

УДК 531.36

## ОБ УРАВНЕНИЯХ ДИНАМИКИ СИСТЕМ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ТЕЛ

Лилов Л. К., Чириков В. А.

Излагается метод вывода уравнений движения механических систем, составленных из произвольного числа абсолютно твердых тел, содержащих как замкнутые, так незамкнутые цепи. Предложенный метод имеет универсальный характер и удобен для алгоритмизации и программирования на ЭВМ.

Для описания систем многих тел, имеющих структуру взаимосвязей с замкнутыми цепями, наиболее общим является метод, предложенный в [1]. Его существенный недостаток состоит, однако, в отсутствии формального аппарата для описания связей в системе и неполное использование информации об относительном движении в соседних телах, обусловленном отбрасыванием части шарниров при превращении системы с замкнутыми цепями в систему со структурой дерева.

Излагаемый ниже метод вывода динамических уравнений может быть применен к механическим системам, представляющим собой совокупность тел, связанных голономными и неголономными, склерономными и реономными связями. Предполагается, что система взаимосвязей такая, что однократным разрезанием подходящих тел можно получить систему, не содержащую замкнутых цепей. Для простоты изложения метод продемонстрирован на склерономных голономных системах, часто встречающихся на практике. Предлагаемый метод является развитием формализма, изложенного в [2].

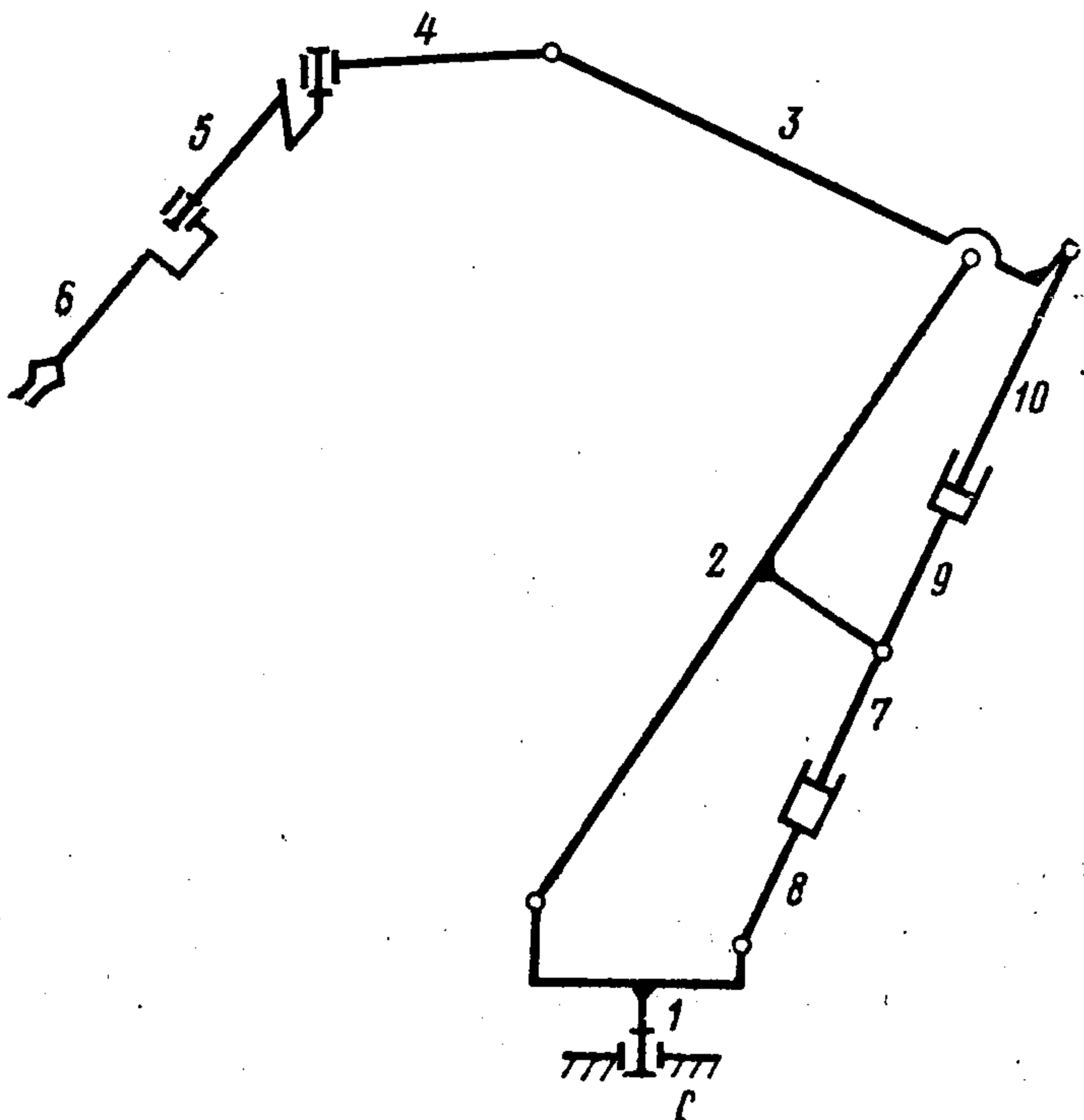
**1. Описание структуры системы.** Рассматривается голономная система, состоящая из  $N + 1$  абсолютно твердых тел, связанных произвольным образом шарнирами, и содержащая замкнутые и незамкнутые кинематические цепи. Примером такой системы служит исполнительный орган манипулятора «Coat-a-Matic» (фиг. 1).

В понятие шарнир вкладывается самый общий смысл. Предполагается, что между двумя телами существует не более одного шарнира и каждый шарнир соединяет только два тела системы, которые в дальнейшем будем называть соседними. Движение одного тела системы принимается предварительно заданным. Этому телу присваивается номер 0. Остальные тела системы нумеруются от 1 до  $N$  произвольным образом. Шарниры также нумеруются произвольно от 1 до  $n$ . В системе предполагается наличие замкнутых контуров, поэтому  $n > N$ .

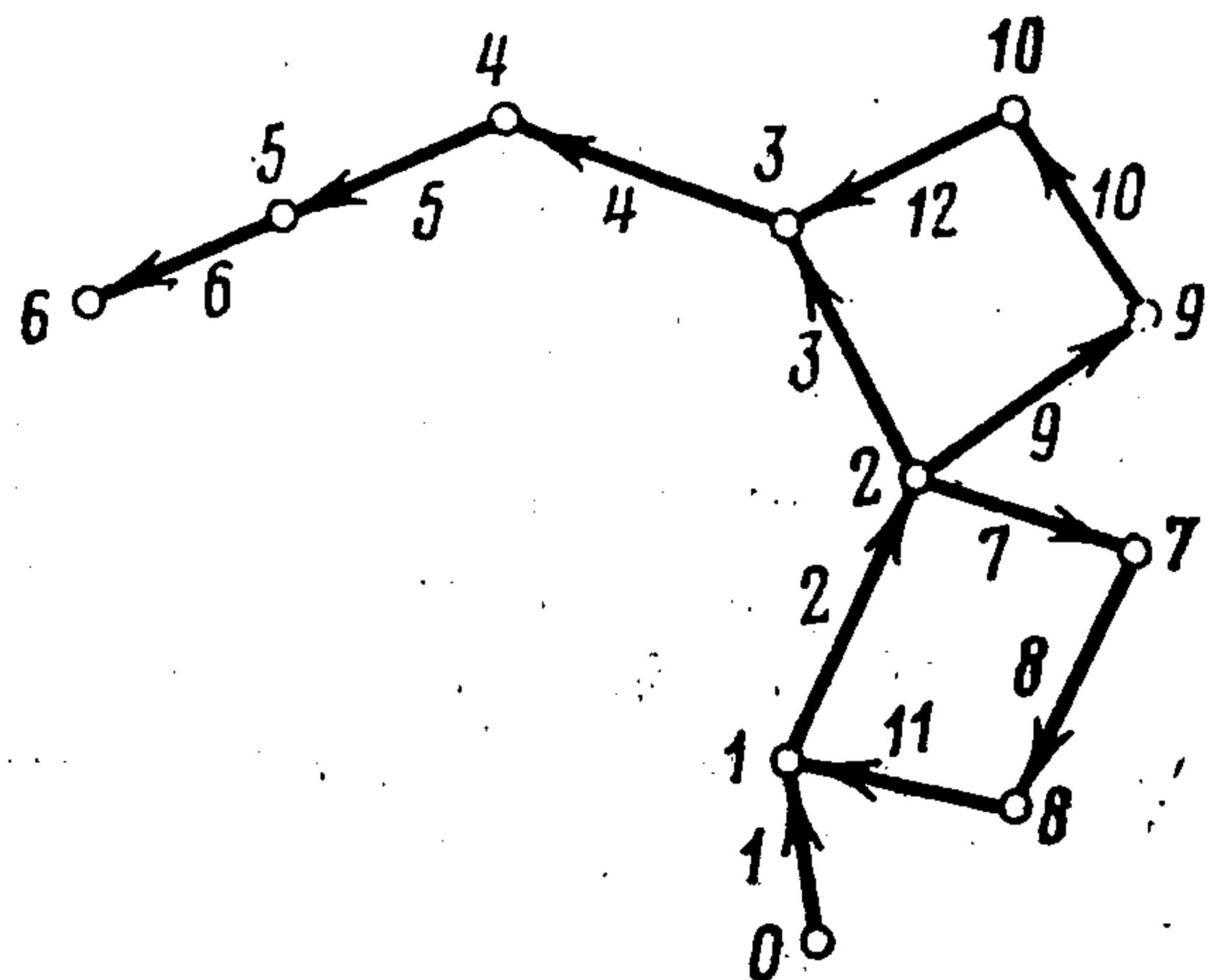
Структуру системы представим графом, вершины  $s_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) которого символизируют тела системы, а ребра  $u_a$  ( $a = 1, 2, \dots, n$ ) — шарниры. Этот граф назовем первичным. Первичный граф исполнительного органа манипулятора (фиг. 1) представлен на фиг. 2, где также показан один из возможных способов нумерации тел и шарниров системы.

Путем размыкания замкнутых контуров превратим первичный граф в граф со структурой дерева. Предполагаем, что такое размыкание можно

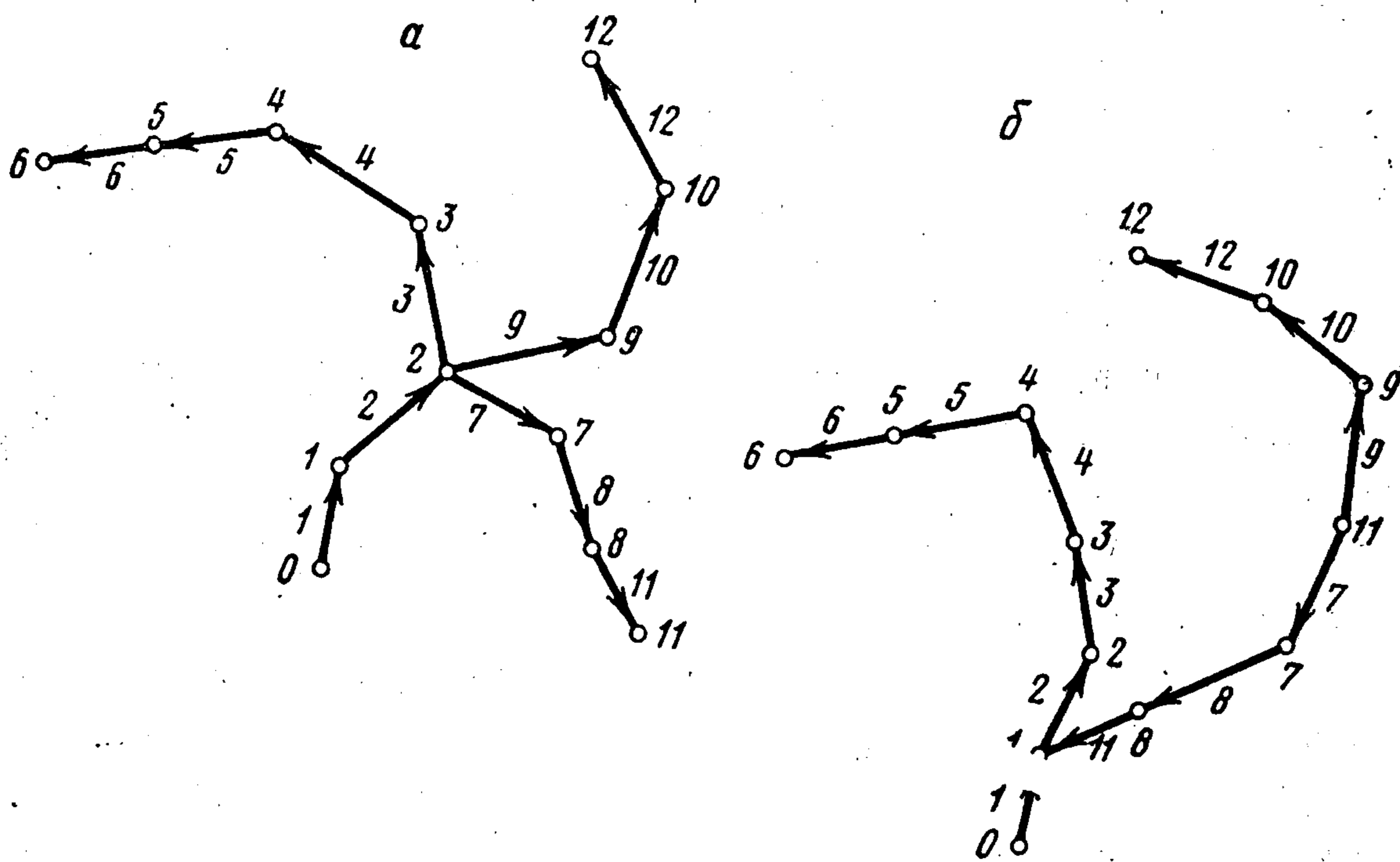
провести посредством однократного раздвоения подходящих вершин первичного графа. При раздвоении два образа одной вершины остаются не связанными непосредственно между собой и принадлежат к различным



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

ветвям полученного открытого графа. Новый граф, который назовем вторичным, имеет, очевидно, столько новых вершин, сколько проведено раздвоений. Новым вершинам присвоим номера от  $N + 1$  до  $n$ . Превращение графа на фиг. 2 в открытый может быть осуществлено, например, посредством раздвоения вершин с номерами 1 и 3 (фиг. 3, а) или с номерами 2 и 3 (фиг. 3, б). Во вторичном графе однозначным образом определяется так называемый путь между двумя вершинами. Это такая последовательность вершин и ребер, связывающая рассматриваемые вершины, что ни один шарнир не проходится дважды.

Представляющий структуру системы первичный граф ориентируем, выбирая на каждом его ребре определенное направление, обозначаемое стрелкой. При выборе направления на ребре исходим из того, какое из двух соседних тел, связанных данным шарниром, принимаем за базисное, по отношению к которому рассматриваем относительное движение соседнего тела. Направление на ребре задается от вершины, изображающей базисное тело, к вершине, изображающей соседнее для рассматриваемого шарнира тело. На фиг. 2 представлена одна из возможных ориентаций ребер графа. Ориентированные ребра будем в дальнейшем называть дугами.

Ориентация первичного графа переносится без изменения на открытый вторичный граф. Ориентация вторичного графа определяет следующие две функции:  $i^+(a)$  и  $i^-(a)$  аргумента  $a$  ( $a = 1, 2, \dots, n$ ), обозначающего номер дуги. Функция  $i^+(a)(i^-(a))$  определяет номер вершины, от которой начинается (в которой заканчивается) дуга  $u_a$ . Для графов на фиг. 3 значения этих функций равняются соответственно

а)	$a$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	$i^+(a)$	0	1	2	3	4	5	2	7	2	9	8	10
	$i^-(a)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
б)	$i^+(a)$	0	1	2	3	4	5	11	7	11	9	8	10
	$i^-(a)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	12

С помощью функций  $i^+(a)$  и  $i^-(a)$  определим следующие величины:

$$S_{ia} = \begin{cases} +1, & \text{если } i = i^+(a) \quad (i = 0, 1, \dots, n), \\ -1, & \text{если } i = i^-(a) \quad (a = 1, 2, \dots, n), \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$T_{ai} = \begin{cases} +1, & \text{если } u_a \text{ принадлежит пути между } s_0 \text{ и } s_i \text{ и на-} \\ & \text{правлена к } s_0, \\ -1, & \text{если } u_a \text{ принадлежит пути между } s_0 \text{ и } s_i \text{ и на-} \\ & \text{правлена из } s_0, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

$(a, i = 1, 2, \dots, n),$

Эти величины определяют матрицы

$$S = (S_{ia})_{i=1, a=1}^n, \quad S_0 = (S_{0a})_{a=1}^n$$

$$T = (T_{ai})_{a=1, i=1}^n$$

Пусть  $S^+$  — матрица, получающаяся из  $S$ , если все ее элементы, равные  $-1$ , заменить на  $0$ . Введем также матрицу  $W$  размером  $N \times n$  с элементами  $W_{km}$ :

$$W_{km} = \begin{cases} +1, & \text{если } k = m, \\ -1, & \text{если } k \text{ — номер раздвоенной вершины в первич-} \\ & \text{ном графе и } m \text{ — номер новой вершины во вторич-} \\ & \text{ном графе,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для графов на фиг. 3 ненулевые элементы матрицы  $W$  имеют вид

$$W_{11} = W_{22} = \dots = W_{10,10} = 1$$

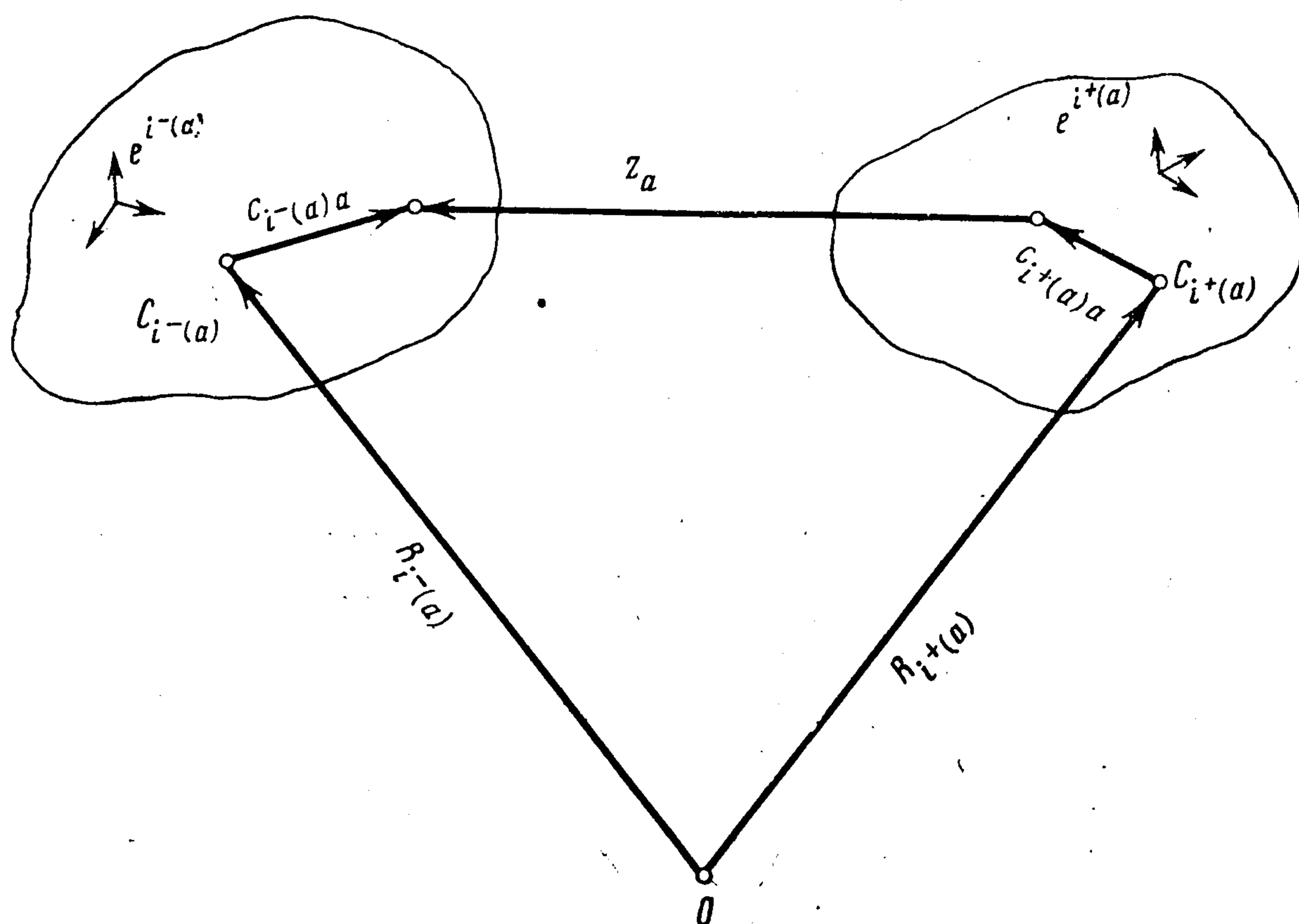
и

$$\text{а) } W_{1,11} = W_{3,12} = -1, \quad \text{б) } W_{2,11} = W_{3,12} = -1$$

В  $W$  выделим подматрицу  $I$ , состоящую из строк  $W$ , соответствующих номерам всех раздвоенных вершин первичного графа. Для рассматриваемых графов на фиг. 3  $I$  имеет вид

$$\begin{aligned} \text{а) } & \left\| \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right\| \\ \text{б) } & \left\| \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right\| \end{aligned}$$

Образует также матрицу  $H$ , которая получается из  $W$ , если в ее строках, соответствующих номерам всех раздвоенных вершин первичного графа, ненулевые элементы заменим на  $1/2$ .



Фиг. 4

Наконец, обозначим через  $|W|$  матрицу, которая получается из  $W$ , если каждый ее элемент взят по абсолютной величине.

**2. Кинематика системы.** При описании кинематики системы будем использовать математический аппарат, изложенный в [2]. В каждом теле рассматриваемой системы введем локальный ортонормированный репер  $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, e_3^{(i)}$  с началом в центре масс  $C_i$  тела ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) (фиг. 4). Для тела номер 0 точка  $C_0$  произвольно выбранная. Радиус-вектор точки  $C_i$  относительно инерциального начала в точке  $O$  обозначим  $R_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ). Для описания относительного движения в шарнире номер  $a$  ( $a = 1, 2, \dots, n$ ) введем вектор  $z_a$ , связывающий две фиксированные точки в соседних для шарнира  $a$  телах и направленный, так же как и дуга  $u_a$ , в изображающем систему первичном ориентированном графе. Указанные точки называются шарнирными точками (фиг. 4). В дальнейшем матрицу-столбец  $(e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, e_3^{(i)})^T$  будем обозначать  $e^{(i)}$ .

При рассмотрении кинематики системы удобно работать не с исходной системой, а с новой фиктивной системой, структура которой представлена открытым вторичным графом. Эта система получается, если мысленно раздвоить тела, которым соответствуют раздвоенные вершины первичного графа при размыкании всех замкнутых контуров. Раздвоение тела совершается с сохранением полной геометрической идентичности между первообразом и образом. В частности, центры масс и базисные реперы расположены в обоих телах идентично. Сочленения обоих тел с остальными телами и их нумерация представлены на вторичном графе. При этом в любом из образов сохраняется некоторая часть шарнирных точек, а именно шарнирные точки тех шарниров, соответствующие дуги которых на вторичном графе связывают вершину, соответствующую этому образу, с другими вершинами. Остальная часть шарнирных точек первообраза фигурирует в другом образе. В результате получаем систему, состоящую из  $n + 1$  тел и не имеющую замкнутых контуров. Эту систему назовем расширенной системой.

Ориентация репера  $e^{(i+(a))}$  относительно репера  $e^{(i-(a))}$  задается матрицей перехода  $G_a$ :

$$e^{(i-(a))} = G_a e^{(i+(a))}$$

Величины  $z_a$  и  $G_a$  — функции относительных координат  $q_a = (q_{a1}, q_{a2}, \dots, q_{an_a})^T$  ( $n_a \leq 6$ ), задающих относительное движение в шарнире номера  $a$ . Для тел расширенной системы координатные системы расположены так же, как и в соответствующих телах системы. Можно показать, что матрицы перехода  $G_{ij}$  от координатной системы тела  $j$  в координатную систему тела  $i$

$$e^{(i)} = G_{ij} e^{(j)}$$

связаны с введенными матрицами  $G_a$  зависимостью

$$G_{ij} = \prod_{a=1}^n G_a^{(T_{aj}-T_{ai})}$$

следующей из формул

$$G_{0i} = \prod_{a=1}^n G_a^{T_{ai}}, \quad G_{ij} = G_{i0} G_{0j}$$

Для характеристики относительного движения соседних тел служат также относительные трансляционные скорости  $z_a^\circ$  и ускорения  $z_a^\infty$ , относительные угловые скорости  $\Omega_a$  и угловые ускорения  $\Omega_a^\circ$  ( $a = 1, 2, \dots, n$ ), для которых верны следующие выражения [2]:

$$z_a^\circ = z_a' q_a \dot{\phantom{q}}, \quad z_a^\infty = z_a'^T q_a \ddot{\phantom{q}} + \dot{q}_a'^T z_a q_a \dot{\phantom{q}}$$

$$\Omega_a = p_a^T q_a \dot{\phantom{q}}, \quad \Omega_a^\circ = p_a^T q_a \ddot{\phantom{q}} + \dot{q}_a'^T p_a q_a \dot{\phantom{q}}$$

где  $z_a'$ ,  $p_a$  — векторные матрицы-столбцы размером  $n_a \times 1$ , элементы которых — векторы

$$(z_a')_i = \frac{\partial z_a}{\partial q_{ai}}, \quad p_a = (p_{a1}, p_{a2}, \dots, p_{an_a})^T$$

$$(i = 1, 2, \dots, n_a; a = 1, \dots, n)$$

а.  $\mathbf{z}_a''$ ,  $\mathbf{p}_a'$  — векторные матрицы размером  $n_a \times n_a$  с элементами

$$(\mathbf{z}_a'')_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{z}_a}{\partial q_{ai} \partial q_{aj}}, \quad (\mathbf{p}_a')_{ij} = \frac{\partial \mathbf{p}_{ai}}{\partial q_{aj}}$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, n_a; a = 1, \dots, n)$$

Локальные радиус-векторы шарнирных точек обозначим  $\mathbf{c}_{i+(a)a}$  и  $\mathbf{c}_{i-(a)a}$  (фиг. 4). Вводя матрицы  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C}_0$  и  $\mathbf{C}^*$  с элементами

$$(\mathbf{C})_{ia} = S_{ia} \mathbf{c}_{ia}, \quad (\mathbf{C}_0)_a = S_{0a} \mathbf{c}_{0a}$$

$$(\mathbf{C}^*)_{ia} = S_{ia}^+ \mathbf{z}_a \quad (i, a = 1, 2, \dots, n)$$

получим следующее выражение для матрицы-столбца радиус-векторов  $\mathbf{R}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) массовых центров тел расширенной системы [2]:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 \mathbf{1}_n - (\mathbf{C}\mathbf{T})^T \mathbf{1}_n - \mathbf{T}^T \mathbf{z} - (\mathbf{C}_0 \mathbf{T})^T$$

Здесь  $\mathbf{R} = (\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_n)^T$ , а  $\mathbf{1}_n = (1, 1, \dots, 1)^T$  — матрица-столбец размером  $n \times 1$ , все элементы которой равны единице.

Проводя необходимые операции над блочными матрицами, получим зависимости и для других абсолютных кинематических характеристик расширенной системы:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{R}'' &= \mathbf{T}^T [\text{diag } \mathbf{p}^T \times (\mathbf{C} + \mathbf{C}^*) - \text{diag } \mathbf{z}']^T \mathbf{q}'' + \mathbf{u} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= -\mathbf{T}^T \text{diag } \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\omega}_0 \mathbf{1}_n \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= -\mathbf{T}^T (\text{diag } \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}) + \boldsymbol{\omega}_0 \mathbf{1}_n \\ \delta \mathbf{R} &= -\mathbf{T}^T [(\mathbf{C} + \mathbf{C}^*)^T \times \mathbf{T}^T \text{diag } \mathbf{p}^T + \text{diag } \mathbf{z}'^T] \delta \mathbf{q} \\ \delta \boldsymbol{\pi} &= -\mathbf{T}^T \text{diag } \mathbf{p}^T \delta \mathbf{q} \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= (q_1^T, q_2^T, \dots, q_n^T)^T, \quad \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T \\ \delta \mathbf{R} &= (\delta \mathbf{R}_1, \delta \mathbf{R}_2, \dots, \delta \mathbf{R}_n)^T, \quad \delta \boldsymbol{\pi} = (\delta \pi_1, \delta \pi_2, \dots, \delta \pi_n)^T \\ \mathbf{p} &= (\mathbf{p}_1^T, \mathbf{p}_2^T, \dots, \mathbf{p}_n^T), \quad \mathbf{z}' = (\mathbf{z}_1'^T, \mathbf{z}_2'^T, \dots, \mathbf{z}_n'^T)^T \\ \mathbf{u} &= -\mathbf{T}^T [(\mathbf{C} + \mathbf{C}^*)^T \times (\mathbf{T}^T \mathbf{f} - \boldsymbol{\omega}_0 \mathbf{1}_n) + \mathbf{w} + \mathbf{g} + \mathbf{h}] + \mathbf{R}_0 \mathbf{1}_n - (\mathbf{C}_0 \mathbf{T})^T \end{aligned}$$

Здесь  $\boldsymbol{\omega}_i$  — вектор абсолютной угловой скорости тела номер  $i$  расширенной системы, а векторы  $\delta \mathbf{R}_i$  и  $\delta \pi_i$  описывают абсолютные вариации положения и ориентации этого тела. Символом  $\text{diag } A$  обозначается квазидиагональная матрица, по главной диагонали которой расположены элементы  $A_1, \dots, A_n$  величины  $A$ . Эти элементы могут быть скалярами, векторами, матрицами, тензорами и т. п. Например, по главной диагонали квазидиагональной матрицы  $\text{diag } \mathbf{p}^T$  расположены векторные матрицы  $(\mathbf{p}_{a1}, \mathbf{p}_{a2}, \dots, \mathbf{p}_{an_a})$  и ее размер, следовательно,  $n \times (n_1 + n_2 + \dots + n_n)$ . Компоненты векторных матриц  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{h}$  таковы:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a &= \dot{q}_a^T \mathbf{p}_a' \dot{q}_a + \boldsymbol{\omega}_{i+(a)} \times \mathbf{p}_a^T \dot{q}_a, \quad \mathbf{w}_a = \dot{q}_a^T \mathbf{z}_a'' \dot{q}_a \\ \mathbf{g}_a &= \boldsymbol{\omega}_{i+(a)} \times (\boldsymbol{\omega}_{i+(a)} \times \mathbf{c}_{i+(a)a}) - \boldsymbol{\omega}_{i-(a)} \times (\boldsymbol{\omega}_{i-(a)} \times \mathbf{c}_{i-(a)a}) \\ \mathbf{h}_a &= 2\boldsymbol{\omega}_{i+(a)} \times \mathbf{z}_a'^T \dot{q}_a + \boldsymbol{\omega}_{i+(a)} \times (\boldsymbol{\omega}_{i+(a)} \times \mathbf{z}_a) \quad (a = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

Чтобы перейти от кинематики расширенной системы к кинематике исходной системы, необходимо записать уравнения связей, выражающие условия замкнутости разомкнутых контуров. Очевидно, это условия совпа-

дения двух образов раздвоенных тел, что сводится к требованию равенства радиус-векторов их массовых центров и равенства единичной матрице матрицы перехода между ними. Если  $j$  и  $k$  — номера двух образов одного раздвоенного тела, то эти условия запишутся так:

$$(2.2) \quad \mathbf{R}_j - \mathbf{R}_k = 0, \quad G_{jk} = E$$

Можно показать, что для всей системы эти условия выражаются следующими матричными формулами:

$$(2.3) \quad IT^T (C^T \mathbf{1}_n + \mathbf{z} + C_0^T) = 0$$

$$(2.4) \quad \prod_{a=1}^n G_a^{(IT^T)ia} = E \quad (i = 1, 2, \dots, n - N)$$

Скалярные уравнения, отвечающие этой системе, могут быть получены проектированием каждого векторного уравнения в некоторой координатной системе. Например, можно взять координатную систему тела номер 0, но более удобной является координатная система тела, взятого из контура, замкнутость которого выражает это уравнение. В частности, можно воспользоваться координатной системой раздвоенного тела.

**3. Вывод уравнений движения.** При варьировании обобщенных координат  $i$ -е тело системы изменяет свое положение в пространстве, что сводится к перемещению массового центра на величину  $\delta R_i$  и повороту тела около оси, проходящей через  $C_i$  на бесконечно малый угол. Направление оси и величина угла этого поворота определяются бесконечно малым вектором  $\delta \pi_i$ .

Используя принцип Даламбера, находим следующее выражение для виртуальной работы, совершаемой действующими на систему силами и силами инерции:

$$(3.1) \quad \delta \mathbf{R}^{sT} \cdot (\mathbf{F}^* - m \mathbf{R}^{**s}) + \delta \pi^{sT} \cdot (\mathbf{M}^* - \mathbf{L}^{\cdot}) = 0$$

$$\mathbf{R}^s = (\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_N)^T, \quad \delta \pi^s = (\delta \pi_1, \delta \pi_2, \dots, \delta \pi_N)^T$$

$$\mathbf{L}^{\cdot} = (\mathbf{L}_1^{\cdot}, \mathbf{L}_2^{\cdot}, \dots, \mathbf{L}_N^{\cdot})^T, \quad \mathbf{F}^* = (\mathbf{F}_1^*, \mathbf{F}_2^*, \dots, \mathbf{F}_N^*)^T$$

$$\mathbf{M}^* = (\mathbf{M}_1^*, \mathbf{M}_2^*, \dots, \mathbf{M}_N^*)^T$$

Индекс  $s$  означает, что величина соответствует телам исходной системы. Матрица  $m$  имеет элементы  $m_{ij} = \delta_{ij} m_i$  ( $i, j = 1, \dots, N$ ), где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $m_i$  — масса  $i$ -го тела исходной системы,  $\mathbf{L}_i^{\cdot} = \mathbf{J}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \times \mathbf{J}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i$  — абсолютная производная момента количества движения  $i$ -го тела относительно его центра масс,  $\mathbf{J}_i$  — центральный тензор инерции этого тела,  $\mathbf{F}_i^*$  — результирующая всех сил, действующих на тело номер  $i$ ,  $\mathbf{M}_i^*$  — результирующий момент всех сил, действующих на  $i$ -е тело относительно его центра масс ( $i = 1, 2, \dots, N$ ).

В формуле (3.1) не фигурируют величины, связанные со вторыми образами раздвоенных тел. Чтобы воспользоваться построенной в предыдущем пункте кинематикой, охватывающей раздвоенные тела, необходимо выразить  $\delta \mathbf{R}^s$  и  $\delta \pi^s$  через  $\delta \mathbf{R}$  и  $\delta \pi$ . Для этого используем введенную выше матрицу  $H$

$$\delta \mathbf{R}^s = H \delta \mathbf{R}, \quad \delta \pi^s = H \delta \pi$$

Осталось найти выражения блочных сил и моментов. Пусть  $F_i$  — равнодействующая всех внешних сил, действующих на тело с номером  $i$ , а  $M_i$  — их момент относительно центра масс  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Обозначая через  $X_a$  внутреннюю силу в шарнире номер  $a$ , действующую на тело с номером  $i^+(a)$  и совершающую виртуальную работу, для равнодействующей внутренних сил, действующих на тело с номером  $i$  и совершающих виртуальную работу, находим выражение

$$\sum_{a=1}^n (|W|S)_{ia} X_a \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Для  $F^*$  получаем тогда

$$F^* = F + |W|SX$$

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_N)^T, \quad X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$$

В шарнире номер  $a$  введем также и момент внутренних сил  $Y_a$ , совершающих виртуальную работу и действующих на тело номер  $i^+(a)$ , взятый относительно конца вектора  $z_a$ . Можно показать, что

$$M^* = M + |W|SY + |W|(C + C^*) \times X$$

$$M = (M_1, M_2, \dots, M_N)^T, \quad Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$$

Если теперь подставить полученные зависимости в (3.1), получим равенство вида

$$\begin{aligned} (3.2) \quad & \delta q^T (Aq'' - B) = 0 \\ & A = [\text{diag } p^T \times (C + C^*) - \text{diag } z'] TH^T \cdot mHT^T [\text{diag } p^T \times \\ & \times (C + C^*) - \text{diag } z']^T + \text{diag } p^T H^T \cdot \text{diag } J \cdot HT^T \text{diag } p^T \\ & B = [\text{diag } p^T \times (C + C^*) - \text{diag } z'] TH^T \cdot (F - mHu) - \\ & - \text{diag } p^T H^T \cdot [M - V + \text{diag } J \cdot (HT^T f - \omega_0 1_N)] - \\ & - \text{diag } z' TH^T |W|S \cdot X - \text{diag } p^T H^T |W|S \cdot Y + \\ & + \text{diag } p^T \cdot [(C + C^*) TH^T |W|S - H^T |W|(C + C^*)] \times X \\ & V = (\omega_1 \times J_1 \cdot \omega_1, \omega_2 \times J_2 \cdot \omega_2, \dots, \omega_N \times J_N \cdot \omega_N)^T \end{aligned}$$

В случае, когда исследуемая система не содержит замкнутых кинематических цепей, из (3.2) получаем непосредственно уравнения движения, имея в виду, что компоненты  $\delta q$  произвольны и независимы между собой. Однако при наличии кинематических ограничений величины  $\delta q$  уже будут зависимыми. Эти зависимости получим, варьируя уравнения связей (2.2), (2.5). В то время как непосредственное варьирование уравнений связей (2.3) проводится элементарно, прямое варьирование уравнений (2.4) сопряжено с техническими трудностями. Чтобы справиться с этой задачей, заметим что уравнения связей (2.2) выражают тождественное совпадение раздвоенных тел во время движения системы. Отсюда, в частности, следует, что изменения в их взаимном положении в абсолютном пространстве, которые определяются изменением радиус-векторов  $\delta R$  и угловых положений  $\delta \pi$ , тождественно равны нулю

$$(3.3) \quad I\delta R = 0, \quad I\delta \pi = 0$$

После подстановки выражений для  $\delta R$  и  $\delta \pi$  из последних двух соотношений (2.1) получаем

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \delta q^T [\text{diag } p^T \times (C + C^*) - \text{diag } z'] T I^T &= 0^T \\ dq^T \text{diag } p^T I^T &= 0^T \end{aligned}$$

Формулы (3.4) являются, очевидно, проварьированными формулами (2.3) и (2.4). Проектируя каждое из этих векторных уравнений в упомянутых в конце п. 2 координатных системах, получим систему из  $6(n - N)$  скалярных уравнений, имеющую вид

$$(3.5) \quad \delta q^T K = 0^T$$

где  $0^T = (0, \dots, 0)$  — матрица, состоящая из нулей, размером  $1 \times 6(n - N)$ ,  $K$  — матрица размером  $r \times 6(n - N)$ ,  $r = n_1 + n_2 + \dots + n_n$ . Обозначим ранг матрицы  $K$  через  $r - d$ .

Пусть  $D_2^T$  — минор размером  $(r - d) \times (r - d)$ , который реализует этот ранг. Пусть, далее,  $D_1^T$  — подматрица матрицы  $K$ , состоящая из оставшихся элементов тех столбцов, в которых расположена матрица  $D_2^T$ . Без ограничения общности, перенумеровав, если необходимо, элементы столбца  $q$ , можно предполагать, что минор  $D_2^T$  расположен в последних  $(r - d)$  строках матрицы  $K$ . Тогда (3.5) можно переписать в виде

$$(3.6) \quad \delta q^{(1)T} D_1^T + \delta q^{(2)T} D_2^T = 0^T$$

где через  $q^{(1)}$  обозначены первые  $d$  элементов столбца  $q$ , а через  $q^{(2)}$  — последние  $(r - d)$ ,  $q = (q^{(1)T}, q^{(2)T})^T$ . Очевидно, что  $q^{(1)}$  представляет полный набор независимых, т. е. обобщенных координат системы. Разрешая (3.6) относительно  $q^{(2)}$ , найдем

$$(3.7) \quad \delta q^{(2)} = -D_2^{-1} D_1 \delta q^{(1)}$$

Если к (3.7) добавить тривиальную зависимость  $\delta q^{(1)} = E_d \delta q^{(1)}$ , где  $E_d$  — единичная матрица размером  $(d \times d)$ , получим

$$(3.8) \quad \delta q = P \delta q^{(1)}, \quad P = \begin{Bmatrix} E_d \\ \dots \\ -D_2^{-1} D_1 \end{Bmatrix}$$

Поскольку связи стационарны, то аналогично зависимости (3.3) имеем

$$(3.9) \quad I \dot{R} = 0, \quad I \dot{\omega} = 0$$

и аналогично (3.8)

$$(3.10) \quad \dot{q} = P \dot{q}^{(1)}$$

Дифференцируя уравнения (3.9) еще раз по времени, получим

$$(3.11) \quad \begin{aligned} I T^T \{[\text{diag } p^T \times (C + C^*) - \text{diag } z']^T \dot{q}^{**} - \\ - (C + C^*)^T \times (T^T f - \omega_0 1_n) - w - g - h - C_0^{**T}\} = 0 \\ I T^T (\text{diag } p^T \dot{q}^{**} + \dot{f}) = 0 \end{aligned}$$

Проектируя уравнения (3.11) на те же оси, что и при получении уравнений (3.5), запишем их в скалярном виде

$$\dot{q}^{**T} K = K_1$$

где  $K_1$  — матрица, не зависящая от  $q^{**}$ .

Пусть  $Q_1^T$  — матрица, состоящая из тех столбцов матрицы  $K_1$ , которые отвечают столбцам, формирующим  $D_1^T$  и  $D_2^T$ , тогда

$$(3.12) \quad q'' = Pq^{(1)} + Q, \quad Q = \begin{pmatrix} 0_d \\ \dots \\ D_2^{-1}Q \end{pmatrix}, \quad 0_d = (0, 0, \dots, 0)^T$$

где  $0_d$  — матрица размером  $d \times 1$ , состоящая из нулей. Подставляя (3.8) и (3.12) в уравнение (3.2) и пользуясь тем, что  $\delta q^{(1)}$  — столбец независимых параметров, получим

$$(3.13) \quad (P^T A P)q^{(1)} = P^T (B - A Q)$$

Уравнения (3.13) вместе с уравнениями связей (3.10) представляют систему  $(r + d)$  уравнений движения первого порядка относительно  $q$   $q^{(1)}$ , которую можно записать в следующем виде:

$$(3.14) \quad \frac{dq}{dt} = Pq^{(1)}, \quad \frac{dq^{(1)}}{dt} = (P^T A P)^{-1} P^T (B - A Q)$$

Начальные условия для  $q$  удовлетворяют уравнениям связей (2.3), (2.4). Начальные условия для  $q^{(1)}$  можно выбирать произвольно.

Число уравнений (3.14) не является минимально возможным ( $2d$ ), но после их интегрирования получаем сразу полную информацию не только о глобальном поведении системы, но и об относительном движении в любом шарнире.

Обычно при исследовании динамики конкретных инженерных систем существенной для проектирования и управления является не только информация об изменении независимых координат  $q^{(1)}$ , но и информация о всем множестве параметров  $q$ . Нужно учесть и тот факт, что инвариантным является только число степеней свободы системы, в то время как вектор обобщенных координат  $q^{(1)}$  не определяется однозначно. При его выборе имеется определенный произвол, определяющийся тем, что ранг матрицы  $K$  может реализоваться на разных минорах. Кроме того, сама матрица  $K$  имеет разный вид при разных способах превращения системы с замкнутыми цепями в систему со структурой дерева. Вид матрицы  $K$  зависит также от выбора координатных систем для проектирования векторных равенств (3.4).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Виттенбург И. Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980, 292 с.
2. Lilov L., Wittenburg J. Bewegungsgleichungen für Systeme starrer Körper mit Gelenken beliebiger Eigenschaften. — Z. angew. Math. und Mech., 1977, В. 57, Н. 3, S. 137—152.