некоторые гладкие вектор-функции. Уравнения движения будут иметь тогда следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}^\cdot} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^\cdot), \quad L = K - \Pi \tag{1}$$

Непотенциальные силы F будем называть силами вязкого трения, если $\mathbf{F}(\mathbf{x}, 0) = 0$ и $E^\cdot < 0$ при $\mathbf{x}^\cdot \neq 0$; здесь $E = K + \Pi$ — полная энергия системы (ср. с [4], гл. VIII). Нетрудно проверить, что положения равновесия новой механической системы будут снова совпадать с критическими точками функции $\Pi(\mathbf{x})$. При этом состояния равновесия