Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 3, 1981

УДК 531.36

О СТАБИЛИЗИРУЕМОСТИ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМ С ПСЕВДОЦИКЛИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ

Самсонов В. А.

Вводится класс систем с псевдоциклическими координатами. Дается описание множества P возможных установившихся движений. Проводится качественный анализ задачи о стабилизации установившихся движений. Подобная задача рассматривалась в [1, 2] с позиций общей теории управляемости. Информация о множестве P, аппарат инвариантных многообразий линейных систем и теоремы Кельвина — Четаева позволяют в ряде случаев дать простое и эффективное решение этой задачи.

1. Множество установившихся движений. Пусть среди обобщенных координат q_i $(i=1,\ldots,n)$ механической системы с голономными стационарными связями имеются координаты q_j $(j=r+1,\ldots,n;\ r<n)$, которые не входят явным образом в выражение для кинетической энергии T системы. Предположим, что действующие на систему силы также не зависят от этих координат, которые ниже будем называть псевдоциклическими. Остальные координаты q_i $(i=1,\ldots,r)$ позиционные. Примем матричные обозначения: символ q означает матрицу-столбец, составленную из позиционных координат, $\dot q$, ω — матрицы-столбцы позиционных и псевдоциклических скоростей.

Будем считать, что исходная система гироскопически не связана, т. е.

$$2T = \dot q^T A(q)\dot q + \omega^T B(q)\omega$$

Здесь A, B — положительно-определенные симметричные матрицы, коэффициенты которых зависят от позиционных координат.

Предположим, что обобщенные силы, отвечающие позиционным координатам, заданы и представляют собой сумму потенциальных и диссипативных сил

$$Q_i = dU/dq_i + Q_{id}$$

Обобщенные силы F_j, отвечающие псевдоциклическим координатам, будем считать управляющими и подлежащими выбору.

Допустим, что при некоторых начальных условиях возможно установившееся движение системы

$$q(t) = q_0 = \mathrm{const},\quad \omega(t) = \omega_0 = \mathrm{const}$$

Для определения q_0, ω_0 имеем следующие уравнения:

$$-\frac{\partial u}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}\omega^T B\omega = 0,\quad F_j = 0 \tag{1.1}$$

Вообще говоря, одной из целей выбора управляющих сил F_j служит обеспечение условий существования установившегося движения с некоторыми заданными значениями псевдоциклических скоростей. Понятно, что это возможно не для всяких систем, а лишь для таких, для которых уравнения (1.1) имеют хотя бы одно решение относительно q при заданном ω_0. Как правило, в прикладных задачах ω_0 считается принадлежащим некоторой области Ω_0 в пространстве $\Omega = \{\omega\}$. В качестве рабочего режима может быть выбрана любая точка из области Ω_0.

Высказанных соображений достаточно для исследования уравнений (1.1) как уравнений относительно q с параметрами ω. В n-мерном пространстве переменных q, ω эти уравнения определяют множество P возможных установившихся движений системы. В общем случае это множество состоит из счетного числа компонент P_e, представимых в виде однозначных функций

$$q = f_e(\omega), \quad e = 1, \ 2, \ldots$$

область определения Ω_e которых имеет размерность $n-r$ или меньше. В дальнейших рассуждениях будем учитывать лишь те компоненты множества P, для которых $\dim \Omega_e = n-r$.

Многие объекты имеют такие компоненты множества P, для которых функции f_e не зависят от компонент вектора ω. Это имеет место, если на гиперплоскости $q = q_0$ выполняются следующие равенства:

$$dU/dq_i = dB_{kj}/dq_i = 0 \tag{1.2}$$

Здесь B_{kj} — коэффициенты матрицы B. Такие установившиеся движения назовем тривиальными, остальные — существенными. Очевидно, что область определения компоненты множества P, состоящей из тривиальных установившихся движений, совпадает со всем пространством Ω.

Отдельные компоненты множества P могут пересекаться в точках некоторого множества меньшей размерности L. В точках множества L происходит ветвление решения системы уравнений (1.1) и по необходимости обращается в нуль ее якобиан $\det W$. Широкий круг механических систем обладает тем свойством, что условие обращения в нуль якобиана выполняется лишь в точках ветвления и не выполняется в остальных точках множества P. Это позволяет ввести в рассмотрение некоторую дополнительную характеристику.

Обозначим через ν число отрицательных собственных чисел матрицы W. Предположим, что компонента P_e множества P разделена на две (или более) связные части P_{e1} и P_{e2} «линией» L. Поскольку на L обращается в нуль по крайней мере одно из собственных чисел матрицы W, то вполне может оказаться, что величина ν примет различные значения в каждой из частей P_{e1} и P_{e2}. В то же время для всех точек одной части это число одинаково. Поэтому целесообразно различать компоненты множества P не только по признаку однозначности функций f_e, но и по соответствующему значению величины ν, которое в дальнейшем будем именовать индексом. (Введенное здесь понятие индекса представляет собой обобщение понятия степень неустойчивости по Пуанкаре, используемого при специальном выборе управляющих сил.) Связную однозначную компоненту множества P назовем листом P_e, если во всех точках этой компоненты постоянен индекс ν и никакие ее внутренние точки не являются точками ветвления решения уравнений (1.1).

Набор листов P_e можно считать геометрической характеристикой исходной системы. Описание этого образа должно содержать перечень листов с указанием соответствующих индексов. При любом выборе управляющих сил F_j возможным установившимся движениям соответствуют некоторые точки множества P. Как будет видно из дальнейшего, разбиение множества на листы полезно для качественного исследования задачи о стабилизации и для построения стабилизирующих воздействий.

Отметим также, что далеко не все точки множества P, в которых выполняется условие $\det W = 0$ (особые точки), обязаны быть точками ветвления. Вопрос о количестве решений в окрестности особых точек требует дополнительного анализа (см., например, [3]).

Пример 1. Опишем множество возможных установившихся движений физического маятника, горизонтальная ось OO' качания которого может поворачиваться вокруг вертикальной оси NN'. В [4, 5] отмечены некоторые интересные свойства движения этой системы, которая имеет две степени свободы: поворот оси качания на угол ψ (псевдоциклическая координата) вокруг оси NN', поворот тела вокруг оси качания на угол ϑ (позиционная координата). Для простоты примем, что оси OO' и NN' пересекаются в точке O, оси OO' и OG (G — центр тяжести тела) — главные оси эллипсоида инерции тела для точки O. При этих предположениях

$$2T = I_1\vartheta^{\cdot 2} + (I_2 \sin^2\vartheta + I_3\cos^2\vartheta)\omega^2$$
$$U = mga\cos\vartheta, \quad a = |OG|$$

Здесь $\omega = \psi^{\cdot}$, m — масса, а I_1, I_2, I_3 — соответствующие моменты инерции тела. Система уравнений (1.1) превращается в одно уравнение

$$mga\sin\vartheta - (I_2 - I_3)\,\omega^2 \sin\vartheta\cos\vartheta = 0$$

Очевидно, что это уравнение имеет ветви тривиальных решений

$$\vartheta_k = \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \ldots$$

и ветви существенных решений

$$\vartheta_* = \operatorname{Arccos}\frac{mga}{(I_2 - I_3)\,\omega^2}$$

которые пересекаются с соответствующей ветвью тривиальных решений при $\omega = \omega_*$, где $mga = \omega_*^2\,|I_2 - I_3|$.

Ограничимся описанием только той части множества P, для которой $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$. Она содержит четыре листа. При $I_2 > I_3$ семейство тривиальных движений $\vartheta = 0$ состоит из двух листов: P_1 ($0 \leqslant \omega < \omega_*$) с индексом $\nu_1 = 0$ и P_2 ($\omega > \omega_*$) с индексом $\nu_2 = 1$. Кроме того, имеется лист P_3 существенных движений при $\omega > \omega_*$, индекс которого $\nu_3 = 0$, и лист P_4 тривиальных движений $\vartheta = \pi$ с индексом $\nu_4 = 1$.

При $I_2 < I_3$ имеем лист P_1 движений $\vartheta = 0$ ($\nu_1 = 0$), движения $\vartheta = \pi$ образуют два листа: P_2 ($\omega < \omega_*$, $\nu_2 = 1$) и P_4 ($\omega > \omega_*$, $\nu_4 = 0$). Лист P_3 существенных движений имеет индекс $\nu_3 = 1$.

Управляющей силой F служит момент, развиваемый приводом, вращающим ось OO'.

Пример 2. Рассмотрим тяжелый гироскоп в совершенном кардановом подвесе с вертикальной осью вращения внешнего кольца [6, 7]. Уравнение (1.1) в этом случае имеет вид

$$[(I_{3*} - I_{2*})\omega_2^2\cos\vartheta + I_3\omega_2\omega_3 + mga]\sin\vartheta = 0 \tag{1.3}$$
$$I_{2*} = I_1 + J_2, \quad I_{3*} = I_3 + J_3$$

Здесь псевдоциклические скорости ω_3, ω_2 — угловые скорости собственного вращения и прецессии гироскопа, позиционная координата ϑ $(0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi)$ — угол нутации, I_1, I_3, J_2, J_3 — соответствующие моменты инерции ротора и внутреннего кольца подвеса, m — масса гироскопа, a — расстояние от центра тяжести гироскопа до центра подвеса.

Видно, что уравнение (1.3) имеет два тривиальных решения: $\vartheta_1 = 0$ и $\vartheta_2 = \pi$. Кроме того, при $I_{3*} \neq I_{2*}$ на плоскости параметров ω_2, ω_3 имеются две области Ω_7, Ω_8, точкам которых отвечают дополнительные решения уравнения (1.3)

$$\vartheta_{3,4} = \arccos \frac{mga + I_3\omega_2\omega_3}{\omega_2^2 (I_{2*} - I_{3*})}$$

Поверхности $\vartheta_{3,4}$ (ω_2, ω_3) пересекаются с плоскостью $\vartheta = 0$ по ветвям гиперболы

$$mga + I_3\omega_2\omega_3 + (I_{3*} - I_{2*})\omega_2^2 = 0 \tag{1.4}$$

и с плоскостью $\vartheta = \pi$ по ветвям гиперболы

$$mga + I_3\omega_2\omega_3 + (I_{2*} - I_{3*})\omega_2^2 = 0 \tag{1.5}$$

Обе гиперболы составляют семейство линий ветвления L.

Вычислив знак якобиана уравнения (1.3), определим индексы листов множества P. Плоскость $\vartheta = 0$ состоит из трех листов: P_1 — часть плоскости, расположенная между ветвями гиперболы (1.4), с индексом $\nu_1 = 0$, P_2 и P_3 $(\nu_2 = \nu_3 = 1)$ — части плоскости вне гиперболы (1.4). Плоскость $\vartheta = \pi$ состоит также из трех листов: P_4 $(\nu_4 = 1)$ — часть плоскости внутри гиперболы (1.5); P_5, P_6 $(\nu_5 = \nu_6 = 0)$ — части плоскости вне гиперболы (1.5). Индексы листов P_7, P_8 существенных движений определяются знаком разности $I_{3*} - I_{2*}$. Если $I_{2*} < I_{3*}$, то $\nu_7 = \nu_8 = 1$ и $\Omega_7 = \Omega_1 \cap \Omega_5$, $\Omega_8 = \Omega_1 \cap \Omega_6$. В случае $I_{2*} > I_{3*}$ имеем $\nu_7 = \nu_8 = 0$ и $\Omega_7 = \Omega_2 \cap \Omega_5$, $\Omega_8 = \Omega_2 \cap \Omega_6$.

Управляющими силами в рассматриваемой задаче могут служить воздействия: F_3 — момент двигателя, установленного на внутреннем кольце и приводящего во вращение гироскоп, F_2 — момент двигателя, вращающего внешнее кольцо подвеса.

2. Уравнения первого приближения. Обсудим вопрос о стабилизируемости установившихся движений, принадлежащих различным листам множества P. Ограничимся, как и в [1, 2], анализом уравнений первого приближения, для чего уравнения Лагранжа линеаризуем в окрестности движения q_0, ω_0. Введя отклонения $x = q - q_0$, $\eta = \omega - \omega_0$, получим

$$A_{i0}\ddot{x} + D_{i0}\dot{x} + W_{i0}x - \left[\frac{\partial}{\partial q_i}(\omega^T B)\right]_0 \eta = 0 \tag{2.1}$$

$$\dot{x}^T \left[\frac{\partial}{\partial q}(B_j\omega)\right]_0 + B_{j0}\dot{\eta} = K_j\eta + M_jx + N_j\dot{x}$$

Здесь D_i — i-я строка матрицы D линейной части диссипативной силы Q_{id}, A_i, B_j, W_i — строки матриц A, B, W, K_j, M_j, N_j — строки соответствующих матриц, K, M, N линейных управляющих сил. Нулевой индекс означает, что соответствующая величина вычислена при $q = q_0$, $\omega = \omega_0$. Будем считать, что $\det D \neq 0$.

Система (2.1) может рассматриваться с точки зрения структуры сил [8] как результат наложения на две независимые подсистемы

$$A_{i0}\ddot{x} + W_{i0}x + D_{i0}\dot{x} = 0, \quad B_{j0}\dot{\eta} = 0 \tag{2.2}$$

дополнительных сил. Такой подход позволяет получить некоторые результаты на основе теорем Кельвина—Четаева (Томсона и Тэта [8]).

Заметим, что первая подсистема (2.2) находится под действием потенциальных и диссипативных сил. Ее нулевое решение асимптотически устойчиво, если установившееся движение ω_0, q_0 принадлежит листу с нулевым индексом ($\nu_e = 0$) и неустойчиво, если $\nu_e \neq 0$.

Уравнения (2.1) позволяют немедленно решить вопрос о стабилизации тривиальных установившихся движений. В этом случае выполняются условия (1.2) и первые подсистемы в (2.1) и (2.2) совпадают. Это позволяет сформулировать следующие утверждения.

Утверждение 1. Любое тривиальное установившееся движение, принадлежащее листу P_e, индекс которого $\nu_e \neq 0$, нестабилизируемо никакими линейными управляющими силами.

Утверждение 2. Если тривиальное установившееся движение принадлежит листу с нулевым значением индекса, то для его стабилизации достаточно, чтобы матрица $-K-K^T$ была определенно-положительной.

Отметим также, что установленные на основе линейных уравнений (2.1) свойства стабилизируемости или нестабилизируемости сохраняются и в силу полных уравнений движения.

Пример 1. Продолжим анализ движения физического маятника. Утверждение 1 позволяет установить нестабилизируемость установившихся движений, принадлежащих листам P_2, P_4 для случая $I_2 > I_3$ и P_2 для случая $I_3 > I_2$. Для стабилизации остальных листов тривиальных установившихся движений достаточно, чтобы $F = k(\omega - \omega_0)$ $(k < 0)$.

Пример 2. Для гироскопа в кардановом подвесе получаем, что никакие линейные силы F_2, F_3 не могут стабилизировать установившиеся движения, принадлежащие листам P_2, P_3, P_4. Стабилизация установившихся движений на листах P_1, P_5, P_6 достигается, например, следующим управлением: $F_j = k_j(\omega_j - \omega_{j0})$ $(k_j < 0)$, $j = 2, 3$.

3. Стабилизация существенного установившегося движения. Пусть теперь режим движения $q = q_0$, $\omega = \omega_0$ принадлежит листу существенных установившихся движений. И в этом случае задачу о выборе структуры управляющих сил можно свести к анализу двух независимых подсистем, если воспользоваться следующим приемом.

Потребуем, чтобы система (2.1) обладала инвариантным многообразием

$$\eta + Hx + Gx^{\cdot} = 0 \tag{3.1}$$

Для этого достаточно, чтобы система

$$y^{\cdot} = -\gamma y, \quad y = B\eta + BHx + BGx^{\cdot} \tag{3.2}$$

удовлетворялась тождественно в силу уравнений (2.1). Здесь γ — произвольная матрица. Очевидно, что выбор матриц H, G, γ однозначно определяет коэффициенты матриц K, M, N управляющих сил.

Потребуем также, чтобы матрица γ была симметрической и определенно-положительной. Тогда многообразие (3.1) асимптотически устойчиво.

Первое уравнение (2.1) на многообразии (3.1), вообще говоря, представляет собой линейную систему общего положения, находящуюся под действием сил полной структуры. Однако ее размерность определяется лишь числом позиционных координат и уже этим облегчен анализ устойчивости ее нулевого решения. В свою очередь вопрос об устойчивости исследуемого режима движения решается на основе следующего очевидного утверждения.

Утверждение 3. Если возможен такой выбор матриц H и G, что подсистема из первого уравнения (2.1) на многообразии (3.1) обладает асимптотически устойчивым нулевым решением, то установившееся движение $q = q_0$, $\omega = \omega_0$ стабилизируемо.

Утверждение 3 — лишь частная форма теорем о стабилизируемости, сформулированных в работах [1, 2] для общего случая гироскопически связанных систем. При построении стабилизирующих воздействий можно воспользоваться также методикой стабилизации линейных механических систем, изложенной в [9].

Задача построения стабилизирующих воздействий упростится, если ограничиться матрицами

$$G=0, \quad H=\Gamma\left[\frac{\partial}{\partial q}(B\omega)\right]_0$$

где Γ — некоторая симметричная определенно-положительная матрица. В этом случае подсистема из первого уравнения (2.1) на многообразии (3.1) имеет вид

$$A_{i0}x^{\cdot\cdot}+D_{i0}x^{\cdot}+W_{i0}x+W_{i0}'x=0 \tag{3.3}$$

$$W_{i0}'=\left[\frac{\partial}{\partial q_i}(\omega^T B)\right]_0\Gamma\left[\frac{\partial}{\partial q}(B\omega)\right]_0$$

Система (3.3) отличается от системы (2.2) дополнительными потенциальными силами с матрицей W_0', образованной строками W_{i0}'.

Если установившееся движение принадлежит листу с нулевым значением индекса, то асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (3.3) достигается даже при $\Gamma = 0$. Можно заметить также, что матрица W_0' неотрицательна. Поэтому можно надеяться на стабилизацию установившихся движений, принадлежащих некоторым листам P_e, для которых $\nu_e \neq 0$. Возможность такой стабилизации уточняется следующим утверждением.

Утверждение 4. Пусть $x^{(1)},\ldots, x^{(\nu_e)}$ — собственные векторы матрицы W_0, отвечающие ее отрицательным собственным числам, m — размерность линейного подпространства X

$$\left[\frac{\partial}{\partial q}(B\omega)\right]_0 x=0 \quad (m\geqslant 2r-n)$$

Тогда для стабилизации рассматриваемым способом установившегося движения необходимо, чтобы $\nu_e\leqslant r-m$, и достаточно, чтобы векторы $x^{(1)},\ldots, x^{(\nu_e)}$ не принадлежали подпространству X.

При выполнении условий утверждения 4 возможен такой выбор матрицы Γ (например, в виде диагональной матрицы), что матрица $W_0 + W_0'$ потенциальных сил в системе уравнений (3.3) станет определенно-положительной. Это и обеспечивает устойчивость нулевого решения системы (3.3).

После того как матрица Γ выбрана, соответствующие матрицы K, M, N вычисляются по формулам

$$K=-\gamma B_0, \quad M=-\gamma B_0\Gamma\left[\frac{\partial}{\partial q}(B\omega)\right]_0$$

$$N=\left[\frac{\partial}{\partial q}(B\omega)\right]_0-B_0\Gamma\left[\frac{\partial}{\partial q}(B\omega)\right]_0$$

Перечислим ограничения, которым должны удовлетворять коэффициенты матриц K, M, N управляющих сил, решающие задачу стабилизации. Первая группа ограничений — условия определенной положительности матрицы γ. Вторая группа — условия определенной положительности матрицы $W_0 + W_0'$. Естественно, что произвол в выборе матрицы γ доставляет достаточно широкую свободу и в выборе матриц K, M. Коэффициенты матрицы γ (соответственно и матриц K, M) в частности, могут быть выбраны малыми.

Различия в условиях устойчивости подсистемы (3.3) для случаев $\Gamma = 0$ и $\Gamma = B^{-1}$ указывались в работах [4, 10].

Пример 1. Физический маятник имеет одну позиционную координату. Для установившегося движения на листе P_3 имеем

$$\partial B/\partial\vartheta = (I_3 - I_2)\sin 2\vartheta \neq 0$$

Поэтому линейное подпространство X вырождается в точку $x = 0$. Если $I_2 > I_3$, то $\nu_3 = 0$ и вопроса о стабилизации установившегося движения на листе P_3 практически нет. В случае $I_3 > I_2$ имеем $\nu_3 = 1$, но любое установившееся движение, принадлежащее этому листу, может быть стабилизировано выбором достаточно большого числа Γ. Поскольку

$$W' = {}^1/_4\Gamma\,(I_3 - I_2)^2\omega^2\sin^2 2\vartheta$$

условие $W_0 + W_0' > 0$ после соответствующих преобразований принимает вид

$$\Gamma > (I_3 - I_2)\,\omega_0^4\sin^2\vartheta_*\,(\omega_0)\,(mga)^{-1}$$

При больших значениях угловой скорости величина Γ, необходимая для стабилизации, имеет порядок ω_0^4. Если (см. (3.4)) величины коэффициентов обратной связи по псевдоциклической скорости и по позиционной координате (K и M) можно уменьшить за счет выбора малой величины γ, то величина коэффициента обратной связи по позиционной скорости (N) имеет тот же порядок, что и Γ.

Пример 2. Гироскоп в кардановом подвесе также имеет лишь одну позиционную координату ϑ. Для него также возможна стабилизация установившихся движений, принадлежащих листам P_7, P_8. При этом в случае $I_{2*} > I_{3*}$ можно принять $\Gamma = 0$. В случае $I_{2*} < I_{3*}$ можно ограничиться выбором $\Gamma = kE$, где k — скалярная величина. Имеем

$$W = (I_{2*} - I_{3*})\,\omega_2^2\sin^2\vartheta$$

$$W' = k\,[(I_{2*} - I_{3*})\,\omega_2\sin 2\vartheta - I_3\,\omega_3\sin\vartheta]^2 + kI_3^2\omega_2^2\sin^2\vartheta$$

Для выполнения условия $W_0 + W_0' > 0$ достаточно выбрать величину k такой чтобы $kI_3^2 > I_{3*} - I_{2*}$. В отличие от предыдущего примера величина параметра обратной связи k (и всех остальных) может быть принята одинаковой для стабилизации всех существенных установившихся движений.

4. Об устойчивости при слабом управлении. В некоторых прикладных задачах представляет интерес анализ влияния сил F_j с малыми по величине коэффициентами

$$F_j = \varepsilon\,(K_j\eta + M_jx + N_j\dot{x})$$

(ε — малый параметр). При $\varepsilon = 0$ система уравнений (2.1) обладает инвариантным многообразием

$$W_0x - \left[\frac{\partial}{\partial q}(\omega^T B)\right]_0\eta = 0 \tag{4.1}$$

отвечающим нулевым корням характеристического уравнения. Пусть матрица $W_0 + W_0'$ при $\Gamma = B^{-1}$ определенно-положительная. Тогда многообразие (4.1) асимптотически устойчиво. Обозначим через λ_m ($\lambda_m < 0$) максимальную действительную часть ненулевых корней характеристического уравнения системы (2.1) при $\varepsilon = 0$.

Дальнейший анализ опирается на следующее очевидное свойство линейных систем, коэффициенты которых зависят от параметра ε непрерывным образом. Выделим некоторую группу корней $\lambda_1(\varepsilon), \ldots, \lambda_k(\varepsilon)$ характеристического уравнения и отвечающие им инвариантные векторы $x^{(1)}(\varepsilon), \ldots, x^{(k)}(\varepsilon)$. Рассмотрим интервал $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ изменения параметра, на котором ни один из выделенных корней не становится кратным ни одному из оставшихся (хотя среди корней выделенной группы могут быть и кратные). Тогда инвариантное многообразие, порожденное векторами $x^{(1)}(\varepsilon), \ldots, x^{(k)}(\varepsilon)$, зависит от ε непрерывным образом при $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ (хотя непрерывной зависимости самих векторов $x^{(1)}(\varepsilon), \ldots, x^{(k)}(\varepsilon)$ может и не быть).

Указанное свойство позволяет заметить, что при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ (ε_0 — некоторая положительная величина) система (2.1) имеет инвариантное многообразие вида

$$W_0 x - \left[\frac{\partial}{\partial q}(\omega^T B)\right]_0 \eta + \mu(\varepsilon) S(\varepsilon)\eta = 0 \tag{4.2}$$

где S — некоторая матрица, а скаляр $\mu(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Проведем замену времени и переменных η, введя

$$\tau = \varepsilon t, \quad y = B\eta + x^T \left[\frac{\partial}{\partial q}(B\omega)\right]_0$$

Запишем систему (2.1) на многообразии (4.2)

$$\frac{dy}{d\tau} = \left\{KB^{-1} - MW_0^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial q}(\omega^T B)\right]_0\right\} y + O(\mu) \tag{4.3}$$

Здесь в последнем слагаемом объединены члены, обращающиеся в нуль при $\mu = 0$.

Система уравнений (4.3) имеет существенно меньшую размерность, чем исходная, содержит малый параметр μ, что позволяет применить к ней известные методы.

Пусть $\varkappa_m$ ($\varkappa_m \neq 0$) — максимальная действительная часть корней характеристического уравнения системы (4.3) при $\mu = 0$. Очевидно, что знак $\varkappa_m$ позволяет судить об устойчивости или неустойчивости нулевого решения системы (2.1) при выполнении двух условий: $|\mu|$ мало по сравнению с $|\varkappa_m|$ и $|\varepsilon\varkappa_m|$ мало по сравнению с $|\lambda_m|$. Первое условие обеспечивает совпадение знаков $\varkappa_m$ и максимальной действительной части корней характеристического уравнения системы (4.3) при достаточно малом значении параметра μ. Благодаря ему можно утверждать неустойчивость нулевого решения (установившегося движения), если $\varkappa_m > 0$.

При выполнении второго условия инвариантное многообразие (4.2) для достаточно малых значений параметра ε содержит инвариантные векторы, отвечающие корням характеристического уравнения системы (2.1) с максимальной действительной частью. Оба условия необходимы для справедливости заключения об устойчивости нулевого решения (установившегося движения) в случае $\varkappa_m < 0$.

Кроме того, справедливо утверждение о невозможности стабилизации установившегося движения при достаточно малых значениях параметра ε, если $\lambda_m > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Об управлении и стабилизации систем с циклическими координатами.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 6, с. 966.
2. *Лилов Л. К.* О стабилизации стационарных движений механических систем по части переменных.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 6, с. 977.
3. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979, 255 с.
4. *Румянцев В. В.* Об устойчивости разномерных вращений механических систем.— Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1962, № 6, с. 113.
5. *Ишлинский А. Ю.* Пример бифуркации, не приводящий к появлению неустойчивых форм стационарного движения.— Докл. АН СССР, 1957, т. 117, № 1, с. 47.
6. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе.— ПММ, 1958, т. 22, вып. 3, с. 379.
7. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.
8. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976. 319 с.
9. *Габриелян М. С.* О стабилизации неустойчивых движений механических систем.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 3, с. 493.
10. *Степанов С. Я.* О трех режимах циклических движений в системе.— В кн.: Проблемы аналитической механики, теории устойчивости и управления. Изд. Казанск. авиац. ин-та, 1976, с. 303.

Москва

Поступила в редакцию
3.X.1980