Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 3, 1981

УДК 531.16 + 62—50

К УПРАВЛЕНИЮ ТРЕХОСНОЙ ОРИЕНТАЦИЕЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ПАРАМЕТРЫ УПРАВЛЕНИЯ

Лебедев Д. В.

Для твердого тела с произвольной геометрией масс исследуется задача управления трехосной ориентацией в случае, когда ограничения на компоненты управляющего момента, представляющего линейную комбинацию независимых векторов, задаются в неявном виде. Рассматриваются две задачи управления: задача оптимального по быстродействию управления переориентацией твердого тела и задача синтеза управления, гарантирующего асимптотическую устойчивость исследуемому режиму движения тела.

Аналогичные задачи управления движением твердого тела исследовались, в частности, в [1 — 3].

1. Постановка задачи. Введем две правые ортогональные системы координат: инерциальную $\xi\eta\zeta$ и жестко связанную с телом систему xyz, оси которой в общем случае не совпадают с системой главных центральных осей инерции твердого тела.

Описывая вращательное движение тела динамическими уравнениями Эйлера

$$J\boldsymbol{\omega}^{\cdot} + \boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}, \quad \boldsymbol{\omega} = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\} \tag{1.1}$$

структуру управляющего момента $\mathbf{M}$ с областью определения G определим соотношением

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{m} u_i\mathbf{M}_i; \quad G = \{\mathbf{u}\colon |u_i| \leqslant u_*, \quad i = 1, \ldots, m\}, \quad u_* = \text{const} \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{M}_i$ — линейно-независимые векторы, неподвижные в системе xyz; скаляры u_i — параметры управления.

Если взаимное положение базисов $\xi\eta\zeta$ и xyz характеризовать кватернионом $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, компоненты которого — параметры Родрига — Гамильтона, то изменение Λ во времени подчиняется уравнению [4]

$$2\Lambda^{\cdot} = \Lambda \circ \boldsymbol{\omega} \tag{1.3}$$

При совпадении трехгранников $\xi\eta\zeta$ и xyz

$$\Lambda = \Lambda_* = \{\pm 1, 0, 0, 0\}$$

Задача 1. В области G (1.2) синтезировать оптимальное по быстродействию управление, переводящее тело из начального состояния

$$\Lambda(t_0) = \Lambda_0, \quad \boldsymbol{\omega}(t_0) = 0 \tag{1.4}$$

в положение

$$\Lambda(T)=\Lambda_*, \quad \omega(T)=0 \tag{1.5}$$

Задача 2. Располагая информацией о параметрах ориентации Λ и угловой скорости ω, синтезировать управляющий момент $\mathbf{M}$, обеспечивающий асимптотическую устойчивость режиму трехосной ориентации (1.5).

2. Наибольшее значение управляющего момента относительно заданного направления. Пусть в жестко связанном с телом трехграннике xyz задано некоторое $\mathbf{n}$-направление с ортом $\mathbf{n}=\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Ниже будет показано, что для решения поставленных задач необходимо знать наибольшее значение $M_*=\|\mathbf{M}\|$ управляющего момента относительно заданного $\mathbf{n}$-направления.

Величина M_* определяется из соотношений

$$M_*=\max_{\mathbf{u}\in G} L(\mathbf{u}), \quad L(\mathbf{u})=\mathbf{n}'\mathbf{M} \tag{2.1}$$

при условии

$$\mathbf{M}\times\mathbf{n}=0 \tag{2.2}$$

Для $m>3$ задача отыскания наибольшего значения управляющего момента относительно заданного $\mathbf{n}$-направления сводится к задаче линейного программирования. Ранг системы ограничений (2.2) равен двум, поэтому по крайней мере $m-2$ из параметров управления $u_i\,(i=1,\ldots m)$ принимают граничные значения.

Чтобы исследовать структуру получающихся решений, ограничимся (не теряя в общности) случаем, когда $m=4$.

В качестве неподвижных в системе xyz векторов $\mathbf{M}_i$ $(i=1,\ldots,4)$ рассмотрим следующую их совокупность:

$$\mathbf{M}_1=\{m_x, -m_y, -m_z\}, \quad \mathbf{M}_2=\{m_x, m_y, -m_z\}$$
$$\mathbf{M}_3=\{-m_x, -m_y, -m_z\}, \quad \mathbf{M}_4=\{-m_x, m_y, -m_z\}$$

Симплекс-метод дает шесть групп оптимальных решений, каждая из которых справедлива в определенной области положений вектора $\mathbf{n}$, причем множество

$$N=\{\mathbf{n}: \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\} \tag{2.3}$$

ориентаций орта $\mathbf{n}$ в базисе xyz может быть представлено в виде

$$N=\bigcup_{\nu=1}^{6} N_\nu$$

Если ввести обозначения

$$d_1=(\alpha m_y+\beta m_x)m_z \quad (123,\ \alpha\beta\gamma,\ xyz)$$
$$d_4=(\beta m_x-\alpha m_y)m_z \quad (456,\ \alpha\beta\gamma,\ xyz)$$
$$W=4m_x m_y m_z u_*$$

(здесь и далее символы типа (1 2 3, $\alpha\beta\gamma$, xyz) означают, что невыписанные соотношения получаются одновременной круговой перестановкой указанных букв и индексов), то подмножества N_ν $(\nu=1,\ldots,6)$ определяются выражениями

$$N_1 = \left\{ \mathbf{n}: \ \alpha\beta \geqslant 0, \ |\gamma| \leqslant \min\left(\frac{m_z}{m_x}|\alpha|, \ \frac{m_z}{m_y}|\beta|\right)\right\} \quad (123, \ \alpha\beta\gamma, \ xyz)$$

$$N_4 = \left\{ \mathbf{n}: \ \alpha\beta < 0, \ |\gamma| \leqslant \min\left(\frac{m_z}{m_x}|\alpha|, \ \frac{m_z}{m_y}|\beta|\right)\right\} \quad (456, \ \alpha\beta\gamma, \ xyz)$$

а величина M_* и реализующие ее значения параметров управления u_i^0 $(i = 1, \ldots, 4)$ в приведенных подмножествах находятся по формулам

$$\mathbf{n} \in N_1; \quad M_* = \frac{W}{|d_1|}, \quad u_1^\circ = \frac{d_6 - d_2}{|d_1|} u_*, \quad u_2^\circ = -u_3^\circ = \frac{d_1}{|d_1|} u_*$$
$$u_4^\circ = -\frac{d_3 + d_5}{|d_1|} u_*$$

$$\mathbf{n} \in N_2; \quad M_* = \frac{W}{|d_1|}, \quad u_1^\circ = u_3^\circ = -\frac{d_2}{|d_2|} u_*, \quad u_2^\circ = \frac{d_1 + d_6}{|d_2|} u_*$$
$$u_4^\circ = \frac{d_4 - d_3}{|d_2|} u_*$$

$$\mathbf{n} \in N_3; \quad M_* = \frac{W}{|d_3|}, \quad u_1^\circ = -\frac{d_2 + d_4}{|d_3|} u_*, \quad u_2^\circ = \frac{d_1 - d_5}{|d_3|} u_*$$
$$u_3^\circ = u_4^\circ = -\frac{d_3}{|d_3|} u_*$$

$$\mathbf{n} \in N_4; \quad M_* = \frac{W}{|d_4|}, \quad u_1^\circ = -u_4^\circ = -\frac{d_4}{|d_4|} u_*, \quad u_2^\circ = \frac{d_6 - d_5}{|d_4|} u_*$$
$$u_3^\circ = -\frac{d_2 + d_3}{|d_4|} u_*$$

$$\mathbf{n} \in N_5; \quad M_* = \frac{W}{|d_5|}, \quad u_1^\circ = \frac{d_6 - d_4}{|d_5|} u_*, \quad u_2^\circ = u_4^\circ = -\frac{d_5}{|d_5|} u_*$$
$$u_3^\circ = -\frac{d_1 + d_3}{|d_5|} u_*$$

$$\mathbf{n} \in N_6; \quad M_* = \frac{W}{|d_6|}, \quad u_1^\circ = u_2^\circ = \frac{d_6}{|d_6|} u_*, \quad u_3^\circ = -\frac{d_1 + d_2}{|d_6|} u_*$$
$$u_4^\circ = \frac{d_4 - d_5}{|d_6|} u_*$$

Отметим, что при $m = 3$ линейную форму $L(\mathbf{u})$ можно представить в виде функции одной переменной, и отыскание M_* затруднений не вызывает.

Например, для

$$\mathbf{M}_1 = \{m_x, 0, 0\}, \ \mathbf{M}_2 = \{0, m_y, 0\}, \ \mathbf{M}_3 = \{0, 0, m_z\}$$

множество (2.3) — объединение трех подмножеств

$$N = N_\alpha \cup N_\beta \cup N_\gamma$$

$$N_\alpha = \left\{ \mathbf{n}: |\alpha| \geqslant \max\left(\frac{m_x}{m_y}|\beta|, \ \frac{m_x}{m_z}|\gamma|\right)\right\} \quad (\alpha\beta\gamma, \ xyz)$$

в каждом из которых имеет место свое решение.

Так, для $\mathbf{n} \in N_\alpha$ $(\alpha\beta\gamma)$

$$M_* = \frac{m_x}{|\alpha|} u_*, \quad u_1^\circ = \frac{\alpha}{|\alpha|} u_*, \quad u_2^\circ = \frac{\beta}{|\alpha|} \frac{m_x}{m_y} u_*, \quad u_3^\circ = \frac{\gamma}{|\alpha|} \frac{m_x}{m_z} u_*$$
$$(\alpha\beta\gamma, \ xyz, \ 1\ 2\ 3)$$

3. Оптимальное по быстродействию управление переориентацией твердого тела. Задача оптимального по быстродействию пространственного разворота твердого тела одним поворотом вокруг неподвижной оси (эйлеровой оси вращения) рассмотрена, например, в [1].

В отличие от [1], где заранее известны ограничения на компоненты вектора управляющего момента, в рассматриваемом случае эти ограничения заранее не известны и определяются ориентацией оси конечного вращения в базисе, жестко связанном с твердым телом.

Пусть ориентация эйлеровой оси вращения в координатном трехграннике xyz характеризуется направляющими косинусами α_*, β_*, γ_*. Если управляющий момент $\mathbf{M}$ формировать так, чтобы он был коллинеарен оси конечного поворота, то, вводя новое управление по формуле

$$\mathbf{U} = J^{-1}(J\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{M}) \tag{3.1}$$

уравнения (1.1) вращательного движения твердого тела приводим к виду

$$\sigma^{\cdot\cdot} = \mathbf{n}_*'\mathbf{U} \equiv U_*, \quad \mathbf{n}_* = \{\alpha_*, \beta_*, \gamma_*\} \tag{3.2}$$
$$(\sigma^{\cdot} = \mathbf{n}_*'\boldsymbol{\omega}, \ |U_*| \leqslant U_0, \ U_0 = \mathrm{const})$$

Задача сводится к построению алгоритма управления, оптимального по быстродействию, переводящего тело из начального состояния

$$\sigma(t_0) = \sigma_0, \quad \sigma^{\cdot}(t_0) = 0$$

в конечное положение

$$\sigma(T) = \sigma^{\cdot}(T) = 0$$

Поскольку между вектором конечного поворота и параметрами Родрига — Гамильтона существует взаимно-однозначное соответствие, то, зная в момент начала процесса ориентации параметры $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, нетрудно определить орт $\mathbf{n}_*$ эйлеровой оси и угол σ_0, на который необходимо повернуть твердое тело для совпадения базисов $\xi\eta\zeta$ и xyz.

В самом деле, из соотношений

$$\lambda_0(t_0) = \cos\frac{\sigma_0}{2}, \quad \lambda_1(t_0) = \alpha_*\sin\frac{\sigma_0}{2} \tag{3.3}$$
$$\lambda_2(t_0) = \beta_*\sin\frac{\sigma_0}{2}, \quad \lambda_3(t_0) = \gamma_*\sin\frac{\sigma_0}{2}$$

следует, что

$$\mathbf{n}_* = \left\{\frac{\lambda_i(t_0)}{\sqrt{1-\lambda_0^2(t_0)}}\right\}, \quad i = 1, 2, 3; \quad \sigma_0 = 2\arccos\lambda_0(t_0) \tag{3.4}$$

Принцип максимума Понтрягина дает слудующую структуру оптимального по быстродействию алгоритма управления ориентацией:

$$U_* = \varphi(\sigma, \sigma^{\cdot})U_0 \tag{3.5}$$

$$\varphi(\sigma, \sigma^{\cdot}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \sigma < \sigma_* \text{ и } \sigma = \sigma_*, \ \sigma^{\cdot} < 0 \\ -1 & \text{при } \sigma > \sigma_* \text{ и } \sigma = \sigma_*, \ \sigma^{\cdot} > 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\sigma_* = -\,|\,\sigma^{\cdot}|\,\sigma^{\cdot} / (2U_0) \tag{3.7}$$

Для заданного пространственного разворота тела найдем максимальное допустимое значение параметра U_0.

При управлении относительно вектора конечного поворота имеют место равенства

$$(3.8)\qquad \mathbf{U} = \mathbf{n}_* U_* = \varphi(\sigma, \sigma^{\cdot}) U_0 \mathbf{n}_*$$
$$\omega = \sigma^{\cdot} n_*, \quad \sigma^{\cdot 2} = 2U_0 \mid \sigma \mid$$

Из соотношения (3.1) с учетом (3.8) получаем выражение для управляющего момента

$$(3.9)\qquad \mathbf{M} = \varphi(\sigma, \sigma^{\cdot}) U_0 J\mathbf{n}_* - \sigma^2 J\mathbf{n}_* \times \mathbf{n}_*$$

Поскольку наибольшее значение гироскопического момента $\sigma^2 J\mathbf{n}_* \times \mathbf{n}_*$ достигается в момент переключения управления и не изменяется при изменении функции $\varphi(\sigma, \sigma^{\cdot})$, вычислим вектор $\mathbf{M}$ в момент попадания на линию переключения (3.7) при $\varphi = 1$ и $\varphi = -1$. Учитывая, что при $\sigma^{\cdot}(t_0) = 0$ максимальное значение модуля угловой скорости $\sigma^{\cdot}$ вращения твердого тела относительно эйлеровой оси равно

$$\mid \sigma^{\cdot} \mid_* = \sqrt{U_0 \mid \sigma_0 \mid}$$

имеем

$$(3.10)\qquad \mathbf{M}^{\pm} = U_0(\pm J\mathbf{n}_* - |\sigma_0| J\mathbf{n}_* \times \mathbf{n}_*)$$

Отметим, что из-за ортогональности векторов $J\mathbf{n}_*$ и $J\mathbf{n}_* \times \mathbf{n}_*$ векторы $\mathbf{M}^+$ и $\mathbf{M}^-$ имеют одинаковую длину. Однако их ориентация в базисе xyz, характеризуемая ортами $\mathbf{n}^+$, $\mathbf{n}^-$

$$(3.11)\qquad \mathbf{n}^{\pm} = [\pm J\mathbf{n}_* - |\sigma_0| J\mathbf{n}_* \times \mathbf{n}_*]/m_*$$
$$m_* = \| \pm J\mathbf{n}_* - |\sigma_0| J\mathbf{n}_* \times \mathbf{n}_* \|$$

разная:

$$\mathbf{n}^- = \mathbf{n}^+ - 2J\mathbf{n}_*/m_*$$

Пусть максимальные значения модуля вектора $\mathbf{M}$ относительно $\mathbf{n}^+$- и $\mathbf{n}^-$-направлений, вычисленные согласно п. 2, равны соответственно M_*^+ и M_*^-. Тогда

$$(3.12)\qquad U_0 = \min(M_*^+/m_*, M_*^-/m_*)$$

Таким образом, для решения задачи 1 предварительно по выражениям (3.4), (3.10)—(3.12) определяются ориентация в базисе xyz эйлеровой оси вращения, угол поврота σ_0 и значение параметра U_0.

В процессе ориентации по формуле $\sigma = 2 \arccos \lambda_0$ определяется текущее значение угла σ, вычисляются требуемое значение управляющего момента

$$\mathbf{M} = \varphi(\sigma, \sigma^{\cdot}) U_0 J\mathbf{n}_* - J\omega \times \omega$$

и его ориентация в связанной системе координат xyz, характеризуемая ортом

$$\mathbf{n} = \{M_x/\|\mathbf{M}\|, M_y/\|\mathbf{M}\|, M_z/\|\mathbf{M}\|\}$$

Далее, относительно $\mathbf{n}$-направления находится наибольшее значение M_* вектора управления и соответсвующие ему значения параметров $u_i^0 (i = 1, \ldots, m)$. Искомые значения параметров управления $u_i (i = 1, \ldots$

$\ldots, m$) определяются согласно соотношениям

$$u_i = \mu u_i^0, \quad \mu = \| \mathbf{M} \| / M_*$$

4. Асимптотическая устойчивость режима трехосной ориентации. Для решения задачи 2 введем положительно-определенную функцию

$$2V = \alpha V_1(\Lambda) + \omega' J \omega, \quad \alpha > 0 \tag{4.1}$$

обращающуюся в нуль в положении равновесия (1.5) системы (1.1), (1.3).

В качестве $V_1(\Lambda)$ могут быть выбраны, например, функции [4, 5] $V_1(\Lambda) = 2(1 - \lambda_0^2)$ или $V_1(\Lambda) = 4(1 - |\lambda_0|)$.

Управляющий момент $\mathbf{M}$, получаемый из теории Ляпунова с помощью функции (4.1), можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1(\Lambda) + \mathbf{M}_2(\omega)$$

Условимся так выбирать весовой коэффициент α в (4.1), чтобы при любой ориентации твердого тела

$$\mathbf{M}_1(\Lambda) \in M_G = \{\mathbf{M}\colon \mathbf{u} \in G)$$

Вторую составляющую управляющего момента будем вычислять по формуле

$$\mathbf{M}_2(\omega) = \varkappa_* K \omega, \quad K < 0$$

где $\varkappa_*$ — наибольшее значение параметра $\varkappa$ из диапазона $0 < \varkappa \leqslant 1$, при котором выполняется условие

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1(\Lambda) + \varkappa_* K \omega \in M_G \tag{4.2}$$

При таком формировании управляющего момента производная по времени от функции Ляпунова (4.1) является знакопостоянной отрицательной

$$V^{\cdot} = \varkappa_* \omega' K \omega$$

Множество $S_1 = \{\Lambda, \omega\colon \lambda_0 \neq 0, \omega = 0\}$ не содержит целых траекторий исследуемой системы, поэтому управление (4.2) (при соответствующем его доопределении в точке $S_2 = \{\Lambda, \omega : \lambda_0 = 0, \omega = 0\}$, если в этом есть необходимость) обеспечивает асимптотическую устойчивость режиму трехосной ориентации [6].

Отметим, что при отыскании $\varkappa_*$ используется изложенная в п. 2 процедура вычисления наибольшего значения управляющего момента относительно заданного направления.

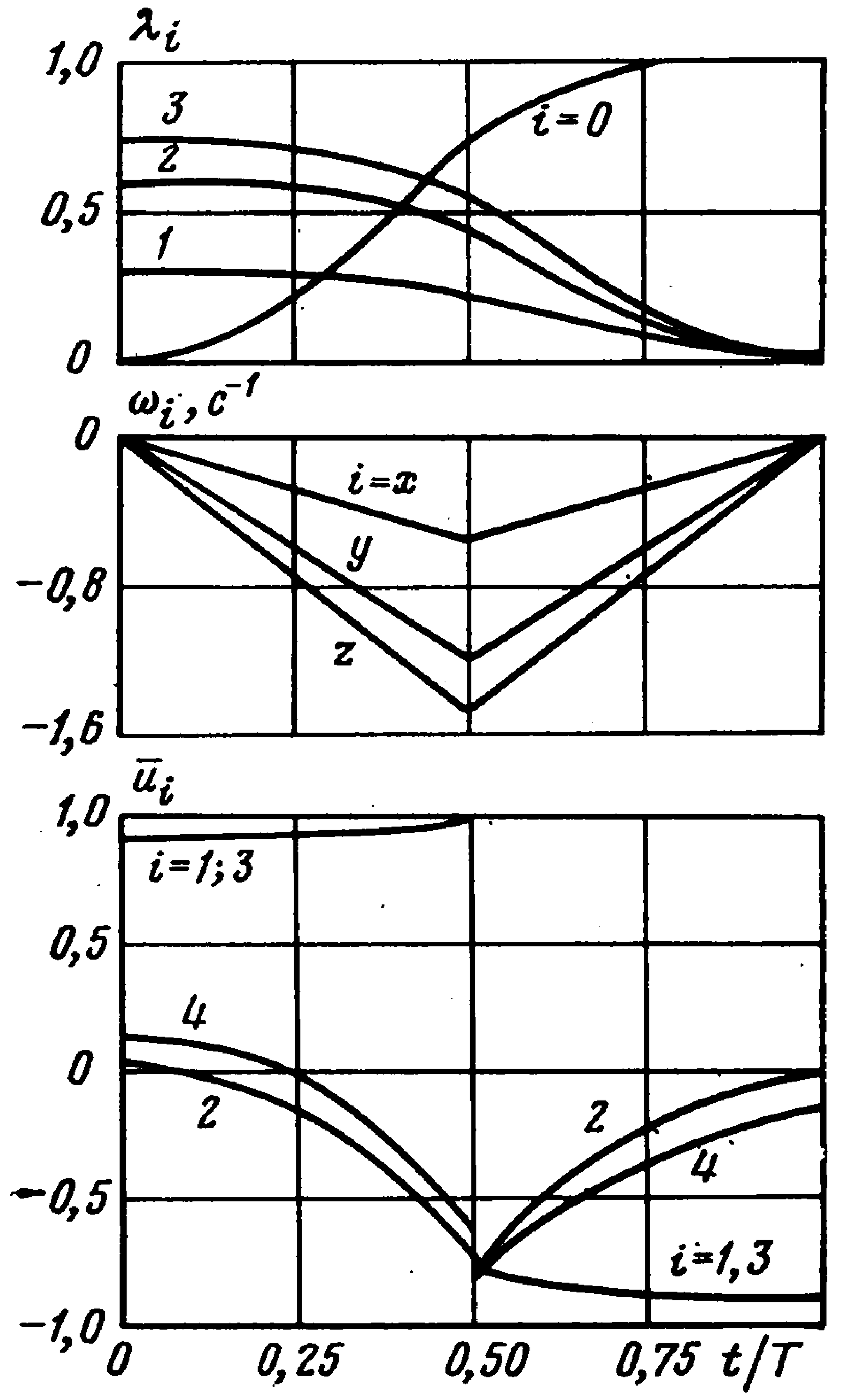
5. Примеры. Для случая $m = 4$ рассмотрим процесс оптимального по быстродействию пространственного разворота твердого тела из начального состояния

$$\Lambda(0) = \{0{,}001;\ 0{,}3;\ 0{,}6;\ 0{,}741619\}, \quad \omega(0) = 0$$

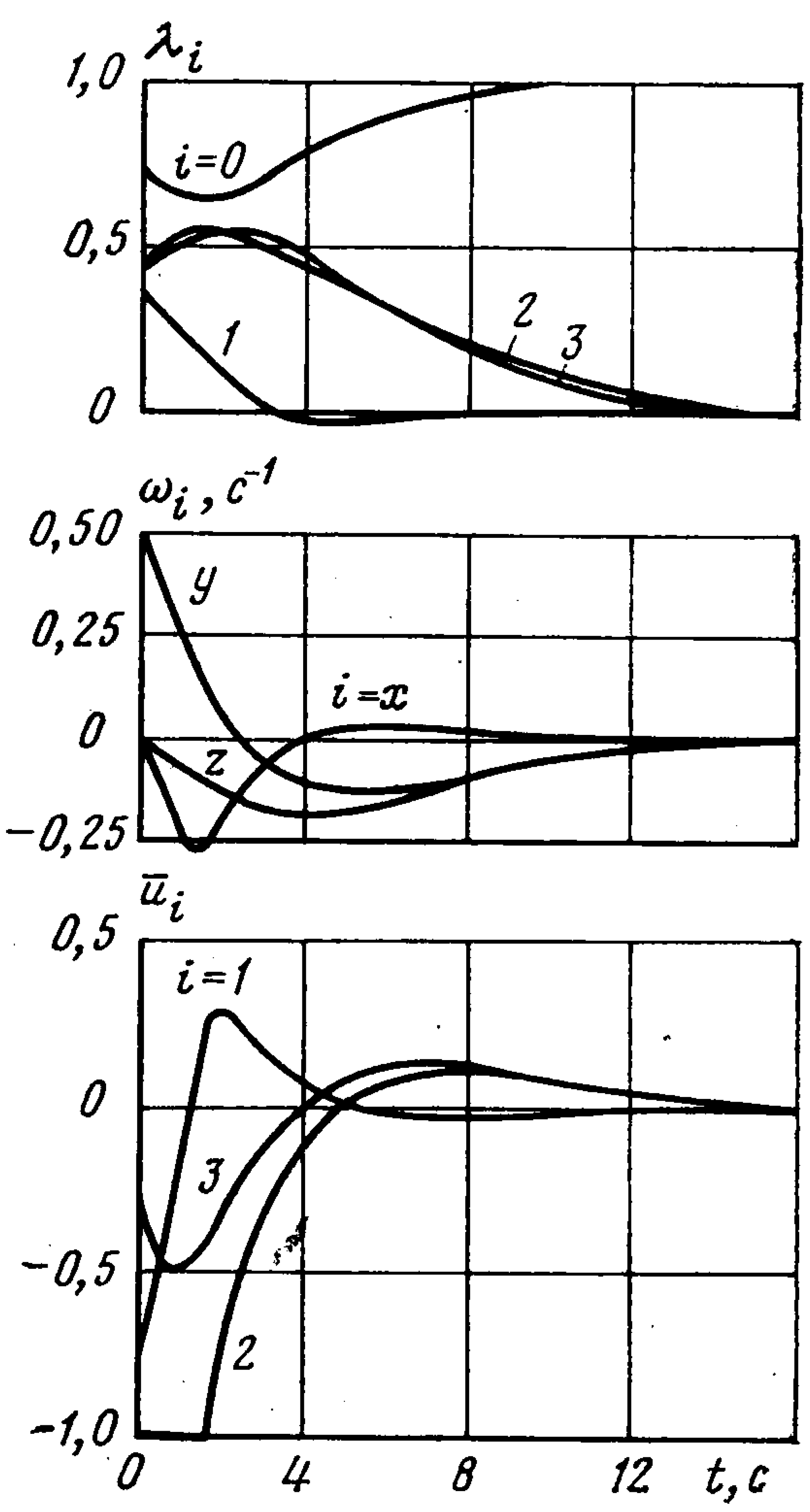
в ориентированное положение (1.5).

Приведенному значению кватерниона $\Lambda(0)$ соответствует ось конечного вращения, направляющие косинусы которой с осями x, y и z равны $\alpha_* = 0{,}3$, $\beta_* = 0{,}6$, $\gamma_* = 0{,}741620$, и угол $\sigma_0 = 3{,}13959$.

Типичные кривые изменения параметров ориентации, угловых скоростей и параметров управления в процессе управляемого движения твердого тела приведены на фиг. 1 ($\bar{u}_i = u_i/u_*$).



Фиг. 1



Фиг. 2

Если при управлении ориентацией твердого тела использовать алгоритм (4.2), то для $m = 3$ типичный характер изменения параметров Родрига — Гамильтона, угловых скоростей и параметров управления в процессе перевода тела из состояния

$$\Lambda(0) = \{0{,}707;\ 0{,}3535;\ 0{,}4342;\ 0{,}432041\}$$

$$\omega_x(0) = \omega_z(0) = 0,\ \omega_y(0) = 0{,}5\ \text{c}^{-1}$$

в режим трехосной ориентации можно проследить на фиг. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петров Б. Н., Боднер В. А., Алексеев К. Б.* Аналитическое решение задачи управления пространственным поворотным маневром.— Докл. АН СССР, 1970, т. 192, № 6, с. 1235.
2. *Зубов В. И., Ермолин В. С., Сергеев С. Л., Смирнов Е. Я.* Управление вращательным движением твердого тела. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. 200 с.
3. *Зубов В. И.* Проблема устойчивости процессов управления. Л.: Судостроение, 1980. 256 с.
4. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
5. *Лебедев Д. В.* Управление ориентацией твердого тела с использованием параметров Родрига — Гамильтона.— Автоматика, 1974, № 4, с. 29.
6. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.

Киев

Поступила в редакцию
2.VI.1980