

УДК 532.526

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СВОБОДНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Жук В. И., Рыжов О. С.

Рассматривается устойчивость плоскопараллельного пограничного слоя на пластинке по отношению к трехмерным длинноволновым возмущениям. Для описания их развития во времени используются уравнения Прандтля, в которых градиент давления полагается индуцированным взаимодействием внутренних волн с внешним потенциальным течением. Для несжимаемой жидкости указанный подход приводит к результатам, следующим из обычной линейной теории устойчивости при условии, что критический слой нейтральных колебаний прилегает к обтекаемой поверхности. При дозвуковой скорости на бесконечности дисперсионное соотношение для пространственных возмущений сводится к стандартному виду, задающему параметры в нестационарном процессе двумерного свободного взаимодействия.

1. Вязкий подслой. При любой (как дозвуковой, так и сверхзвуковой) скорости на бесконечности свободное взаимодействие пограничного слоя подчиняется в пристеночной области уравнениям Прандтля для несжимаемой жидкости [1—4]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Здесь использована специальная безразмерная система единиц отсчета, в которой t означает время, x , y и z — оси декартовых координат, u , v и w — проекции вектора скорости на названные оси, p — избыточное давление. В классической теории пограничного слоя давление находится заранее по решению внешней задачи обтекания данного тела потоком невязкого газа. Процесс свободного взаимодействия характеризуется тем, что давление относится к числу искомым функций и определяется путем сращивания решения для пристеночного слоя с решением, устанавливающим параметры внешнего потенциального течения. Условия сращивания будут сформулированы в дальнейшем.

Для простоты будем считать, что обтекаемое тело представляет собой плоскую пластинку. Условия прилипания на ее поверхности $y = 0$ гласят

$$(1.2) \quad u = v = w = 0$$

Решение уравнений (1.1) ищем в виде

$$(1.3) \quad \begin{aligned} u &= y - a \frac{df}{dy} \exp(\omega t + kx + lz), & v &= ag \exp(\omega t + kx + lz) \\ w &= -a \frac{dh}{dy} \exp(\omega t + kx + lz), & p &= a \exp(\omega t + kx + lz) \end{aligned}$$

и линеаризуем вытекающие из них соотношения по амплитуде a возмущений. Формулы (1.3) традиционны для теории устойчивости [5, 6], они позволяют перейти от уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям для функций f , g и h . Интегрирование одного из них дает конечную связь

$$g = kf + lh$$

при помощи которой можно исключить g . Две другие функции f и h удовлетворяют уравнениям

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \frac{d^3 f}{dy^3} - (\omega + ky) \frac{df}{dy} + kf + lh + k &= 0 \\ \frac{d^3 h}{dy^3} - (\omega + ky) \frac{dh}{dy} + l &= 0 \end{aligned}$$

Основываясь на идее Сквайра [5, 6], умножим первое из них на k , второе на l и сложим полученные таким образом соотношения. В результате приходим к одному дифференциальному уравнению для новой искомой функции F

$$(1.5) \quad \frac{d^3 F}{dy^3} - (\omega + ky) \frac{dF}{dy} + kF + 0, \quad F = \frac{k}{k^2 + l^2} (kf + lh)$$

Отметим, что точно такому же уравнению удовлетворяет функция f , если параметры свободно взаимодействующего пограничного слоя не зависят от z . На плоскости комплексного переменного Z уравнение (1.5) сводится к уравнению Эйри

$$(1.6) \quad \frac{d^4 F}{dZ^4} - Z \frac{d^2 F}{dZ^2} = 0, \quad Z = \frac{\omega}{k^{3/2}} + k^{1/2} y$$

для $d^2 F/dZ^2$. Чтобы выделить регулярную ветвь трехзначной функции $k^{1/2}$, проведем в плоскости k разрез из начала координат вдоль отрицательной вещественной полуоси до бесконечности. Положим $\arg k^{1/2} = 0$ на положительной вещественной полуоси. Тогда будут справедливы неравенства $-\pi/3 \leq \arg k^{1/2} \leq \pi/3$.

Условия прилипания (1.2) позволяют сформулировать граничные условия для функции F . Именно, при $Z = \omega/k^{3/2}$ имеем $F = dF/dZ = 0$. Исключая решения уравнения (1.6), экспоненциально возрастающие на бесконечности, и удовлетворяя указанным граничным условиям, находим

$$(1.7) \quad F = - \left[\frac{d \text{Ai}(\zeta)}{d\zeta} \right]^{-1} \int_{\zeta}^Z dZ' \int_{\zeta}^{Z'} \text{Ai}(Z'') dZ'', \quad \zeta = \frac{\omega}{k^{3/2}}$$

где $\text{Ai}(Z)$ — функция Эйри. Чтобы установить связь между частотой ω и волновыми числами k и l , обратимся к внешней области течения, в которой влиянием вязкости и теплопроводности можно пренебречь.

2. Потенциальный поток. Здесь избыточное давление удовлетворяет уравнению

$$(2.1) \quad \mp \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y'^2} + |M_\infty^2 - 1|^{-1} \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} = 0$$

в котором отсутствуют производные по времени [3, 4]. Масштабы измерения длин вдоль осей x , z и давления p' во внешней области остаются теми же, что и в вязком подслое, однако масштаб длины для поперечной координаты y' вводится по-иному. Точного [соотношения между масштабами, в которых отсчитываются расстояния по нормали от обтекаемой пластинки в разных областях, в дальнейшем знать не требуется. Как обычно, через M_∞ обозначено число Маха набегающего равномерного потока. Верхний знак перед первым членом в левой части уравнения (2.1) берется при $M_\infty > 1$, нижний — при $M_\infty < 1$.

После решения уравнения (2.1) вертикальная составляющая v' вектора скорости определяется соотношением

$$(2.2) \quad v' = - |M_\infty^2 - 1|^{1/2} \frac{\partial}{\partial y'} \int_{-\infty}^x p'(t, \xi, y', z) d\xi$$

когда возмущения затухают на бесконечности вверх по течению, или эквивалентной ему формулой для периодических по x колебаний.

Зависимость искомых параметров газа от времени и координат, отсчитываемых вдоль поверхности пластинки, в потенциальной области следует сохранить такой же, какая была выбрана для вязкого пристеночного подслоя. Именно

$$p' = aP' \exp(\omega t + kx + lz)$$

После подстановки в (2.1) получим уравнение, решение которого

$$(2.3) \quad P' = \exp(my'), \quad m = i [|M_\infty^2 - 1|^{-1} l^2 \mp k^2]^{1/2}$$

причем под квадратным корнем подразумевается его ветвь с $\text{Re } m < 0$. Последнее требование обеспечивает затухание возмущений при $y' \rightarrow \infty$. Можно, однако, указать зависимость между волновыми числами k и l , когда $\text{Re } m = 0$ для обеих ветвей корня. Такая ситуация в дальнейшем рассматриваться не будет.

Используя формулу (2.2) для поперечной составляющей вектора скорости, окончательно имеем

$$(2.4) \quad p' = a \exp(\omega t + kx + my' + lz)$$

$$v' = -a |M_\infty^2 - 1|^{1/2} \frac{m}{k} \exp(\omega t + kx + my' + lz)$$

Найдем функцию $A(t, x, z)$, от которой зависит величина мгновенного смещения линий тока в основной толще пограничного слоя, отделяющей тонкую пристеночную область от внешнего потенциального течения. Как показано в [1—4],

$$dA/dx = - |M_\infty^2 - 1|^{-1/2} v'(t, x, 0, z)$$

откуда заключаем, что

$$(2.5) \quad A = a \frac{m}{k^2} \exp(\omega t + kx + lz)$$

3. Дисперсионное соотношение. Срастим решение для вязкого подслоя с решением, задающим параметры газа во внешней области. Условия сращивания гласят [1—4]: при $y \rightarrow \infty$

$$(3.1) \quad \begin{aligned} p &\rightarrow p'(t, x, 0, z) \\ u - y &\rightarrow A + \frac{1}{y} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{-\infty}^x d\xi \int_{-\infty}^{\xi} p'(t, \xi', 0, z) d\xi' \\ w &\rightarrow -\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^x p'(t, \xi, 0, z) d\xi \end{aligned}$$

Видно, что сращивание [избыточных давлений в обоих решениях, устанавливаемых формулами (1.3) и (2.4)], происходит автоматически. Обратимся ко второму условию (3.1), пренебрегая вначале поправочным членом в правой части, который затухает как $1/y$ при $y \rightarrow \infty$. На основании равенства (2.5) для функции A находим

$$(3.2) \quad df/dy \rightarrow -m/k^2 \text{ при } y \rightarrow \infty$$

В силу третьего условия (3.1) боковая составляющая вектора скорости $w \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$. Отсюда

$$(3.3) \quad dh/dy \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow \infty$$

Вспоминая определение (1.5) функции F и объединяя предельные соотношения (3.2) и (3.3), заключаем, что

$$(3.4) \quad \frac{dF}{dZ} \rightarrow -\frac{m}{k^{1/2}(k^2 + l^2)} \text{ при } |Z| \rightarrow \infty$$

Как уже отмечалось выше, уравнение для F совпадает с уравнением, описывающим распространение волн в плоскопараллельных течениях. Поэтому решение (1.7) не отличается по своему виду от того, которому подчиняется нестационарный процесс двумерного свободного взаимодействия пограничного слоя. Однако предельное условие (3.4) содержит зависимость как от числа Маха набегающего потока, так и от обоих волновых чисел k, l . Разумеется, желательно преобразовать его таким образом, чтобы оно совпадало с аналогичным условием из теории плоскопараллельного пограничного слоя.

При выводе дисперсионного соотношения ограничимся только дозвуковыми течениями с $M_\infty < 1$. Тогда естественно считать, что волновые числа k, l — чисто мнимые величины, а

$$m = -[|k|^2 + |M_\infty^2 - 1|^{-1}|l|^2]^{1/2}$$

где под квадратным корнем понимается его арифметическое значение. Положим

$$(3.5) \quad k = \left(\frac{|k|m}{k^2 + l^2}\right)^{1/4} K, \quad \frac{k^2 + l^2}{m} = \mp i \left(\frac{|k|m}{k^2 + l^2}\right)^{-1/4} K$$

Оба эти равенства одинаковым образом определяют новый параметр (приведенное волновое число)

$$(3.6) \quad K = \pm i |k|^{1/4} \left(\frac{k^2 + l^2}{m}\right)^{3/4}$$

В формулах (3.5) и (3.6) верхний знак берется при $\text{Im}k > 0$, нижний — при $\text{Im}k < 0$. Поскольку отношение $(k^2 + l^2)/m$ положительно, аргументы k и K совпадают. Предельное условие (3.4) приобретает требуемый вид

$$(3.7) \quad dF/dZ \rightarrow \mp iK^{-1/2} \text{ при } |Z| \rightarrow \infty$$

Постоянная ζ , входящая в решение (1.7), изменяется при преобразовании волновых чисел. Чтобы сохранить ее вид инвариантным, дополним формулы (3.5) и (3.6) определением приведенной частоты

$$(3.8) \quad \omega = \left(\frac{|k|m}{k^2 + l^2} \right)^{1/2} \Omega$$

причем аргументы ω и Ω одинаковы. Тогда, действительно, $\zeta = \omega/k^{1/2} = \Omega/K^{1/2}$. Удовлетворяя граничному условию (3.7), приходим к дисперсионному соотношению

$$(3.9) \quad \frac{d \text{Ai}(\zeta)}{d\zeta} \left[\int_{\zeta}^{\infty} \text{Ai}(Z) dZ \right]^{-1} = \mp iK^{1/2}, \quad \zeta = \frac{\Omega}{K^{1/2}}$$

в стандартной для теории плоскопараллельных течений форме. Из выражения (1.7) для комплексного переменного Z видно, что произведенный выше выбор ветви трехзначной функции $k^{1/2}$ обеспечивает сходимость несобственного интеграла в левой части (3.9) после перехода к новым параметрам.

Если $M_{\infty} = 0$, что соответствует несжимаемой жидкости, корень $m = -(|k|^2 + |l|^2)^{1/2}$, откуда

$$(3.10) \quad \omega = \frac{|k|^{1/2}}{(|k|^2 + |l|^2)^{1/4}} \Omega, \quad k = \frac{|k|^{3/4}}{(|k|^2 + |l|^2)^{3/4}} K$$

4. Критерий устойчивости. Дисперсионное уравнение (3.9) обладает бесчисленным множеством корней. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся изложенными в [7] результатами. Асимптотическое разложение функции Эйри в окрестности отрицательной вещественной полуоси при $|Z| \rightarrow \infty$ можно записать как

$$(4.1) \quad \text{Ai}(Z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\exp\left(-\frac{2}{3}Z^{3/2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} c_m Z^{-3/2m-1/4} + \right. \\ \left. + i \exp\left(\frac{2}{3}Z^{3/2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m c_m Z^{-3/2m-1/4} \right] \\ c_m = (-1)^m \frac{1}{(2m)! 72^m} \prod_{n=1}^{3m} (2n-1), \quad c_0 = 1$$

где регулярные ветви многозначных функций выделяются при помощи ветви аргумента комплексного переменного Z неравенствами $\pi/3 < \arg Z < 5\pi/3$. Положим $\theta = \arg \zeta = \pi + \theta'$ и введем параметр $\chi = \theta' |\zeta|^{3/2}$. Пусть $\theta' \ll 1$ и $\chi \ll 1$, в то время как $|\zeta| \gg 1$. Применим теперь асимптотическую формулу (4.1), в которой сохраним лишь главные члены, для

упрощения дисперсионного соотношения. В итоге находим

$$(4.2) \quad \begin{aligned} |\zeta|^{1/2} \cos\left(\frac{2}{3}|\zeta|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{\sqrt{3\pi}}{2} |K|^{1/2} \\ \theta' |\zeta|^{1/2} \sin\left(\frac{2}{3}|\zeta|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) &= \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2} |K|^{1/2} \end{aligned}$$

Здесь верхний знак берется при $\text{Im} K > 0$, нижний — при $\text{Im} K < 0$.

Первое из равенств (4.2) служит для определения $|\zeta|$. При конечных значениях $|K|$ и $|\zeta| \rightarrow \infty$ имеем приближенно

$$|\zeta_j| = \left[\frac{3}{2} \pi \left(j + \frac{1}{4} \right) \right]^{2/3}$$

Разумеется, этой формулой можно пользоваться только при достаточно больших j . Из второго соотношения (4.2) находим

$$\theta' = \pm (-1)^j (\sqrt{\pi}/2) |K|^{1/2} \left[\frac{3}{2} \pi \left(j + \frac{1}{4} \right) \right]^{-1/2}$$

Таким образом, каждому значению $|K|$ соответствует бесчисленное множество собственных значений $\text{Re} \zeta_j$, $\text{Im} \zeta_j$, по которым производится подсчет $\text{Re} \Omega_j$, $\text{Im} \Omega_j$. В вычислениях удобно задавать волновые числа k , l и определять по ним, согласно второму равенству (2.3), величину корня m . Формула (3.6) служит для нахождения приведенного волнового числа K . Получив значения Ω_j , можно возвратиться к исходной частоте ω_j при помощи соотношения (3.8).

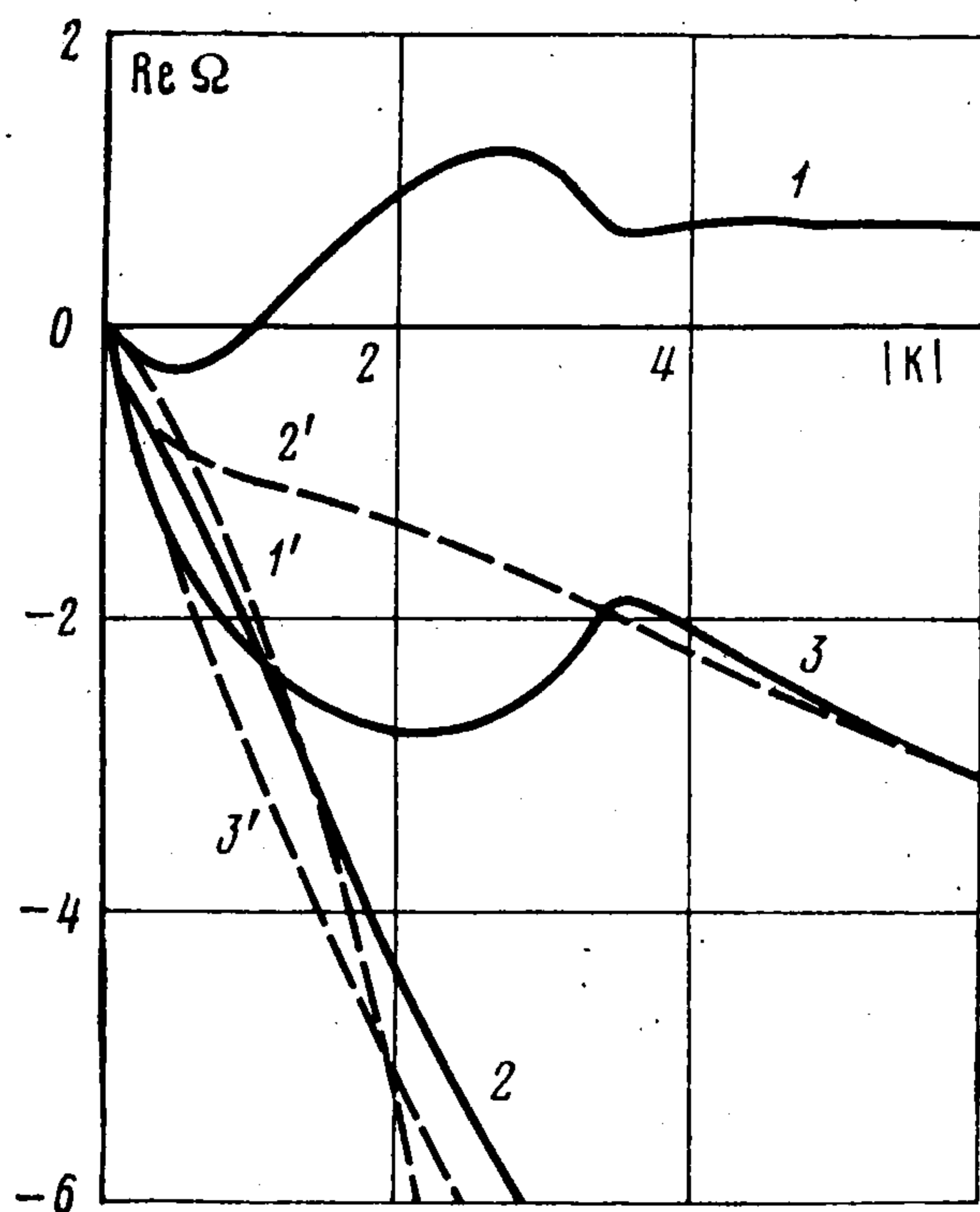
Поскольку $\arg K = \pm \pi/2$, а $\arg \zeta$ близок к π , то $\arg \Omega_j$ мало отличается от $\pi \pm \pi/3$. Но $\arg \omega_j = \arg \Omega_j$, поэтому $\text{Re} \omega_j < 0$ для достаточно больших j . Основной вывод асимптотического анализа корней дисперсионного уравнения (3.9) сводится к следующему: свободное взаимодействие распространяющихся в пограничном слое внутренних волн с дозвуковым внешним течением является устойчивым, если $|\zeta_j| \gg 1$. При сверхзвуковой скорости набегающего потока это заключение справедливо для всех мод, в том числе соответствующих конечным значениям $|\zeta_j|$. Проведенное недавно исследование [8] показало, однако, что в свободно взаимодействующем несжимаемом пограничном слое первая мода двумерных возмущений может оказаться как устойчивой, так и неустойчивой — в зависимости от величины волнового числа k . Поскольку дисперсионное уравнение (3.9) не содержит явно числа Маха M_∞ , то при любой дозвуковой скорости набегающего потока его первый корень ζ_1 будет давать не только положительные, но и отрицательные значения $\text{Re} \omega_1$ при варьировании обоих волновых чисел k , l , предписывающих вид пространственных возмущений.

Зависимости реальных и мнимых частей приведенной частоты Ω от абсолютной величины приведенного волнового числа K для первых трех корней дисперсионного уравнения (3.9) показаны на фиг. 1 и 2 (кривые 1 — 3 соответственно). Штриховыми линиями 1', 2', 3' на этих же фигурах нанесены для сравнения результаты решения дисперсионного уравнения применительно к сверхзвуковому пограничному слою (в этом случае правую часть (3.9) $Q = \mp iK^{1/2}$ следует заменить на $Q = -K^{1/2}$, причем $|K| = k$, $\Omega = \omega$). Ход кривых на фиг. 1 подтверждает сформулированный выше вывод о неустойчивости процесса свободного взаимодействия первой моды с дозвуковым внешним потоком, если $|K| > K_*$. Согласно проведенным вычислениям, соответствующее нейтральным колебаниям число $K_* = 1,0005$.

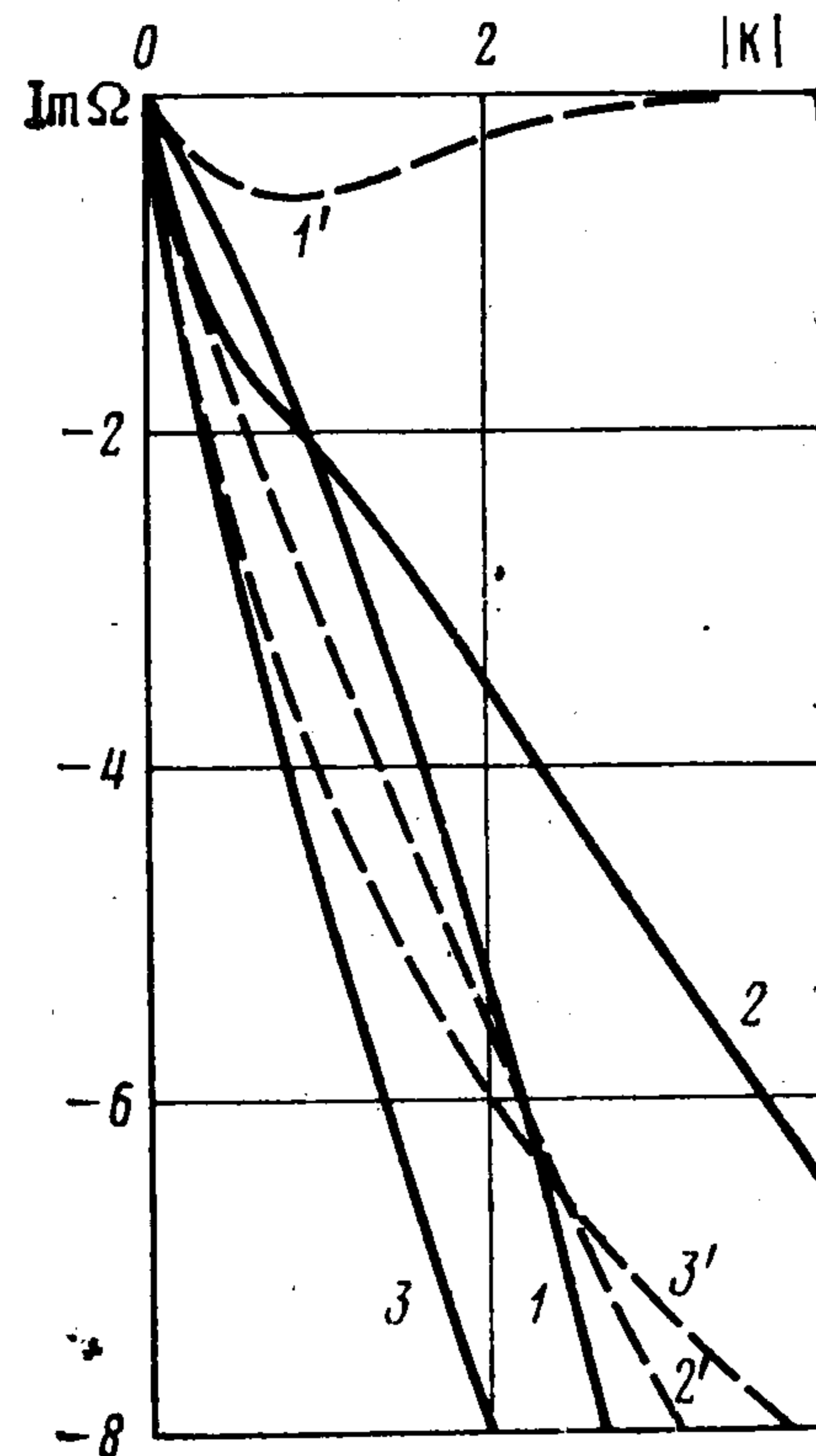
Уместно вспомнить теперь, что все изложенные выше рассуждения были проведены в специальной безразмерной системе единиц. Переход от частоты ω и волновых чисел k, l в этой системе к частоте ν и волновым числам α, γ в исходной (также безразмерной) системе единиц осуществляется по формулам [1—4]

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \omega &= C^{1/4} \lambda^{-3/2} N_{\text{Re}}^{-1/4} |M_\infty^2 - 1|^{-1/4} \frac{T_w}{T_\infty} \nu \\ k &= C^{3/8} \lambda^{-5/4} N_{\text{Re}}^{-3/8} |M_\infty^2 - 1|^{-3/8} \left(\frac{T_w}{T_\infty}\right)^{3/2} \alpha \\ l &= C^{3/8} \lambda^{-5/4} N_{\text{Re}}^{-3/8} |M_\infty^2 - 1|^{-3/8} \left(\frac{T_w}{T_\infty}\right)^{3/2} \gamma \end{aligned}$$

Здесь N_{Re} означает число Рейнольдса, C — постоянную, из линейного закона Чепмена для коэффициентов вязкости и теплопроводности, T_w и



Фиг. 1



Фиг. 2

T_∞ — температуру пластинки и набегающего потока соответственно. Постоянная λ определяется при помощи равенства $dU_2(0)/dy_2 = \lambda C^{-1/2} (T_w/T_\infty)^{-1}$, в котором функция U_2 задает распределение продольной составляющей вектора скорости в невозмущенном пограничном слое в зависимости от его поперечной координаты y_2 ; согласно решению Блазиуса, $\lambda = 0,3321$.

Подстановка формул (4.3) в дисперсионное соотношение (3.9) позволяет записать выражение для постоянной ζ как

$$(4.4) \quad \zeta = \lambda^{-2/3} \frac{\nu}{\alpha^{2/3}}$$

а его правую часть Q преобразовать к виду

$$(4.5) \quad \begin{aligned} Q &= \exp\left(\pm \frac{\pi}{6} i\right) C^{1/2} \lambda^{-5/3} N_{\text{Re}}^{-1/2} |M_\infty^2 - 1|^{-1/2} \cdot \\ &\cdot (T_w/T_\infty)^2 |\alpha|^{1/3} (|\alpha|^2 + |\gamma|^2) / |\mu| \\ |\mu| &= [|\alpha|^2 + |M_\infty^2 - 1|^{-1} |\gamma|^2]^{1/2} \end{aligned}$$

Как ясно из предыдущего, условие устойчивости свободно взаимодействующего дозвукового пограничного слоя на пластинке гласит:

$$(4.6) \quad C^{1/2} \lambda^{-5/3} N_{\text{Re}}^{-1/2} |M_\infty - 1|^{-1/2} (T_w/T_\infty)^2 |\alpha|^{1/3} (|\alpha|^2 + |\gamma|^2) / |\mu| \leq K_*^{4/3}$$

Знак равенства здесь отвечает нейтральным колебаниям, амплитуда которых остается неизменной во времени.

Критерий (4.6) позволяет сделать определенные заключения о положении нейтральной кривой в плоскости $N_{\text{Re}}, |\alpha|$, которая обычно используется в линейной теории устойчивости. Увеличение числа Маха дозвукового набегающего потока сдвигает эту кривую вниз, если число Рейнольдса фиксировано, причем для трехмерных возмущений влияние числа Маха уменьшается. Охлаждение пластинки приводит к противоположному результату: кривая нейтральной устойчивости смещается вверх. Нагревание обтекаемой поверхности эквивалентно по своему воздействию увеличению числа Маха на бесконечности. Наложение колебаний в боковом направлении ведет к уменьшению критических значений $|\alpha|$, при которых амплитуда возмущений сохраняется постоянной во времени; для больших значений $|\gamma|$ изменение числа Маха мало сказывается на положении нейтральной кривой. Кроме того, эта кривая может сдвигаться вниз или вверх в зависимости от величин постоянных C и λ , в частности уменьшение параметра λ вызывает уменьшение критического значения $|\alpha|$ при данном числе Рейнольдса.

5. Функция h . Остается исследовать решения второго уравнения из системы (1.4), чтобы подтвердить справедливость сделанных выше выводов. Обозначив $dh/dy = H$, запишем его в виде неоднородного уравнения Эйри

$$(5.1) \quad d^2 H/dZ^2 - ZH = -l/k^{2/3}$$

на плоскости комплексного переменного Z . Применение изложенных в [7] результатов дает следующее выражение для второго линейно-независимого решения $Vi(Z)$ уравнения Эйри

$$(5.2) \quad Vi(Z) = \exp\left(\frac{\pi}{6}i\right) Ai\left(Z \exp\left(\frac{2\pi}{3}i\right)\right) + \\ + \exp\left(-\frac{\pi}{6}i\right) Ai\left(Z \exp\left(-\frac{2\pi}{3}i\right)\right)$$

Поведение функции $Vi(Z)$ в различных секторах плоскости Z при $|Z| \rightarrow \infty$ устанавливается при помощи асимптотического разложения (4.1) для функции Эйри. Можно проверить, что в секторе, выделяемом неравенствами $-\pi/3 < \arg Z < \pi/3$

$$(5.3) \quad Vi(Z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{2}{3}Z^{3/2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m c_m Z^{-3/2m-1/4}$$

Вычислим, прежде всего, вронскиан W решений $Ai(Z)$ и $Vi(Z)$. Согласно общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений, $W = \text{const}$. Применение выражения (5.2) для нахождения численного значения постоянной оказывается мало эффективным, обратимся поэтому к асимптотическим формулам (4.1) и (5.3). В результате находим $W = 1/\pi$.

Общее решение уравнения (5.1) можно теперь представить как

$$(5.) \quad H = a_1 \text{Ai}(Z) + a_2 \text{Bi}(Z) + \frac{\pi l}{k^{3/2}} \left[\text{Ai}(Z) \int_{\zeta}^Z \text{Bi}(Z') dZ' - \text{Bi}(Z) \int_{\zeta}^Z \text{Ai}(Z') dZ' \right]$$

Используя асимптотические разложения функций $\text{Ai}(Z)$ и $\text{Bi}(Z)$ в секторе $-\pi/3 < \arg Z < \pi/3$, установим поведение H при $|Z| \rightarrow \infty$. Оценка интегральных членов, которые содержатся в квадратных скобках в правой части равенства (5.4), дает в первом приближении

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \text{Ai}(Z) \int_{\zeta}^Z \text{Bi}(Z') dZ' &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{Z} + \dots \\ \text{Bi}(Z) \int_{\zeta}^Z \text{Ai}(Z') dZ' &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{Z^{1/2}} \exp\left(\frac{2}{3} Z^{3/2}\right) \int_{\zeta}^{\infty} \text{Ai}(Z') dZ' - \\ &- \frac{1}{2\pi} \frac{1}{Z} + \dots \end{aligned}$$

Чтобы исключить экспоненциальное возрастание H при $|Z| \rightarrow \infty$, необходимо положить

$$a_2 = \frac{\pi l}{k^{3/2}} \int_{\zeta}^{\infty} \text{Ai}(Z) dZ$$

Из условия прилипания на обтекаемой поверхности: $H = 0$ при $Z = \zeta$ следует

$$a_1 = -\frac{\pi l}{k^{3/2}} \text{Bi}(\zeta) [\text{Ai}(\zeta)]^{-1} \int_{\zeta}^{\infty} \text{Ai}(Z) dZ$$

Собирая вместе полученные результаты, имеем выражение

$$\begin{aligned} H &= \frac{\pi l}{k^{3/2}} \left\{ \text{Bi}(Z) \int_{\zeta}^{\infty} \text{Ai}(Z') dZ' + \right. \\ &+ \left. \text{Ai}(Z) \left[\int_{\zeta}^Z \text{Bi}(Z') dZ' - \frac{\text{Bi}(\zeta)}{\text{Ai}(\zeta)} \int_{\zeta}^{\infty} \text{Ai}(Z') dZ' \right] \right\} \end{aligned}$$

Оно сохраняет смысл при всех ζ , так как нули функции Эйри, расположенные на отрицательной вещественной полуоси, не совпадают с корнями дисперсионного соотношения (3.9). Согласно асимптотическим оценкам (5.5), при $|Z| \rightarrow \infty$

$$(5.6) \quad H \rightarrow \frac{l}{k^{3/2}} \frac{1}{Z} + \dots$$

Обратимся теперь к третьему условию срачивания (3.1), которое выше удовлетворялось лишь грубо в форме (3.3). Более точные вычисления показывают, что $dh/dy \rightarrow l/(ky)$ при $y \rightarrow \infty$. Записанное на плоскости комплексного переменного Z это соотношение в точности совпадает с (5.6).

Можно убедиться в том, что учет пропорционального $1/y$ поправочного члена во втором условии сращивания (3.1), которым раньше для простоты пренебрегалось, не меняет вида формулы (3.4), если учесть асимптотическое представление (5.6) для функции H . Таким образом, исследование второго уравнения из системы (1.4) позволяет более точно удовлетворить условиям сращивания решений для вязкого пристеночного подслоя и внешнего потенциального течения.

6. Пограничный слой в несжимаемой жидкости. В заключение обсудим вкратце результаты линейной теории устойчивости применительно к пограничному слою на плоской пластинке, обтекаемой несжимаемой жидкостью.

Формулировка общей задачи об устойчивости течений и основные итоги ее исследования изложены в книгах [5, 6]. В них содержится описание кривых устойчивости в плоскости $N_{Re}, |\alpha|$, определенных различными, в том числе численными методами, и дано сопоставление данных теории с экспериментом. Предпринятый недавно детальный анализ, включающий учет нескольких поправочных членов, позволил с большой точностью установить форму нижней ветви нейтральной кривой [9], в этом анализе использовалась трехслойная модель течения, принятая в теории свободного взаимодействия.

Анализ устойчивости базируется на уравнениях Навье—Стокса, а не на более простых уравнениях Прандтля. При приведении уравнений Навье—Стокса к безразмерному виду выберем в качестве основных единиц измерения расстояние от носка пластинки, скорость набегающего потока и плотность жидкости. Решение в этой безразмерной системе единиц для составляющих u°, v° и w° вектора скорости и давления p° в зависимости от времени t° и декартовых координат $x^\circ, y^\circ, z^\circ$ представим как

$$(6.1) \quad \{u^\circ - U_0, v^\circ, w^\circ, p^\circ - P_0\} = \{u_1, v_1, w_1, p_1\} \exp(\nu t^\circ + \alpha x^\circ + \gamma z^\circ)$$

Здесь функция U_0 задает распределение продольной составляющей вектора скорости в невозмущенном течении вдоль поперечной координаты y° , значение постоянной P_0 определяется давлением в набегающем потоке, комплексные амплитуды u_1, v_1, w_1 и p_1 удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые получаются линеаризацией уравнений Навье—Стокса. Соотношения между частотами ω и ν и волновыми числами k, l и α, γ устанавливаются формулами (4.3), сводящимися в рассматриваемом случае к

$$(6.2) \quad \omega = \lambda^{-3/2} N_{Re}^{-1/2} \nu, \quad k = \lambda^{-1/2} N_{Re} \alpha, \quad l = \lambda^{-1/2} N_{Re}^{-1/2} \gamma$$

Рассмотрим уравнения для комплексных амплитуд. Следуя Сквайру, положим [5, 6]

$$(6.3) \quad v_1 = \mu F^\circ, \quad \mu \frac{dF^\circ}{dy^\circ} = -(\alpha u_1 + \gamma w_1), \quad \mu^2 = \alpha^2 + \gamma^2 = -|\mu|^2$$

и обозначим посредством $c = -\nu/\alpha$ фазовую скорость волны. При этом уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно, а остальные

преобразуются следующим образом:

$$(6.4) \quad (U_0 - c) \left(\frac{d^2 F^\circ}{dy^{\circ 2}} + \mu^2 F^\circ \right) - \frac{d^2 U_0}{dy^{\circ 2}} F^\circ = \frac{1}{\mu N_{\text{Re}}^*} \left(\frac{d^4 F^\circ}{dy^{\circ 4}} + 2\mu^2 \frac{d^2 F^\circ}{dy^{\circ 2}} + \mu^4 F^\circ \right),$$

$$p^* = (U_0 - c) \frac{dF^\circ}{dy^\circ} - \frac{dU_0}{dy^\circ} F^\circ - \frac{1}{\mu N_{\text{Re}}^*} \left(\mu^2 \frac{dF^\circ}{dy^\circ} + \frac{d^3 F^\circ}{dy^{\circ 3}} \right)$$

Первое из написанных уравнений является уравнением Орра — Зоммерфельда для функции F° с той разницей, что модифицированное число Рейнольдса $N_{\text{Re}}^* = \alpha N_{\text{Re}} / \mu$; второе уравнение (6.4) служит для вычисления $p_1 = \alpha p^* / \mu$. Таким образом, задача о пространственных волнах, распространяющихся в несжимаемом пограничном слое на пластинке, свелась к аналогичной задаче о возмущенном плоскопараллельном течении [5, 6]. Аналогичное заключение было сформулировано выше в рамках теории свободного взаимодействия, причем формулы (1.5) и (6.3), посредством которых вводятся новые искомые функции F и F° , различаются лишь несущественным масштабным множителем. Далее, как показано в [8], решение задачи об устойчивости несжимаемого пограничного слоя по отношению к двумерным возмущениям полностью совпадает с решением, предсказываемым теорией свободного взаимодействия, если $|\alpha| \rightarrow \infty$, $|\alpha| / \sqrt{N_{\text{Re}}} \rightarrow 0$, а $N_{\text{Re}} \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что вывод о том, каков характер развития трехмерных возмущений в пограничном слое на пластинке, может основываться на изучении его свободного взаимодействия с внешним потенциальным потоком при условии, что $|\mu| \rightarrow 0$, $N_{\text{Re}}^* \rightarrow \infty$, а отношение $|\alpha| / |\mu|$ — величина порядка единицы. Специального исследования уравнений (6.4) проводить не требуется, так как все необходимые результаты содержатся в [8, 9].

Внутри пограничного слоя функции $U_0(y^\circ) = U_2(y_2)$. Переход от заданного к модифицированному числу Рейнольдса означает аффинное растяжение координаты y_2 в соответствии с равенством $y_2 = \sqrt{\mu/\alpha} y_2^*$. Поскольку $U_2(y_2) = U_2^*(y_2^*)$, необходимо сохранить инвариантной фазовую скорость волны. Это требование влечет за собой выражение $v = \alpha v^* / \mu$ для трехмерных возмущений; действительно, $c = -v/\alpha = -v^*/\mu$. Обращаясь теперь к [8, 9], сразу выписываем дисперсионное соотношение

$$(6.5) \quad \frac{d \text{Ai}(\zeta)}{d\zeta} \left[\int_{\zeta}^{\infty} \text{Ai}(Z) dZ \right]^{-1} = \mp i \lambda^{*-5/3} N_{\text{Re}}^{*-1/2} \mu^{4/3}, \quad \zeta = \lambda^{*-2/3} \frac{v^*}{\mu^{2/3}}$$

где верхний знак берется при $\text{Im} \mu > 0$, нижний — при $\text{Im} \mu < 0$, постоянная $\lambda = \sqrt{\alpha/\mu} \lambda^*$ в силу равенства $\lambda y_2 = \lambda^* y_2^*$. Видно, что выражение для ζ в (6.5) совпадает с таковым в (4.4). Для течений несжимаемой жидкости поле скоростей не зависит от параметров S и T_w/T_∞ , а число Маха $M_\infty = 0$. При этих условиях правая часть Q рассматриваемого дисперсионного соотношения переходит в (4.5). Связь с частотой ω и волновыми числами k, l , которые применялись при изучении свободного взаимодействия пограничного слоя с внешним потенциальным течением, осуществляется при помощи формул (6.2). Канонический вид (3.9) дисперсионного соотношения получается для параметров Ω и K , вводимых равенствами (3.10).

В узкой пристеночной области решение (6.1) может быть записано в форме (1.3), если подходящим образом выбрать нормировочные постоянные [8]. Таким образом, изучавшиеся выше внутренние волны в свободно взаимодействующем несжимаемом пограничном слое представляют собой асимптотику косых волн Толлмина — Шлихтин-

га [5, 6], распространяющихся под углом к направлению основного потока, в пределе, когда $|\alpha| \rightarrow \infty$, $|\alpha|/\sqrt{N_{Re}} \rightarrow 0$, $N_{Re} \rightarrow \infty$, а $|\alpha|/|\mu| \sim 1$.

Проделанный анализ позволяет сформулировать нелинейную задачу об устойчивости свободно взаимодействующего пограничного слоя в дозвуковом потоке газа по отношению к пространственным возмущениям. Для этого достаточно потребовать периодичности искомых функций по переменным x и z , не прибегая к линеаризации уравнений (1.1). Внешняя область течения будет по-прежнему описываться линейным уравнением (2.1). Экспериментальные данные свидетельствуют в пользу того, что нелинейная стадия усиления неустойчивых волн Толлмина — Шлихтинга заканчивается их дроблением и переходом в трехмерные возмущения, если даже первоначально они являлись плоскопараллельными. Как было показано выше, наложение колебаний в боковом направлении сопровождается потерей устойчивости более длинноволновых возмущений при фиксированном числе Рейнольдса.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Heiland V. J.* Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений. — Тр. ЦАГИ, 1974, вып. 1529. 125 с.
2. *Stewartson K.* Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies. — In: *Advances in Appl. Mech.* V. 14. New York — San Francisco — London: Acad. Press, 1974, p. 145.
3. *Schneider W.* Upstream propagation of unsteady disturbances in supersonic boundary layers. — *J. Fluid Mech.*, 1974, v. 63, pt 3, p. 465.
4. *Рыжов О. С.* О нестационарном пространственном пограничном слое, свободно взаимодействующем с внешним потоком. — ПММ, 1980, т. 44, вып. 6, с. 1035.
5. *Линь Цзя-цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958, 194 с.
6. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
7. *Ryzhov O. S., Zhuk V. I.* Internal waves in the boundary layer with the self-induced pressure. — *J. Méc.*, 1980, v. 19, No. 3, p. 561.
8. *Жук В. И., Рыжов О. С.* Свободное взаимодействие и устойчивость пограничного слоя в несжимаемой жидкости. — Докл. АН СССР, 1980, т. 253, № 6, с. 1326.
9. *Smith F. T.* On the non-parallel flow stability of the Blasius boundary layer. — *Proc. Roy. Soc. A*, 1979, v. 366, No. 1724, p. 91.

Москва

Поступила в редакцию
18.VIII.1980