Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 3, 1981

УДК 531.38

О СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Апыхтин Н. Г.

На основании теорем о стабилизации невозмущенного движения [1] строятся управляющие моменты, обеспечивающие устойчивость и оптимальную стабилизацию перманентных вращений твердого тела.

Перманентные оси твердого тела, находящегося в центральном ньютоновском поле сил, исследованы на устойчивость в работах [2, 3]. При движении тела в силовых полях, более общих, чем однородное и центральное ньютоновское, множество перманентных осей найдено в [4] и исследовано на устойчивость в [5].

В силу консервативности рассматриваемой системы имеет место неасимптотическая устойчивость перманентных вращений. Асимптотическую устойчивость перманентных вращений можно обеспечить управляющими моментами, приложенными по главным осям инерции твердого тела, либо перераспределением масс твердого тела в процессе движения. В частности, была показана возможность стабилизировать вращательные движения твердого тела при помощи маховиков [6].

Пусть твердое тело, главные моменты инерции которого A, B, C, а центр масс находится в точке (x_0, y_0, z_0) системы координат, оси которой направлены по главным осям инерции твердого тела, движется в силовом поле, допускающем силовую функцию $U(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, где γ_i — направляющие косинусы перманентной оси в связанной с телом системе координат. Тогда уравнения Эйлера—Пуассона имеют частное решение $p = \omega l_1$, $q = \omega l_2$, $r = \omega l_3$, $\gamma_i = l_i$, где p, q, r — проекции вектора мгновенной угловой скорости вращения тела на указанные выше оси координат, а ω и l_i — постоянные.

Уравнения возмущенного движения при наличии управляющих моментов u_1, u_2, u_3 относительно главных осей инерции, когда $d^2U/d\gamma_i\cdot\partial\gamma_j$ $(i \neq j)$, имеют вид [4]

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad & Ax_1^{\cdot} = (B-C)\,\omega\,(l_3x_2 + l_2x_3) + (l_3u_{22} - u_{30})\,y_2 - (l_2u_{33} - \\
& - u_{20})\,y_3 + (B-C)\,x_2x_3 + (u_{22} - u_{33})y_2y_3 + Au_1 + \varepsilon\,(A \to \\
& \to B \to C,\ \ 1 \to 2 \to 3) \\
& y_1^{\cdot} = -l_3x_2 + l_2x_3 + \omega l_3y_2 - \omega l_2y_3 + x_3y_2 - x_2y_3 \\
& u_{i0} = \frac{\partial U}{\partial \gamma_i}, \quad u_{ii} = \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_i^2}, \quad \gamma_i = l_i
\end{aligned}
$$

Здесь x_i, y_i — значения возмущений величин p, q, r, γ_i соответственно, ε — члены третьего и выше порядка малости относительно возмущений y_i $(i = 1, 2, 3)$.

Невыписанные уравнения получаются круговой перестановкой букв и индексов, указанных в скобках. В случае, когда управляющие моменты отсутствуют, т. е. $u_i \equiv 0$, уравнения (1) имеют своим первым интегралом функцию [5]

$$V = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 - 2\omega(Ay_1x_1 + Bx_2y_2 + Cx_3y_3) + (\lambda - u_{11})y_1^2 + (\lambda - u_{22})y_2^2 + (\lambda - u_{33})y_3^2 + f(y_1, y_2, y_3) \tag{2}$$

$$\lambda = A\omega^2 - u_{10}l_1^{-1} = B\omega^2 - u_{20}l_2^{-1} = C\omega^2 - u_{30}l_3^{-1}$$

где $f(y_1, y_2, y_3)$ — формы третьего и выше степени относительно возмущений y_i.

При отсутствии управляющих моментов u_i ($i = 1, 2, 3$) форма (2) для устойчивых перманентных вращений — положительно-определенная функция переменных x_i и y_i, а ее производная, вычисленная в силу уравнений возмущенного движения, равна нулю [5].

Если же управляющие моменты u_i действуют по главным осям инерции твердого тела, то форма (2) уже не является интегралом уравнений возмущенного движения (1), а ее производная, вычисленная в силу этих уравнений, равна

$$V^\cdot = \sum u_i \frac{\partial V}{\partial x_i} = 2A(x_1 - \omega y_1)u_1 + 2B(x_2 - \omega y_2)u_2 + 2C(x_3 - \omega y_3)u_3$$

Заметим, что в возмущенном движении ($x_i \neq 0$, $y_i \neq 0$) для исследуемой перманентной оси имеют место соотношения $x_i \neq \omega y_i$ ($i = 1, 2, 3$). В самом деле, поскольку величины x_i — возмущенные значения проекций вектора мгновенной угловой скорости на главные оси инерции твердого тела, а величины y_i — возмущенные значения направляющих косинусов перманентной оси в главных осях инерции твердого тела, вокруг которой тело вращается с постоянной угловой скоростью ω, то равенства $x_i = \omega y_i$ имеют место лишь в невозмущенном движении, т. е. $x_i = \omega y_i$ при $x_i = y_i = 0$. Другими словами, при $x_i = \omega y_i$ уравнения возмущенного движения не содержат целых траекторий [1]. Это обстоятельство позволяет сделать следующее заключение. Если управляющие моменты выбрать в виде

$$2u_i = -\alpha_i(x_i - \omega y_i) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

где α_i — положительные постоянные, то вычисленная в силу уравнений возмущенного движения (1) производная по времени функции (2)

$$V^\cdot = -\alpha_1 A(x_1 - \omega y_1)^2 - \alpha_2 B(x_2 - \omega y_2)^2 - \alpha_3 C(x_3 - \omega y_3)^2$$

будет отрицательно-определенной функцией переменных x_i и y_i и по теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости перманентные вращения твердого тела будут асимптотически устойчивыми.

Поставим теперь задачу об оптимальной стабилизации перманентных вращений твердого тела: найдем такие управляющие моменты u_i, которые обеспечат асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $x_i = y_i = 0$ и минимум функционала

$$J = \sum \int_0^\infty (\alpha_{ii}x_i^2 + 2\beta_{ii}x_iy_i + \gamma_{ii}y_i^2 + \delta_i u_i^2)\,dt \tag{3}$$

где подынтегральное выражение — определенно-положительная функция переменных x_i, y_i и u_i.

Согласно теореме об оптимальной стабилизации [1], рассмотрим определенно-положительную функцию

$$V^* = \Sigma\ (c_{ij}x_ix_j + d_{ij}y_iy_j + e_{ij}x_iy_j) \tag{4}$$

где c_{ij}, d_{ij} и e_{ij} — постоянные, и потребуем, чтобы ее полная производная, вычисленная в силу уравнений возмущенного движения (1), равнялась подынтегральному выражению функционала (3), т. е. чтобы выполнялось равенство

$$\begin{aligned}\sum[(c_{ij}x_j + e_{ij}y_j)x_i^{\cdot} + (d_{ij}y_j + e_{ij}x_i)y_i^{\cdot}] = \\ = -\sum(\alpha_{ii}x_i^2 + 2\beta_{ii}x_iy_j + \gamma_{ii}y_i^2 + \delta_iu_i^2)\end{aligned} \tag{5}$$

где x_i, y_i ($i = 1, 2, 3$) определяются из уравнений (1).

Так как, согласно теореме об оптимальной стабилизации, сумма левой и правой частей равенства (5) должна быть при оптимальных управлениях минимальной, получим следующие уравнения для определения управляющих моментов:

$$\sum(c_{ij}x_j + e_{ij}y_j)\frac{\partial x_i^{\cdot}}{\partial u_i} + 2\delta_iu_i = \sum(c_{ij}x_j + e_{ij}y_j) + 2\delta_iu_i = 0$$

Из этих уравнений определяем управляющие моменты, действующие по главным осям инерции твердого тела в его возмущенном движении, как линейные функции возмущений

$$2\delta_iu_i = \Sigma\ (c_{ij}x_j + e_{ij}y_j)\ (i = 1, 2, 3) \tag{6}$$

Подставляя значения управляющих моментов (6) в равенство (5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых произведениях возмущений x_i и y_i в обеих частях равенства (5), получим линейную систему уравнений для определения коэффициентов квадратичной формы (4).

Однако вопрос о разрешимости этой системы остается открытым. Более того, после положительного решения этого вопроса необходимо проверить условия, при которых функция (4) будет определенно-положительной.

Но факт существования определенно-положительной функции, решающей задачу об оптимальной стабилизации перманентных вращений твердого тела, можно установить, рассматривая форму (2) и функционал

$$\begin{aligned}J = \int_0^\infty [A^2\delta_1^{-1}(x_1 - \omega y_1)^2 + B^2\delta_2^{-1}(x_2 - \omega y_2)^2 + \\ + C^2\delta_3^{-1}(x_3 - \omega y_3)^2 + \delta_1u_1^2 + \delta_2u_2^2 + \delta_3u_3^2]\,dt\end{aligned} \tag{7}$$

Оптимальные моменты по главным осям инерции твердого тела, стабилизирующие перманентные вращения твердого тела и минимизирующие при этом функционал (7), следует выбирать в виде

$$\begin{aligned}\delta_1u_1 = -A\ (x_1 - \omega y_1),\ \delta_2u_2 = -B\ (\omega_2 - \omega y_2),\ \delta_3u_3 = \\ = -C\ (x_3 - \omega y_3)\end{aligned}$$

Заметим, что оптимальную стабилизацию перманентных вращений твердого тела можно осуществлять по первому приближению [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 532 с.
2. *Белецкий В. В.* Некоторые вопросы движения твердого тела в ньютоновском поле сил.— ПММ, 1957, т. 21, вып. 6, с. 287.
3. *Пожарицкий Г. К.* Об устойчивости перманентных вращений твердого тела с закрепленной точкой, находящегося в ньютоновском поле сил.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 4, с. 792.
4. *Апыхтин Н. Г.* О перманентных осях вращения твердого тела с закрепленной точкой в случае существования интегралов Д. Н. Горячева.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 5, с. 894.
5. *Апыхтин Н. Г.* Об устойчивости некоторых перманентных вращений твердого тела.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 2, с. 375.
6. *Крементуло В. В.* Об оптимальной стабилизации твердого тела с неподвижной точкой при помощи маховиков.— ПММ, 1966, т. 30, вып. 1, с. 42.

Москва

Поступила в редакцию
21.XI.1978