Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 3, 1981

УДК 521.1 + 531.35

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Баркин Ю. В.

Исследуются несколько семейств периодических и условно-периодических решений задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в однородном поле тяжести. Доказательство существования этих решений, анализ устойчивости и построение основных членов рядов, их представляющих, производится при помощи теории периодических решений Пуанкаре для гамильтоновых систем стандартного вида. Предполагается, что тело близко по распределению масс к осесимметричному, а точка закрепления тела находится вблизи центра масс.

Доказательство существования периодических решений в задаче о движении твердого тела с закрепленной точкой дано в [1], где методом Пуанкаре найдены два семейства периодических решений для осесимметричного и несимметричного твердого тела, которые рождаются из соответствующих эйлеровых периодических решений. На существование подобных решений ранее указали авторы [2].

1. Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки O в однородном поле тяжести. Пусть $Oxyz$ — неподвижная система координат с началом в точке закрепления O и осью Oz, направленной вертикально вверх, $O\xi\eta\zeta$ — система координат, оси которой совпадают с главными осями инерции тела относительно точки O. Введем две промежуточные плоскости Q_1 и Q_2, проходящие через точку закрепления, первая из которых ортогональна вектору $\mathbf{G}$ кинетического момента вращательного движения, а другая ортогональна отрезку OC, соединяющему точку закрепления и центр масс тела C.

Положение центра масс тела в его «собственных» осях определим постоянными координатами r, φ, λ; λ — угол между осью $O\xi$ и линией пересечения плоскостей $O\xi\eta$ и Q_2, φ — угол между направлением на центр масс тела OC и осью инерции $O\zeta$, r — расстояние OC.

Вращательное движение тела вокруг неподвижной точки опишем каноническими переменными Андуайе L, G, H, l, g, h [2]. В этих переменных кинетическая энергия T и силовая функция задачи имеют вид

$$T=\frac{G^2-L^2}{2}\left(\frac{\cos^2 l}{B}+\frac{\sin^2 l}{A}\right)+\frac{L^2}{2C}$$
$$U=mrRn^2[(\alpha\sin\lambda-\beta\cos\lambda)\sin\varphi+\gamma\cos\varphi]$$

Здесь A, B, C — главные моменты инерции тела, n — постоянный коэффициент, равный угловой скорости движения по круговой орбите радиуса R (вблизи поверхности планеты), $n^2=fm_0/R^3$, f — гравитационная постоянная, m_0 и m — массы планеты и твердого тела, R — радиус планеты, создающей поле тяжести, α, β, γ — направляющие косинусы вектора силы тяжести в подвижных осях $O\xi\eta\zeta$

$$\alpha = \sin\rho\,(\cos l \sin g + \sin l \cos g \cos\theta) + \cos\rho \sin l \sin\theta$$
$$\beta = -\sin\rho\,(\sin l \sin g - \cos l \cos g \cos\theta) + \cos\rho \cos l \sin\theta$$
$$\gamma = -\sin\rho \sin\theta \cos g + \cos\theta \cos\rho$$
$$(\cos\theta = L/G, \quad \cos\rho = H/G)$$

где θ — угол между осью инерции тела $O\zeta$ и вектором $\mathbf{G}$, ρ — угол между неподвижной осью Oz (вертикалью) и вектором $\mathbf{G}$.

Для удобства перейдем к новым каноническим переменным согласно одному из правил

$$L' = \frac{L}{A\omega_i}, \quad G' = \frac{G}{A\omega_i}, \quad H' = \frac{H}{A\omega_i}, \quad l' = l, \quad g' = g,$$
$$h' = h, \quad \tau = \omega_i t, \quad F' = \frac{F}{A\omega_i^2} \quad (i = 1, 2)$$

где τ — новая независимая переменная, F' — преобразованный гамильтониан. В первом случае $\omega_1 = n$, а во втором $\omega_2 = n_2^{(0)}$, где $n_2^{(0)}$ — невозмущенное значение угловой скорости вращения тела — $n_2^{(0)} = G_0/A$ (G_0 — соответствующее значение кинетического момента).

Опуская для простоты штрихи при новых переменных, уравнения вращательного движения представим в виде

$$\frac{dL}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial l}, \quad \frac{dG}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial g}, \quad \frac{dH}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial h} \tag{1.1}$$
$$\frac{dl}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial L}, \quad \frac{dg}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial G}, \quad \frac{dh}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial H}$$
$$F = -\frac{G^2 - L^2}{2}\left(\sin^2 l + \frac{A}{B}\cos^2 l\right) - \frac{A}{2C}L^2 + U$$
$$U = \mu_i\,[(\alpha \sin\lambda - \beta\cos\lambda)\sin\varphi + \gamma\cos\varphi], \quad i = 1, \ 2$$

где либо $\mu_1 = mrR/A$, либо $\mu_2 = n^2 mrR/n_2^{(0)2}A$. Очевидно, величина $0 < \mu_1 \ll 1$, если точка закрепления O достаточно близка к центру масс тела, а $0 < \mu_2 \ll 1$ при условии, что угловая скорость вращения тела велика по сравнению с угловой скоростью n (при этом величина $mrR/A \simeq 1$).

В данной работе введем в рассмотрение малый параметр по правилу $\mu = \max\{\mu_1, \ |A - B| / A\}$, сделав дополнительное предположение о том, что распределение плотностей в теле близко к осесимметричному, причем параметры μ_1 и $|A - B| / A$ — суть величины одного порядка. Пусть $\mu = \mu_1 = (q - 1)\delta^{-1}$, где $q = A / B$, а δ — безразмерный параметр порядка единицы.

В результате гамильтониан приводится к стандартному виду

$$F = F_0(L, G) + \mu F_1(L, G, H, l, g) \tag{1.2}$$
$$F_0 = -G^2/2 - L^2(A/C - 1)/2$$
$$F_1 = f_{0,0} + f_{0,1}\cos g + f_{2,0}\cos 2l + f_{1,0}\cos(l + \lambda) +$$
$$+ f_{1,1}\cos(l + g + \lambda) + f_{1,-1}\cos(l - g + \lambda)$$

где коэффициенты f_{k_1,k_2} определяются последовательностью формул

(1.3) $$f_{0,0} = -{}^1/_4\delta G^2 \sin^2\theta + \cos\varphi\cos\rho\cos\theta, \quad f_{0,1} = -\cos\varphi\sin\rho\sin\theta$$
$$f_{2,0} = -{}^1/_4\delta G^2\sin^2\theta, \quad f_{1,0} = -\sin\varphi\cos\rho\sin\theta$$
$$f_{1,1} = -{}^1/_2\sin\varphi\sin\rho\,(1+\cos\theta), \quad f_{1,-1} = -{}^1/_2\sin\rho\sin\varphi\,(-1 + \\ + \cos\theta)$$

Общее решение уравнений (1.1)—(1.3) характеризуется начальными значениями L_0, G_0, H_0, l_0, g_0, h_0 и постоянными параметрами $\varkappa = A/C$, δ, φ, λ, μ.

2. Дальнейшая задача — установить существование и изучить периодические решения уравнений (1.1) при малых значениях параметра μ.

При $\mu = 0$ уравнения допускают семейство периодических решений с периодом T

(2.1) $$L = L_0, \quad G = G_0, \quad H = H_0$$
$$l = n_1^{(0)}\tau + l_0, \quad g = n_2^{(0)}\tau + g_0, \quad h = h_0$$
$$n_1^{(0)} = (\varkappa - 1)L_0, \quad n_2^{(0)} = G_0; \quad G_0 = (\varkappa - 1)L_0N_1/N_2$$

(2.2) $$N_1n_1^{(0)} = N_2n_2^{(0)}, \quad T = 2\pi N_1/n_2^{(0)} = 2\pi N_2/n_1^{(0)}$$

Здесь N_1 и N_2 — целые числа (показатели соизмеримости), L_0, H_0, l_0, g_0, h_0 — произвольные постоянные интегрирования, а величина G_0 определяется из условия соизмеримости (2.2).

Решение (2.1), (2.2) означает, что ось динамической симметрии тела $O\zeta$ описывает конус с постоянным углом полураствора θ_0 ($\cos\theta_0 = L_0 / G_0$) относительно невозмущенного вектора углового момента G_0, сохраняющего постоянную ориентацию в пространстве. При этом тело совершает равномерное вращение относительно оси симметрии с угловой скоростью $n_1^{(0)}$. Причем за N_2 оборотов относительно оси инерции $O\zeta$ его ось симметрии N_1 раз описывает коническую поверхность.

При малых значениях параметра μ уравнения (1.1) также будут допускать периодические решения с периодом T, но лишь для тех порождающих решений из (2.1), которые удовлетворяют группе условий [3]

(2.3) $$N_1n_1^{(0)} = N_2n_2^{(0)}$$

(2.4) $$\Delta_1(F_0) \neq 0, \quad \Delta_2([F_1]) \neq 0$$

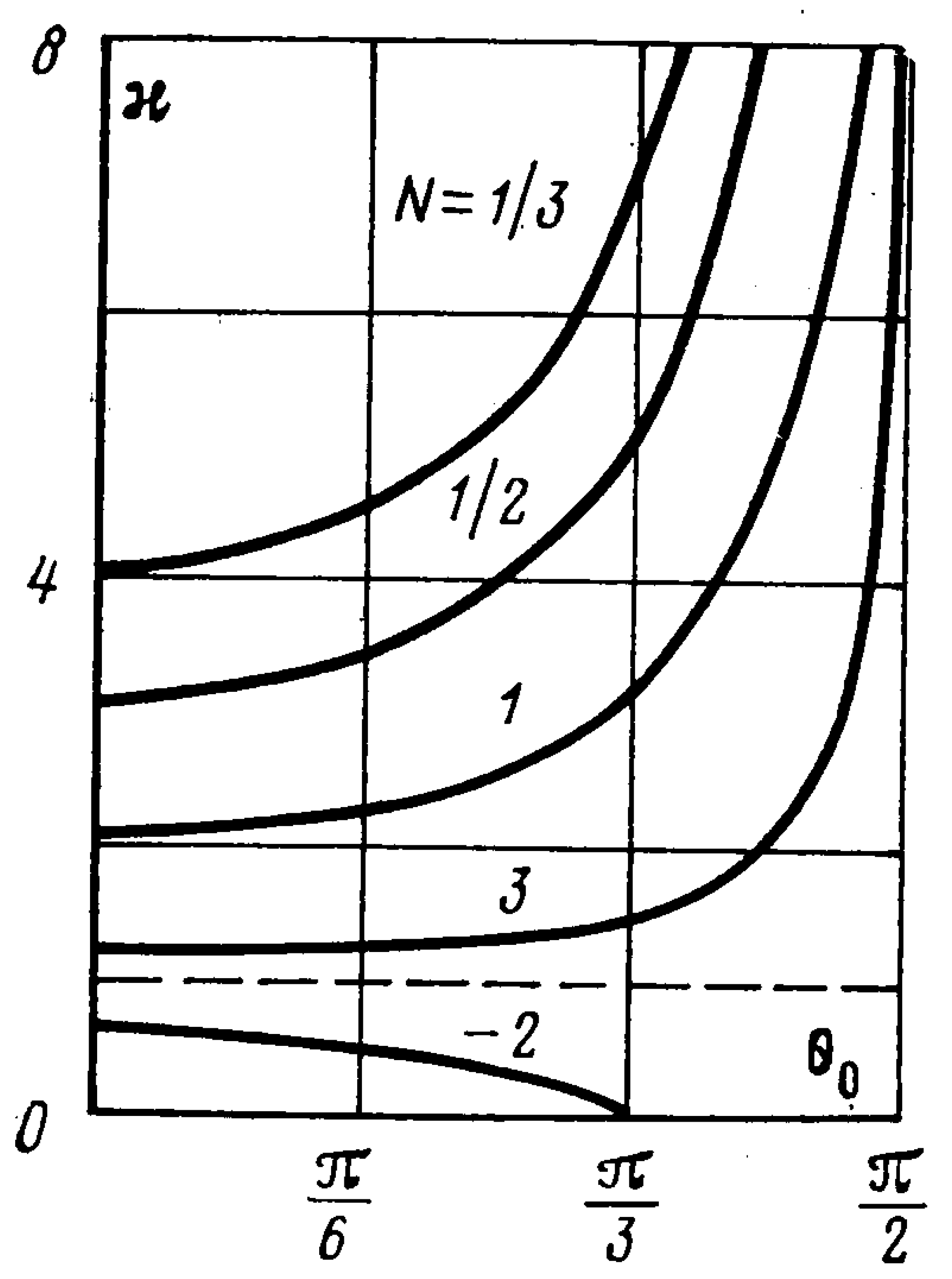
(2.5) $$d[F_1]/dg_0 = d[F_1]/dH_0 = 0$$
$$[F_1] = \frac{1}{T}\int_0^T F_1(L_0, G_0, H_0, l_0, g_0, \tau)\,d\tau$$

где $[F_1]$ — усредненная по периоду T функция F_1, $\Delta_{1,2}$ — определители Гессе от функций F_0 и F_1 по соответствующим переменным L, G и g, H, вычисленные при порождающих значениях переменных, т. е. при $\mu = 0$.

Условие соизмеримости (2.3) определяет порождающее значение угла $\theta = \theta_0$ в зависимости от динамического параметра $\varkappa = A/C$ и типа соизмеримости, $\cos\theta_0 = N_2/(N_1(\varkappa - 1))$ (фиг. 1).

Вычисляя, находим $\Delta_1(F_0) = \varkappa - 1$, а это означает, что первое из условий существования (2.4) выполняется для любых порождающих решений (2.1), (2.2).

Если показатели соизмеримости удовлетворяют неравенству $|N_1| + |N_2| \geqslant 3$, то $[F_1] = f_{0,0}(L_0, G_0)$ и для соответствующих периодических решений нарушается второе условие существования из (2.4). В связи с этим представляет интерес исследовать периодические решения, которым соответствуют показатели соизмеримости $N_1 = N_2 = 1$ либо $N_1 = -N_2 = 1$.



Фиг. 1

В случае соизмеримости $N_1 = N_2 = 1$ имеем

$$[F_1] = f_{0,0}^{(0)} + f_{1,-1}^{(0)} \cos(l_0 - g_0 + \lambda)$$

$$f_{(0,0)}^{(0)} = -{}^1/_4 \delta G_0^2 \sin^2\theta_0 + \cos\varphi\cos\rho_0\cos\theta_0$$

$$f_{1,-1}^{(0)} = -{}^1/_2 \sin\rho_0 \sin\varphi\,(-1 + \cos\theta_0)$$

где индекс (0) означает порождающее значение соответствующей переменной.

Первое из уравнений (2.5) имеет решения:

1) $\rho_0 = 0, \pi$, 2) $\theta_0 = 0$, 3) $\varphi = 0, \pi$, 4) $l_0 - g_0 + \lambda = 0, \pi$,

а другое уравнение из (2.5) приводится к виду

$$\cos\varphi\sin\rho_0\cos\theta_0 + {}^1/_2\cos\rho_0\sin\varphi(-1 + \cos\theta_0)\cos(l_0 - g_0 + \lambda) = 0$$

Анализируя условие $\Delta_2 \neq 0$, приходим к выводу, что оно нарушено для решений 1) — 3). Следовательно, порождающие периодические решения определяются формулами

$$l_0 - g_0 + \lambda = 0, \pi, \quad \cos\varphi\sin\rho_0\cos\theta_0 + {}^1/_2\cos\rho_0\sin\varphi\,(-1 + \cos\theta_0)\varepsilon = 0 \tag{2.6}$$

$$\varepsilon = \cos(l_0 - g_0 + \lambda) = \pm 1$$

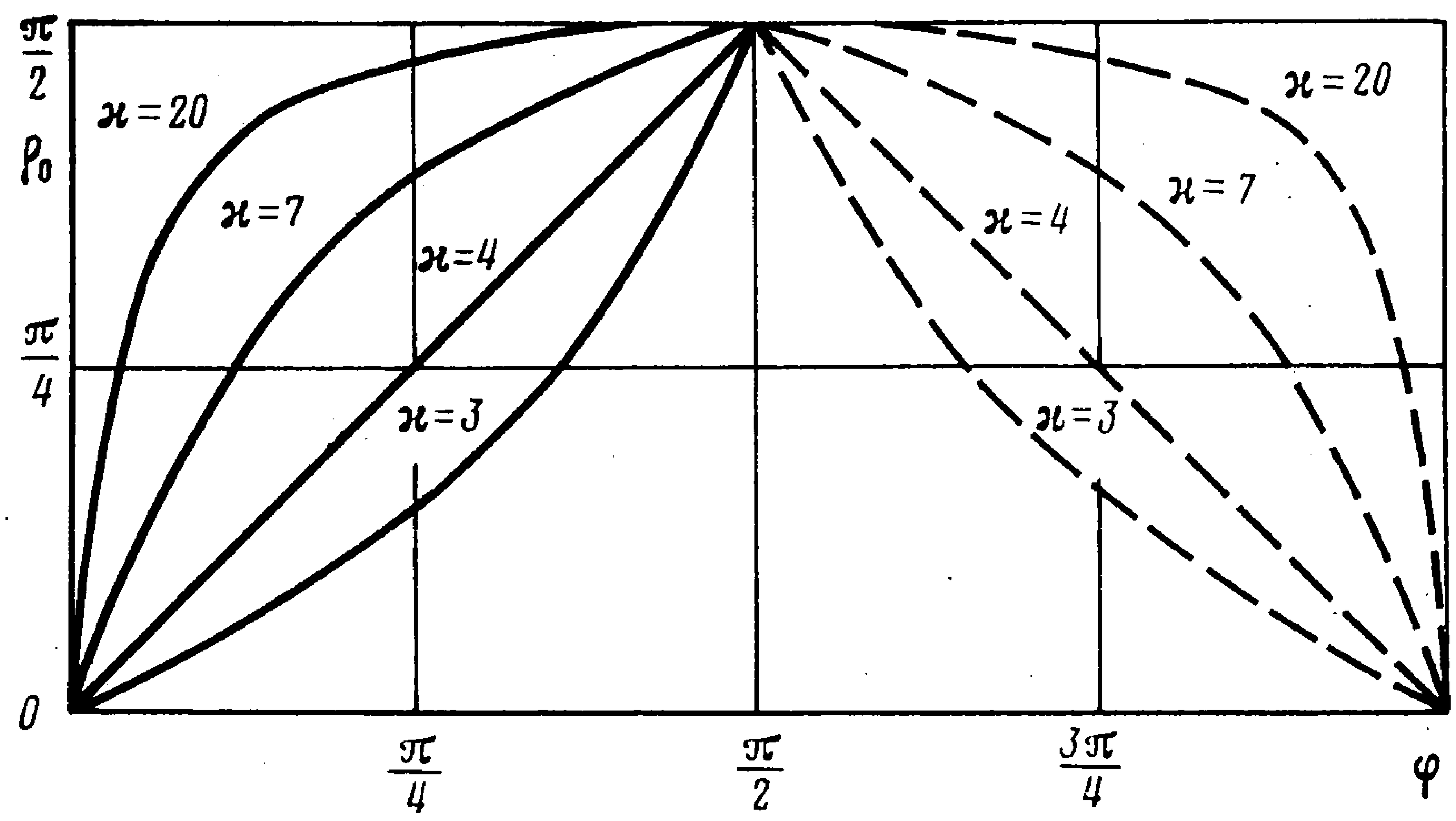
для которого

$$\Delta_2 = \frac{\sin\varphi(\cos\theta_0 - 1)\varepsilon}{2G_0^2\sin\rho_0}\Big[\cos\varphi\cos\rho_0\cos\theta_0 + \frac{1}{2}\sin\rho_0\sin\varphi(\cos\theta_0 - 1)\varepsilon\Big] \neq 0$$

за исключением значений $\varphi = 0, \pi/2, \pi$, $\theta_0 = 0, \pi/2$ ($\rho_0 = 0, \pi/2, \pi$).

Теорема 1. Уравнения движения тяжелого твердого тела (1.1)—(1.3) при достаточно малых значениях параметра μ ($0 < \mu \leqslant \mu_0 \ll 1$) допускают семейство периодических решений, которые рождаются из решений (2.1) невозмущенных уравнений при $\cos\theta_0 = (\varkappa - 1)^{-1}$, $\operatorname{tg}\rho_0 = \operatorname{tg}\varphi(\varkappa - 2)\varepsilon/2$, $l_0 - g_0 + \lambda = 0, \pi$ ($\theta_0 \neq 0, \pi/2$; $\varphi \neq 0, \pi/2, \pi$), произвольных начальных условиях G_0, l_0, g_0 и значениях параметров $\varkappa > 2$, $0 < \varphi < \pi$, $0 < \lambda \leqslant 2\pi$, δ, $0 < \mu \leqslant \mu_0 \ll 1$.

3. Уравнения движения твердого тела допускают два первых интеграла $F = c_1 = \text{const}$ и $H = c_2 = \text{const}$, вследствие чего четыре характеристических показателя найденных периодических решений равны нулю [3]. Два других характеристических показателя формально представимы в виде



Фиг. 2.

рядов $\alpha^{(1,2)} = \alpha_1^{(1,2)}\sqrt{\mu} + \alpha_2^{(1,2)}\mu + \ldots$, основные коэффициенты которых вычисляются согласно методу [3]

$$\alpha_1^{(1,2)} = \pm [{}^1/_2\, \varkappa \sin\rho_0 \sin\varphi\, (\cos\theta_0 - 1)\varepsilon]^{1/2}$$

Таким образом, необходимые условия устойчивости выполняются для решений (2.6) при $\varepsilon = 1$. Соответствующие порождающие периодические решения определяются формулами

(3.1) $$\cos\theta_0 = 1/(\varkappa - 1)\,(\varkappa > 2),\ \operatorname{tg}\rho_0 = \operatorname{tg}\varphi\,[(\varkappa - 2)/2],\ l_0 - q_0 + \lambda = 0$$

На фиг. 2 сплошными линиями представлены графики кривых $\rho_0(\varphi, \varkappa)$, соответствующих решению (3.1).

4. Периодические решения уравнений (1.1)—(1.3), близкие к порождающему решению (3.1), представляются бесконечными рядами по степеням малого параметра μ

(4.1) $$\begin{aligned} L &= L_0 + \mu L_1 + \mu^2 L_2 + \ldots \\ G &= G_0 + \mu G_1 + \mu^2 G_2 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h &= h_0 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + \ldots \end{aligned}$$

где L_s, $G_s, \ldots, h_s$ $(s = 1, 2, \ldots)$ — периодические функции τ, подлежащие определению. При $\mu = 0$ решение (4.1) переходит в соответствующее порождающее периодическое решение.

Приведем формулы для решения (4.1) с точностью до μ

(4.2) $$\begin{aligned} L &= L_0 + \mu\,\{L_1^{(0)} + L_1^{(1)}\cos(\tau + l_0 + \lambda) + \\ &+ L_1^{(2)}\cos 2(\tau + l_0) + L_1^{(3)}\cos(2\tau + l_0 + g_0 + \lambda)\} \\ l &= \tau + l_0 + \mu\,\{l_1^{(1)}\sin(\tau + l_0 + \lambda) + l_1^{(2)}\sin 2(\tau + l_0) + \\ &+ l_1^{(3)}\sin(\tau + g_0) + l_1^{(4)}\sin(2\tau + l_0 + g_0 + \lambda)\} \\ G &= G_0 + \mu\,\{G_1^{(0)} + G_1^{(1)}\cos(\tau + g_0) + G_1^{(2)}\cos(2\tau + l_0 + \\ &+ g_0 + \lambda)\} \\ g &= \tau + g_0 + \mu\,\{g_1^{(1)}\sin(\tau + l_0 + \lambda) + g_1^{(2)}\sin 2(\tau + l_0) + \\ &+ g_1^{(3)}\sin(\tau + g_0) + g_1^{(4)}\sin(2\tau + l_0 + g_0 + \lambda)\} \end{aligned}$$

(4.3) $$\begin{aligned} H &= H_0 + \mu\,\{H_1^{(0)}\} \\ h &= h_0 + \mu\,\{h_1^{(1)}\sin(\tau + l_0 + \lambda) + h_1^{(2)}\sin(\tau + g_0) + \\ &+ h_1^{(3)}\sin(2\tau + l_0 + g_0 + \lambda)\} \end{aligned}$$

Коэффициенты $L_1^{(s)}$, $G_1^{(s)}$, ..., $h_1^{(s)}$ определяются последовательностью формул (выражение для $H_1^{(0)}$ ввиду громоздкости не приводим)

$$L_1^{(0)}=(\varkappa-1)^{-1}\left\{\frac{\delta}{2}G_0\cos\theta_0+a\right\},\quad G_1^{(0)}=-\frac{\delta}{2}G_0+\cos\theta_0 a \tag{4.4}$$

$$a=\frac{1}{G_0}\left(\cos\varphi\cos\rho_0-\frac{1}{2}\sin\rho_0\sin\varphi\right)$$

$$L_1^{(1)}=-\sin\varphi\cos\rho_0\sin\theta_0,\quad L_1^{(2)}=-\frac{\delta}{4}G_0^2\sin^2\theta_0,$$

$$G_1^{(1)}=-\cos\varphi\sin\rho_0\sin\theta_0$$

$$G_1^{(2)}=L_1^{(3)}=-{}^1/_4\sin\varphi\sin\rho_0(1+\cos\theta_0)$$

$$l_1^{(1)}=-\frac{1}{G_0}\operatorname{ctg}\theta_0\sin\varphi\cos\rho_0-(\varkappa-1)\sin\varphi\cos\rho_0\sin\theta_0,$$

$$l_1^{(3)}=-\frac{1}{G_0}\operatorname{ctg}\theta_0\cos\varphi\sin\rho_0$$

$$l_1^{(2)}=\frac{\delta}{4}G_0\cos\theta_0-\frac{\delta}{8}(\varkappa-1)G_0^2\sin^2\theta_0,$$

$$l_1^{(4)}=\frac{1}{4G_0}\sin\varphi\sin\rho_0+\frac{1}{2}(\varkappa-1)G_1^{(2)}$$

$$g_1^{(1)}=\frac{\sin\varphi\cos\rho_0\cos 2\theta_0}{G_0\sin\theta_0},\quad g_1^{(2)}=\frac{\delta G_0}{4}$$

$$g_1^{(3)}=-\frac{\cos\varphi}{G_0\sin\rho_0\sin\varphi}(\cos^2\rho_0\sin^2\theta_0+\cos^2\theta_0\sin^2\rho_0)+G_1^{(1)}$$

$$g_1^{(4)}=-\frac{\sin\varphi}{4G_0}[\operatorname{ctg}\rho_0\cos\rho_0(1+\cos\theta_0)-\cos\theta_0\sin\rho_0]+\frac{1}{2}G_1^{(2)}$$

$$h_1^{(1)}=-\frac{L_1^{(1)}}{G_0},\quad h_1^{(2)}=-\frac{1}{G_0}\operatorname{ctg}\rho_0\cos\rho_0\cos\varphi\sin\theta_0$$

$$h_1^{(3)}=-\frac{1}{4G_0}\operatorname{ctg}\rho_0\cos\rho_0\sin\varphi(1+\cos\theta_0)$$

Отметим, что здесь коэффициенты (4.4) вычисляются при порождающих значениях величин G_0, θ_0, ρ_0, l_0, g_0, определяемых формулами (3.1).

Перечислим некоторые свойства периодических решений:

1) начальные условия этих решений приближенно определяются формулами

$$L=L_0+\mu L_1^{(0)}+\ldots,\quad G=G_0+\mu G_1^{(0)}+\ldots,$$
$$h=h_0+\ldots$$

2) проекция вектора кинетического момента на ось Oz для каждого периодического решения из (4.2)—(4.4) остается постоянной и равной $H_0+\mu H_1^{(0)}+\ldots=\text{const}$;

3) вектор **G** кинетического момента совершает периодические колебания малой амплитуды вблизи своего первоначального положения в пространстве;

4) на регулярное прецессионное движенпие тела относительно вектора **G** накладываются периодические колебания малой амплитуды, определяемые формулами (4.4).

5. Воспользуемся теперь первым интегралом $H=c_2$ и понизим порядок уравнений (1.1) на две единицы. В результате задачу сведем к двухстепенной, а уравнения движения к виду

$$\frac{dL}{d\tau}=\frac{\partial F}{\partial l},\quad \frac{dl}{d\tau}=-\frac{\partial F}{\partial L},\quad \frac{dG}{d\tau}=\frac{\partial F}{\partial g},\quad \frac{dg}{d\tau}=-\frac{\partial F}{\partial G} \tag{5.1}$$

Гамильтониан F определяется теми же формулами (1.2), (1.3), в которых достаточно положить $\cos\rho = c_2/G$, т. е. $F = F_0(L, G) + \mu F_1(L, G, l, g)$. После нахождения какого-либо решения уравнений (5.1) переменные H и h вычисляются по формулам

$$(5.2)\qquad H = c_2, \quad h - h_0 = -\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\partial F}{\partial H}\, d\tau \quad (h_0 = h(\tau_0))$$

Существование периодических решений Пуанкаре для уравнений (5.1) исследовалось в [1].

Уравнения (5.1) допускают семейство периодических решений, которые при $\mu = 0$ переходят в следующие порождающие решения:

$$(5.3)\qquad \begin{gathered} L = L_0, \quad G = G_0, \quad l = n_1^{(0)}\tau + l_0, \quad g = n_2^{(0)}\tau + g_0 \\ n_1^{(0)} = n_2^{(0)} = (\varkappa - 1)L_0 = G_0, \quad l_0 - g_0 + \lambda = 0,\ \pi, \quad \cos\theta_0 = \\ = (\varkappa - 1)^{-1}\,(\varkappa > 2) \end{gathered}$$

Решение (5.3) периодическое с периодом $T = 2\pi/G_0$ и соответствует случаю соизмеримости $n_1^{(0)} = n_2^{(0)}$ (аналогичные решения имеют место в случае соизмеримости $n_1^{(0)} = -n_2^{(0)}$).

В порождающем решении произвольно выбираются: G_0 — величина вектора $\mathbf{G}$, определяющая период периодического решения, g_0 — угловое расстояние между плоскостями Oxy и $O\xi\eta$ на промежуточной плоскости, постоянный параметр $\varkappa > 2$. При этом из решений (5.3) должны быть исключены те, которым соответствуют значения $c_2 = 0$, $\varphi = 0$, $\pi/2$, π, $\theta_0 = 0$.

Основные члены рядов, представляющих периодические решения, определяются формулами (4.2), (4.4), в которых величины ρ_0, φ, G_0, $\varkappa$, δ, вообще говоря, произвольны.

Необходимым условиям устойчивости удовлетворяют те из периодических решений, для которых $\cos\theta_0 = (\varkappa - 1)^{-1}$, $l_0 - g_0 + \lambda = 0$.

Периодическим решениям приведенной системы уравнений (5.1) соответствуют в общем случае условно-периодические решения исходных уравнений (4.1).

Действительно, вычисляя квадратуру в (5.2) при значениях переменных L, G, l, g, определяемых формулами (4.2), (4.4), получаем

$$l - h_0 = \mu\Lambda\tau + \mu\,\{(h_1^{(1)} + h_1^{(2)})\sin(\tau + g_0) + h_1^{(3)}\sin 2(\tau + g_0)\}$$

где $h_1^{(1)}$, $h_1^{(2)}$, $h_1^{(3)}$ — постоянные коэффициенты, определяемые формулами (4.4) при порождающих значениях переменных G_0, θ_0 и произвольных значениях ρ_0, а $\mu\Lambda n$ — угловая скорость «векового» изменения положения вектора $\mathbf{G}$ кинетического момента

$$\Lambda = G_0^{-1}\operatorname{cosec}\rho_0\,[\cos\varphi\cos\theta_0 + {}^1/_2\sin\varphi\operatorname{ctg}\rho_0\,(1 + \cos\theta_0)\,\varepsilon]$$

Таким образом, для рассматриваемых здесь решений вектор $\mathbf{G}$ описывает конус относительно вертикали за время $T_h = 2\pi/(\mu\Lambda n)$ с углом полураствора ρ. При этом на медленное равномерное вращение вектора $\mathbf{G}$ накладываются периодические колебания малой амплитуды порядка μ. В системе координат, связанной с вектором $\mathbf{G}$, тело, близкое по динамическому строению к осесимметричному, совершает периодические вращательные движения с периодом $T = 2\pi/n_1^{(0)}$. В частном случае, когда $\Lambda = 0$, вектор $\mathbf{G}$ совершает лишь периодические колебания малой амплитуды вблизи своего первоначального положения. При этом значения ρ_0 определяются формулой из (2.6) и условно-периодическое решение переходит в периодическое решение (4.2)—(4.4).

Теорема 2. При достаточно малых значениях параметра μ уравнения движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки допускают 9-параметрическое семейство условно-периодических решений, для которых произвольно выбираются начальные условия G_0, g_0, ρ_0, h_0 и параметры задачи $\varkappa > 2$, $0 < \varphi < \pi$ $(\varphi \neq \pi/2)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 2\pi$, δ, $0 < \mu \leqslant \leqslant \mu_0 \ll 1$.

Отметим, что найденные решения носят весьма общий характер, так как содержат 9 произвольных параметров. Для сравнения укажем соответствующие произвольные начальные условия и безразмерные постоянные в известных решениях рассматриваемой задачи:

В случае Эйлера — 8 параметров: G_0, θ_0, ρ_0, l_0, g_0, h_0, $\varkappa$, q (ограничение $r = 0$).

В случае Лагранжа — 9 параметров: G_0, θ_0, ρ_0, l_0, g_0, h_0, $\varkappa$, r, λ (ограничения на параметры: $q = 1$, $\varphi = 0, \pi$).

В случае Ковалевской — 8 параметров: G_0, θ_0, ρ_0, l_0, g_0, h_0, r, λ (ограничения на параметры: $\varkappa = 2$, $q = 1$, $\varphi = \pi/2$).

В решении Гесса — Аппельрота — 8 параметров: G_0, ρ_0, l_0, g_0, h_0, $\varkappa$, q, r; ограничения на начальные условия и параметры

$$\operatorname{tg}\theta_0 \sin l_0 = \mp\sqrt{\frac{\varkappa - q}{q-1}}\,\varepsilon_0, \quad \lambda = \frac{\pi}{2}\,;\ \frac{3}{2}\pi$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\sqrt{\frac{q-1}{\varkappa - q}}, \quad \varepsilon_0 = \pm 1$$

6. Используя интеграл энергии $F = c_1$, порядок уравнений (5.1) понизим на две единицы и приведем их к форме уравнений Уиттекера. Для этого применим к уравнению

$$F_0(L, G) + \mu F_1(L, G, l, g) - c_1 = 0$$

теорему о неявной функции и разрешим его относительно переменной G. Получим

$$G = \Phi = \Phi_0 + \mu\Phi_1 + \mu^2\Phi_2 + \ldots$$

$$\Phi_0 = [-2c_1 - (\varkappa - 1)L^2]^{1/2}, \quad \Phi_1 = -\frac{F_1}{\Phi_0}$$

$$\Phi_2 = -F_1\left(\frac{\partial F_1}{\partial G}\right)_{G=\Phi_0} - \frac{F_1^2}{2\Phi_0}$$

Это позволяет записать уравнения движения твердого тела в следующем виде:

$$\frac{dL}{dg} = \frac{\partial\Phi}{\partial l}, \quad \frac{dl}{dg} = -\frac{\partial\Phi}{\partial L} \tag{6.1}$$

$$\Phi = \Phi_0(L) + \mu\Phi_1(L, l, g) + \mu^2\Phi_2(L, l, g) + \ldots$$

Здесь Φ — новый гамильтониан, представляемый бесконечным рядом по степеням параметра μ, сходящимся при достаточно малых значениях этого параметра $0 < \mu \leqslant \mu_0 \ll 1$.

Если удастся найти какое-либо решение уравнений (6.1), то ему будет соответствовать решение исходных дифференциальных уравнений (1.1), определяемое в квадратурах

(6.2) $$H = c_2, \ G = \Phi(L, l, g)$$

(6.3) $$\int\limits_{g_0}^{g} \frac{dg}{\partial F/\partial G} = \tau_0 - \tau, \quad \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \frac{\partial F}{\partial H} d\tau = h_0 - h$$

где g_0, h_0 — значения переменных g и h при $\tau = \tau_0$.

При $\mu = 0$ уравнения (6.1) допускают периодические решения ($n^{(0)}$ — рациональное число)

(6.4) $$L = L_0, \ l = l^0 = n^{(0)}g + l_0$$
$$n^{(0)} = \partial\Phi_0/\partial L_0 = (\varkappa - 1)L_0/\Phi_0 = n_1^{(0)}/n_2^{(0)} = N_2/N_1$$

Будем искать периодические решения уравнений (6.1), близкие к решениям (6.4), в форме степенных рядов

(6.5) $$L = L_0 + \mu L_1 + \mu^2 L_2 + \ldots, \ l = l^0 + \mu l_1 + \mu^2 l_2 + \ldots$$

где L_s, l_s — периодические функции переменной g.

В случае соизмеримости $N_1 = N_2 = 1$, который рассматривался выше для исходных дифференциальных уравнений, условия существования рядов (6.5) имеют простой вид

$$\partial^2\Phi_0/\partial L_0^2 \neq 0, \ \partial [\Phi_1]/\partial l_0 = 0, \ \partial^2 [\Phi_1]/\partial l_0^2 \neq 0$$
$$[\Phi_1] = -G_0^{-1} [f_{0,0}(L_0) + f_{1,-1}(L_0)\cos(l_0 + \lambda)]$$
$$f_{0,0} = {}^1/_4\delta G_0^2 \sin^2\theta_0 - \cos\varphi\cos\rho_0\cos\theta_0,$$
$$f_{1,-1} = {}^1/_2 \sin\rho_0 \sin\varphi\,(-1 + \cos\theta_0)$$
$$G_0 = [-2c_1 - (\varkappa - 1)L_0^2]^{1/2}, \ \cos\rho_0 = c_2/G_0, \ \cos\theta_0 = L_0/G_0$$

где $[\Phi_1]$ — усредненное по периоду $T = 2\pi$ значение функции $\Phi_1 = \Phi_1(L_0, l_0, g)$.

Таким образом, периодические по g решения уравнений (6.1) существуют при достаточно малых значениях параметра μ и значениях $L_0 = \pm [2c_1/(\varkappa(1 - \varkappa))]^{1/2}$, $l_2 + \lambda = 0, \pi$, если только $\rho_0 \neq 0, \pi$; $\varphi \neq 0, \pi$; $\theta_0 \neq 0$.

Найденным здесь периодическим решениям соответствуют решения исходных уравнений (1.1). Не задаваясь целью построения этих решений, отметим их характерные особенности.

Первое уравнение из (6.3) позволяет определить зависимость $g(\tau)$. Обозначим через $\bar{n} = -[\partial F/\partial G_0]$ постоянную составляющую функции — $\partial F/\partial G$ по отношению к переменной g и преобразуем это уравнение к виду уравнения Лангранжа

(6.6) $$g = \sigma + \mu\psi(g, \mu)$$
$$\sigma = \bar{n}(\tau - \tau_0), \quad \bar{n} = -\frac{\partial F_0}{\partial G_0} - \mu\frac{\partial [F_1]}{\partial G_0}$$

Здесь $[F_1]$ означает осреднение функции F_1 по переменной g.

Решение уравнения (6.6) представляется рядом Лагранжа. Следовательно, разность $g - \sigma$ — периодическая функция переменной τ с периодом $\bar{T} = 2\pi/\bar{n}$, отличным от периода соответствующего порождающего решения $T = 2\pi/n$. Это означает, что переменные L, l, G, g в соответствии с формулами (6.2), (6.3) — также периодические функции τ с периодом T. Таким образом, периоды порождающих и соответствующих периодических решений различаются на величину порядка μ. Подобные решения в небесной механике принято называть периодическими решениями типа решений Шварцшильда.

Наконец, вторая квадратура из (6.3) определяет переменную $h(\tau)$ как условно-периодическую функцию вида $h(\tau) = \mu\Lambda\tau + \Psi(\tau)$, где $\mu\Lambda n$ — угловая скорость прецессии вектора G, $\Psi(\tau)$ — периодическая функция τ с периодом $\bar{T}$.

В заключение отметим, что аналогичные классы решений и тем же методом могут быть найдены и исследованы для твердого тела, обладающего произвольным динамическим строением, при предположении, что $\mu = (n/n_1^{(0)})^2 \ll 1$. Для этого к анализу достаточно привлечь уравнения движения в переменных «действие — угол», введенных на основе задачи Эйлера — Пуансо. Более того, новые семейства периодических и условно-периодических решений нетрудно установить в результате применения метода Пуанкаре и уравнений вращательного движения твердого тела, записанных в переменных «действие — угол», которые должны быть получены на основе интегрируемых задач динамики твердого тела в случаях Лагранжа и Ковалевской.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В. В.* Новые периодические решения в задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 3, с. 407.
2. *Демин В. Г.*, *Киселев Ф. И.* О периодических движениях твердого тела в центральном ньютоновском поле.— ПММ, 1974, т. 38, с. 224.
3. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1. М.: Наука, 1971.

Москва

Поступила в редакцию
22.II.1980