УДК 531.31

САМОПЕРЕСЕЧЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ СЕПАРАТРИС И НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ ИНТЕГРАЛОВ В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ С ПОЛУТОРА СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Зиглин С. Л.

Связь между ветвлением решений (как функций комплексного времени) гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, близкой к интегрируемой, и несуществованием у нее дополнительного первого интеграла изучалась в работах [1, 2]. Было показано [2], что и то, и другое связано с известным явлением расщепления сепаратрис. Ниже устанавливается родственное явление, связывающее ветвление с неинтегрируемостью,— самопересечение комплексных сепаратрис. Для простоты рассматривается случай полутора степеней свободы; случай двух степеней свободы может быть рассмотрен аналогично.

Пусть (M^2, ω^2) — связное двумерное комплексное аналитическое симплектическое многообразие, $N^3 = M^2 \times S_c^1$ — прямое произведение M^2 на комплексную окружность S_c^1 с координатой $t \pmod{2\pi}$ (т. е. комплексную прямую C^1 с отождествленными точками, отличающимися на кратное 2π); $H(x, t, \mu) = H_0(x) + \mu H_1(x, t) + o(\mu)$ $(x \in M)$ — однозначная аналитическая функция на N^3, аналитически зависящая от параметра μ, $|\mu| < \mu_0$.

Рассмотрим в N^3 гамильтонову систему

$$x^{\cdot} = IdH(x; t, \mu), \ t^{\cdot} = 1, \ (x, t) \in N^3 \tag{1}$$

где $dH(x; t, \mu)$ — дифференциал H при фиксированных t, μ. Пусть $x_0 \in M$ — неподвижная гиперболическая точка системы

$$x^{\cdot} = IdH_0(x), \ x \in M \tag{2}$$

т. е. $d_{x_0}H_0 = 0$ и собственные значения $\pm\lambda$ системы (2), линеаризованной в точке x_0, имеют ненулевые вещественные части, $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Тогда при достаточно малых $|\mu|$ система (1) имеет 2π-периодическое решение $x = x_p(t, \mu)$, аналитически зависящее от μ; $x_p(t, 0) = x_0$. Продолжая решения системы (1), асимптотические к $x = x_p(t, \mu)$ при $t \to \infty$, максимально аналитически по $t \in C$ (вообще говоря, неоднозначно), получим двумерную комплексную поверхность $S_\mu \in N^3$, которую будем называть выходящей комплексной сепаратрисой периодического решения $x = x_p(t, \mu)$.

Оказывается комплексная сепаратриса в отличие от вещественной может иметь трансверсальные самопересечения, препятствующие существованию у системы (1) (однозначного) аналитического первого интеграла.

Сформулируем достаточные условия такого самопересечения. Пусть асимптотическое решение $x = x^*(t)$ системы (2), $\lim x^*(t) = x_0$, $t \to -\infty$, аналитически продолжается вдоль (непрерывного) пути $\Gamma : [0, 1] \to C$, $\Gamma(0) = \Gamma(1) \pmod{2\pi} \in R$, причем $x^*(\Gamma(0)) = x^*(\Gamma(1))$. Тогда при достаточно малых $|\mu|$ решение $x = \varphi(t, t_0, \mu)$ системы (1) с начальным условием $\varphi(\Gamma(0) + t_0, t_0, \mu) = x^*(\Gamma(0))$ аналитически продолжается вдоль пути $(\Gamma + t_0) : [0, 1] \to C$, $(\Gamma + t_0)(s) = \Gamma(s) + t_0$. Пусть $h(t_0, \mu) = H_0(\varphi(\Gamma(1) + t_0), (t_0, \mu)) - H_0(x^*(\Gamma(0))) = \mu h^1(t_0) + o(\mu)$ — приращение функции $H_0(\varphi(t, t_0, \mu))$ при изменении t вдоль $\Gamma + t_0$.

Теорема. Если функция h^1 имеет простой нуль, то при достаточно малых $|\mu| \neq 0$ комплексная сепаратриса S_μ имеет трансверсальное самопересечение и система (1) не имеет в N^3 аналитического первого интеграла.

Замечание. Величина $h^1(t_0)$ может быть вычислена по формуле

$$h^1(t_0) = \int\limits_\Gamma \frac{\partial H_1}{\partial t}(x^*(t), t + t_0)\, dt \tag{3}$$

Действительно

$$h(t_0, \mu) = \int\limits_{\Gamma+t_0} \{H_0, H\}(\varphi(t, t_0, \mu), t, \mu)\,dt =$$
$$= \mu \int\limits_{\Gamma+t_0} \{H_0, H_1\}(\varphi(t, t_0, 0), t)\,dt + o(\mu) =$$
$$= \mu \int\limits_{\Gamma} \{H_0, H_1\}(x^*(t), t+t_0)\,dt + o(\mu) =$$
$$= \mu \int\limits_{\Gamma} \left[\frac{\partial H_1}{\partial t}(x^*(t), t+t_0) - \frac{d}{dt} H_1(x^*(t), t+t_0)\right] dt + o(\mu) =$$
$$= \mu \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial H_1}{\partial t}(x^*(t), t+t_0)\,dt + o(\mu)$$

откуда следует (3). Здесь $\{\ ,\ \}$ — скобки Пуассона.

Доказательство теоремы. Пусть $\Pi = \{t \in S_c^1 / |\operatorname{Im} t| < A\}$, $(A > 0)$ — полоса, содержащая простой нуль функции h^1. Согласно теореме Мозера [3], существует аналитическая симплектическая замена переменных, аналитически зависящая от μ

(4) $$x = \Phi(\xi, \eta, t, \mu) = \Phi_0(\xi, \eta) + \mu\Phi_1(\xi, \eta, t) + o(\mu)$$
$$\Phi_0(0, 0) = x_0, \ t \in \Pi, \ |\xi| < \varepsilon, \ |\eta| < \varepsilon, \ |\mu| < \varepsilon \ (\varepsilon < 0)$$

приводящая систему (1) в области $U_\mu = \{(x, t) \in N^3 \mid t \in \Pi, \ x = \Phi(\xi, \eta, t, \mu), \ |\xi| < \varepsilon, \ |\eta| < \varepsilon\}$ к нормальной форме

(5) $$\xi^\cdot = F_\eta, \ \eta^\cdot = -F_\xi, \ F(\xi, \eta, \mu) = G(\omega, \mu) = G_0(\omega) + O(\mu), \ \omega = \xi\eta, \ G_0'(0) = \lambda$$

Система (5) интегрируется

(6) $$\omega = \omega_0, \ \xi = \xi_0 \exp(G_\omega(\omega, \mu)\,t), \ \eta = \eta_0 \exp(-G_\omega(\omega, \mu)\,t)$$

Из (4), (6) получаем, что часть комплексной сепаратрисы S_μ, лежащая в области U_μ, имеет параметрическое уравнение ($|\xi| < \varepsilon$ — параметр)

(7) $$x = \Phi(\xi, 0, t, \mu) \ (t \in \Pi)$$

Будем, не ограничивая общности, считать, что значение $x^*(\Gamma(0))$ достаточно близко к x_0 и представимо в виде $x^*(\Gamma(0)) = \Phi_0(\xi^*, 0)$, $|\xi^*| < \varepsilon$. (Этого можно добиться заменой пути Γ на $\Gamma_1^{-1}\Gamma\Gamma_1$, где $\Gamma_1 : [0, 1] \to R$ — путь, такой, что $\Gamma_1(1) = \Gamma(0)$ и $\Gamma_1(0)$ достаточно мало). Тогда при достаточно малых $|\mu|$ асимптотическое решение $x = x_a(\xi_0, t, \mu) = \Phi(\xi_0 \exp(G_\omega(0, \mu)\,t), 0, t, \mu)$ аналитически продолжается вдоль пути $\Gamma + t_0(\xi_0)$, $t_0(\xi_0) = \lambda^{-1} \ln(\xi^*/\xi_0) - \Gamma(0)$.

Пусть $\bar{x}(\xi_0, \mu) = x_a(\xi_0, \Gamma(1) + t_0(\xi_0), \mu)$. Покажем, что при достаточно малых $|\mu| \neq 0$ кривая (ξ_0 — параметр)

(8) $$x = \bar{x}(\xi_0, \mu), \ t = \bar{t}(\xi_0) = \Gamma(1) + t_0(\xi_0) \ (\bar{t}(\xi_0) \in \Pi)$$

трансверсально пересекает поверхность (7) и, следовательно комплексная сепаратриса S_μ трансверсально самопересекается. Для этого запишем уравнение части поверхности (7) в виде, разрешенном относительно координаты $\psi = H_0(x)$, $\psi = \chi(\xi, t, \mu) = H_0(\Phi(\xi, 0, t, \mu)) = H_0(x_0) + \mu\chi_1(\xi, t) + o(\mu)$ $(t \in \Pi, |\xi - \xi^*| < \delta, \delta > 0)$ а уравнение кривой (8) — в параметрическом виде

$$\xi = \bar{\xi}(\xi_0, \mu) = \xi^* + O(\mu), \ t = \bar{t}(\xi_0)$$
$$\psi = \bar{\psi}(\xi_0, \mu) = \chi(\xi^* + O(\mu), \bar{t}(\xi_0), \mu) + \int\limits_{\Gamma+t_0(\xi_0)} \{H_0, H\}(x_a(t, \xi_0, \mu)\,t, \mu)\,dt =$$
$$= H_0(x_0) + \mu\chi^1(\xi^*, \bar{t}(\xi_0)) + \mu h^1(t_0(\xi_0)) + o(\mu) \quad (\bar{t}(\xi_0) \in \Pi)$$

Для доказательства существования трансверсального пересечения достаточно проверить, что уравнение

$$\bar{\psi}(\xi_0, \mu) - \chi(\bar{\xi}(\xi_0, \mu), \bar{t}(\xi_0), \mu) = \mu h^1(t_0(\xi_0)) + o(\mu) = 0 \quad (t_0(\xi_0) \in \Pi)$$

при достаточно малых $|\mu| \neq 0$ имеет простой корень, а это следует из того, что функция h^1 имеет простой нуль в П.

Несуществование аналитического первого интеграла системы (1) следует из того, что в области U_μ он должен быть аналитической функцией переменной $\omega = \xi\eta$ [2] и в то же время постоянным на кривой (8), трансверсально пересекающей поверхность $\omega = 0$. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим задачу о движении математического маятника, длина которого периодически зависит от времени. Здесь $M^2 = C^1 \times S_c^1$ — прямое произведение комплексной прямой C^1 с координатой x_1 и комплексной окружности S_c^1 с координатой $x_2 \pmod{2\pi}$; $\omega^2 = dx_1 \wedge dx_2$. Гамильтониан имеет вид

$$H(x, t) = {}^1/_2 x_1^2 + a(t) \cos x_2, \quad a(t + 2\pi) = a(t)$$

Пусть $a(t) = 1 + \mu \cos t$, μ — малый параметр. Тогда

$$H_0(x) = {}^1/_2 x_1^2 + \cos x_2, \quad H_1(x, t) = \cos t \cos x_2$$

Система с гамильтонианом H_0 имеет неподвижную гиперболическую точку x_0 (0, 0). Выходящее из нее асимптотическое решение

$$x = x^*(t): x_1 = \frac{2}{\operatorname{ch} t}, \quad \sin x_2 = -2\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}, \quad \cos x_2 = 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 t}$$

однозначно, мероморфно и имеет полюсы $a_k = i(\pi/2 + k\pi)$ (k — целое число).

Пусть $\Gamma: [0, 1] \to C$, $\Gamma(0) = \Gamma(1) \in R$ — замкнутый путь, обходящий полюс $a_0 = \pi i/2$ в положительном направлении. Функция

$$h^1(t_0) = \int_\Gamma \frac{\partial H_1}{\partial t}(x^*(t), t + t_0)\, dt =$$

$$= -\int_\Gamma \sin(t + t_0)\left(1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 t}\right) dt = -4\pi i \cos(\pi i/2 + t_0)$$

имеет простые нули, поэтому по доказанной теореме при достаточно малых $|\mu| \neq 0$ комплексная сепаратриса S_μ имеет трансверсальное самопересечение и система с гамильтонианом H не имеет в $N^3 = M^2 \times S_c^1$ аналитического первого интеграла.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В. В.* Несуществование однозначных интегралов и ветвление решений в динамике твердого тела.— ПММ, 1978, вып. 3, с. 400.
2. *Зиглин С. Л.* Ветвление решений и несуществование дополнительного первого интеграла в задаче о движении несимметричного тяжелого твердого тела относительно неподвижной точки.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 4, с. 786.
3. *Moser J.* The analytic invariants of an area-preserving mapping near a hyperbolic fixed point.— Communs Pure and Appl. Math., 1956, v. 9, No. 4, p. 673.

Москва

Поступила в редакцию 7.VII.1980