Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 3, 1981

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА НА АБСОЛЮТНО ГЛАДКОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Карапетян А. В.

Исследуется устойчивость стационарных движений тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. В случае произвольного распределения масс и произвольной поверхности тела получены условия существования и устойчивости перманентных вращений, а в случае динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения,— условия существования и устойчивости регулярных прецессий. Отмечена определенная аналогия исследуемой задачи и задачи об устойчивости перманентных вращений произвольного и регулярных прецессий динамически симметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, а также их существенные различия.

1. Рассмотрим тяжелое твердое тело, ограниченное гладкой выпуклой поверхностью и находящееся на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. Положение тела будем задавать координатами x и y его центра масс в неподвижной системе координат $Oxyz$ (плоскость Oxy совпадает с опорной горизонтальной плоскостью, ось Oz направлена вертикально вверх) и углами Эйлера θ, φ и ψ, которые составляют главные центральные оси $G\xi$, $G\eta$ и $G\zeta$ эллипсоида инерции тела с осями неподвижной системы координат. Тогда функция Лагранжа системы примет вид

$$\begin{aligned}L &= {}^1/_2\,[A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi + m(\chi_1\cos\theta - \zeta\sin\theta)^2]\theta^{\cdot 2} + \\ &+ {}^1/_2\,(C + m\chi_2^2\sin^2\theta)\,\varphi^{\cdot 2} + {}^1/_2\,[(A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi)\sin^2\theta + \\ &+ C\cos^2\theta]\psi^{\cdot 2} + m(\chi_1\cos\theta - \zeta\sin\theta)\,\chi_2\sin\theta\,\theta^{\cdot}\varphi^{\cdot} + \\ &+ (A - B)\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\;\theta^{\cdot}\psi^{\cdot} + C\cos\theta\,\varphi^{\cdot}\psi^{\cdot} + {}^1/_2\,m(x^{\cdot 2} + \\ &+ y^{\cdot 2}) + mg(\chi_1\sin\theta + \zeta\cos\theta)\\ \chi_1 &= \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi,\;\; \chi_2 = \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi\end{aligned}$$

Здесь m — масса тела, A, B, C — его главные центральные моменты инерции, ξ, η, ζ — координаты точки касания тела с плоскостью в системе $G\xi\eta\zeta$. Можно показать, что ξ, η, ζ представляют собой функции переменных θ и φ, определяемые по виду уравнения, задающего ограничивающую тело поверхность, и удовлетворяющие двум соотношениям вида

$$(\xi'\sin\varphi + \eta'\cos\varphi)\sin\theta + \zeta'\cos\theta \equiv 0 \tag{1.1}$$

где штрих означает дифференцирование по θ или φ.

Очевидно, координаты x, y и ψ — циклические, им отвечают первые интегралы системы

$$\frac{\partial L}{\partial x^{\cdot}} = p = \mathrm{const},\quad \frac{\partial L}{\partial y^{\cdot}} = q = \mathrm{const},\quad \frac{\partial L}{\partial \psi^{\cdot}} = Q = \mathrm{const} \tag{1.2}$$

с помощью которых можно проигнорировать циклические переменные и ввести функцию Рауса

$$R=\frac{1}{2}\left[I_{22}-\frac{I_{23}^2}{I_{33}}+m(\chi_1\cos\theta-\zeta\sin\theta)^2\right]\theta^{\cdot 2}+$$
$$+\frac{1}{2}\left[I_{11}-\frac{I_{13}^2}{I_{33}}+m\chi_2^2\right]\sin^2\theta\varphi^{\cdot 2}+\left[-\left(I_{12}+\frac{I_{13}I_{23}}{I_{33}}\right)+\right.$$
$$\left.+m(\chi_1\cos\theta-\zeta\sin\theta)\chi_2\right]\sin\theta\,\theta^{\cdot}\varphi^{\cdot}+\frac{Q}{I_{33}}[-I_{23}\theta^{\cdot}+$$
$$+(I_{33}\cos\theta-I_{13}\sin\theta)\varphi^{\cdot}]+mg(\chi_1\sin\theta+\zeta\cos\theta)-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{Q^2}{I_{33}}-\frac{1}{2m}(p^2+q^2)$$

Здесь I_{ij} $(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$ — осевые $(i=j)$ и центробежные $(i\neq j)$ моменты инерции тела по отношению к осям системы координат $Gx'y'z'$, начало которой совпадает с центром масс тела, ось Gz' направлена вертикально вверх, ось Gy' — по линии узлов в сторону, откуда поворот оси Gz' на угол θ до совмещения с осью $G\zeta$ происходит против часовой стрелки, и ось Gx' — перпендикулярно к плоскости $Gy'z'$, так, чтобы образовывать правую систему координат

(1.3)
$$\begin{aligned}
I_{11}&=(A\sin^2\varphi+B\cos^2\varphi)\cos^2\theta+C\sin^2\theta\\
I_{22}&=A\cos^2\varphi+B\sin^2\varphi\\
I_{33}&=(A\sin^2\varphi+B\cos^2\varphi)\sin^2\theta+C\cos^2\theta\\
I_{12}&=(A-B)\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta\\
I_{13}&=(A\sin^2\varphi+B\cos^2\varphi-C)\sin\theta\cos\theta\\
I_{23}&=-(A-B)\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta
\end{aligned}$$

2. Поскольку x, y и ψ — циклические координаты, то исходная система может совершать стационарные движения вида

(2.1)
$$\theta=\theta_0,\quad \theta^{\cdot}=0,\quad \varphi=\varphi_0,\quad \varphi^{\cdot}=0,\quad \psi^{\cdot}=\psi_0^{\cdot}\equiv\omega,\quad x^{\cdot}=x_0^{\cdot}$$
$$y^{\cdot}=y_0^{\cdot}$$

При этом тело опирается о горизонтальную плоскость одной и той же своей точкой и вращается вокруг вертикали, проходящей через его центр масс, который в свою очередь движется с постоянной скоростью вдоль прямой, параллельной горизонтальной плоскости. Последнее означает, что на стационарном движении без уменьшения общности центр масс тела можно считать неподвижным. Тогда точка касания тела с опорной плоскостью описывает на последней окружность с центром в проекции центра масс тела на эту плоскость.

Постоянные θ_0, φ_0 и ω в (2.1) определяются из системы трех уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial\theta}=0,\quad \frac{\partial W}{\partial\varphi}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial\psi^{\cdot}}=Q$$
$$W=-mg(\chi_1\sin\theta+\zeta\cos\theta)+\frac{Q^2}{2I_{33}}$$

которая с учетом соотношений (1.1) и (1.3) принимает вид

$$(\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi)\cos\theta-\zeta\sin\theta=-\frac{Q^2I_{13}}{mgI_{33}^2}$$
$$\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi=\frac{Q^2I_{23}}{mgI_{33}},\quad I_{33}\omega=Q$$

Поскольку постоянная Q в (1.2) произвольна, то ω также можно выбирать произвольным; при этом постоянные θ_0 и φ_0 будут определяться из системы двух уравнений вида

$$(\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi)\cos\theta-\zeta\sin\theta=-\frac{I_{13}\omega^2}{mg} \tag{2.2}$$
$$\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi=\frac{I_{23}\omega^2}{mg}$$

Исключая из системы (2.2) ω^2, получим соотношение

$$(B-C)\,\xi\sin\theta\cos\varphi\cos\theta+(C-A)\eta\sin\theta\sin\varphi\cos\theta+ \tag{2.3}$$
$$+(A-B)\zeta\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi=0$$

которому на стационарном движении должны удовлетворять θ и φ, или, что одно и то же, направляющие косинусы $\gamma_1=\sin\theta\sin\varphi$, $\gamma_2=\sin\theta\cos\varphi$, $\gamma_3=\cos\theta$ возможных осей перманентных вращений тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. Очевидно, уравнение (2.3) с точностью до обозначений совпадает с соответствующим уравнением, которому должны удовлетворять направляющие косинусы возможных осей перманентных вращений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой [1]. Только в последнем случае ξ, η и ζ — координаты центра масс тела в главных осях его эллипсоида инерции, построенного для неподвижной точки, а A, B и C — соответствующие главные моменты инерции. Заметим, однако, существенное отличие этих уравнений. В случае твердого тела с неподвижной точкой ξ, η и ζ постоянны и уравнение (2.3) определяет в пространстве γ_1, γ_2, γ_3 конус второго порядка; в исследуемой же задаче ξ; η и ζ — функции θ и φ (т. е. функции γ_1, γ_2 и γ_3) и уравнение (2.3) определяет, вообще говоря, произвольную поверхность.

Среди кинематически возможных осей перманентных вращений, направляющие косинусы которых удовлетворяют уравнению (2.3), динамически возможными будут не все, а лишь те из них, для которых из уравнений (2.2) следует неравенство $\omega^2\geqslant 0$. Последнее приводит к условию

$$(A-B)\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\,(\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi)\leqslant 0 \tag{2.4}$$

которое с точностью до указанных обозначений прямо противоположно условию, определяющему допустимые оси в случае твердого тела с неподвижной точкой [1], т. е. при данных обозначениях допустимые оси в последней задаче недопустимы в исследуемой и наоборот, что вполне объяснимо. При перманентном вращении тела на плоскости роль неподвижной точки играет его центр масс, а на тело действует сила реакции, приложенная в точке его касания с плоскостью, которая равна по величине и прямо противоположна по направлению силе веса.

Замечание. Если величинам ξ, η и ζ поставить в соответствие координаты центра масс тела с неподвижной точкой, взятые с обратным знаком, то с точностью до такого обозначения условие (2.4) будет совпадать с соответствующим условием для случая твердого тела с неподвижной точкой, а уравнение (2.3) не изменится.

3. Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости перманентных вращений исходной системы. Функцию Рауса, используя соотношения (2.2), приведем к виду

(3.1) $$R = {}^1/_2\,[au^{\cdot 2} + 2bu^{\cdot}v^{\cdot} + cv^{\cdot 2} + j\,(vu^{\cdot} - uv^{\cdot}) + du^2 + 2euv + fv^2] + \ldots$$

$$a = \left(I_{22} - \frac{I_{23}^2}{I_{33}} + \frac{I_{13}^2}{mg^2}\omega^4\right)_0$$

$$b = -\left(I_{12} + \frac{I_{13}I_{23}}{I_{33}} + \frac{I_{13}I_{23}}{mg^2}\omega^4\right)_0 \sin\theta_0$$

$$c = \left(I_{11} - \frac{I_{13}^2}{I_{33}} + \frac{I_{23}^2}{mg^2}\omega^4\right)_0 \sin^2\theta_0$$

$$j = \left(I_{11} + I_{22} - I_{33} - 2\,\frac{I_{13}^2 + I_{23}^2}{I_{33}}\right)_0 \omega\sin\theta_0$$

$$d = -\left[mg\,(r_1\cos^2\alpha + r_2\sin^2\alpha - h) + \omega^2\left(I_{33} - I_{11} + 4\,\frac{I_{13}^2}{I_{33}}\right)\right]_0$$

$$e = -\left[mg\,(r_2 - r_1)\sin\alpha\cos\alpha - \omega^2\left(I_{12} + 4\,\frac{I_{13}I_{23}}{I_{33}}\right)\right]_0 \sin\theta_0$$

$$f = -\left[mg\,(r_1\sin^2\alpha + r_2\cos^2\alpha - h) + \omega^2\left(I_{33} - I_{22} + 4\,\frac{I_{23}^2}{I_{33}}\right)\right]_0 \sin^2\theta_0$$

Здесь u и v — возмущения переменных θ и φ, $h = h\,(\theta,\ \varphi)$ — высота центра масс тела над опорной горизонтальной плоскостью, $r_1 = r_1\,(\theta,\ \varphi)$ и $r_2 = r_2\,(\theta,\ \varphi)$ — главные радиусы кривизны поверхности тела в точке его касания с этой плоскостью, $\alpha = \alpha\,(\theta,\ \varphi)$ — угол между осью Gx' и направлением главного радиуса кривизны r_1, отсчитываемый от оси Gx' к оси Gy'; нижний нулевой индекс указывает, что соответствующая функция переменных θ и φ вычисляется для $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$, а многоточия означают члены не ниже третьего порядка по входящим в функцию Рауса переменным $u^{\cdot}$, $v^{\cdot}$ и u, v.

Согласно теореме Рауса, невозмущенное движение устойчиво по Ляпунову относительно θ, $\theta^{\cdot}$, φ, $\varphi^{\cdot}$, $\psi^{\cdot}$, $x^{\cdot}$ и $y^{\cdot}$ при условиях

(3.2) $d < 0$ (или $f < 0$)

(3.3) $df - e^2 > 0$

При строгом нарушении неравенства (3.3) невозмущенное движение неустойчиво согласно теореме Кельвина — Четаева, а при его выполнении и строгом нарушении неравенства (3.2) устойчивость зависит от знака выражения

(3.4) $$J = j^2 - (af + cd) + 2be - 2\,[(ac - b^2)\,(df - e^2)]^{1/2}$$

Если $J < 0$, то характеристическое уравнение линеаризованных уравнений возмущенного движения приведенной системы имеет корень в правой полуплоскости и невозмущенное движение неустойчиво; если же $J > 0$, то это характеристическое уравнение имеет две пары чисто мнимых корней и для получения строгих результатов об устойчивости в этом случае необходимо дальнейшее исследование.

Поскольку θ_0 и φ_0 зависят от ω^2 (см. (2.2)), то (см. (3.1) — (3.4)) устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости зависит только от распределения масс и геометрии поверхности поля, а также от величины его угловой скорости и не зависит от направления вращения. Если с помощью соотношений (2.2) исключить ω^2 из условий устойчивости, то для каждого конкретного вида поверхности тела на многообразии (2.3), (2.4) допустимых осей перманентных вращений можно выделить области устойчивых или неустойчивых движений, как это ранее было сделано [1] для случая твердого тела с неподвижной точкой. Однако для произвольной поверхности тела сделать это не удается, поскольку явный вид функций $\xi(\theta, \varphi)$, $\eta(\theta, \varphi)$ и $\zeta(\theta, \varphi)$ не известен.

Замечания. 1°. Если вращение тела происходит вокруг одной из главных осей его эллипсоида инерции, то найденные условия устойчивости переходят в соответствующие условия, полученные в [2] (если в последних кинетический момент ротора положить равным нулю).

2°. При $\omega = 0$ уравнения (2.2) определяют положения равновесия тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости, а условия (3.2) и (3.3) — их устойчивость. При этом ($\omega = 0$) соотношения (2.2) означают, что центр масс тела в положении равновесия находится на вертикали, проходящей через точку касания тела с опорной плоскостью, а условия (3.2) и (3.3) — что равновесие устойчиво (относительно θ, $\theta^{\cdot}$, φ, $\varphi^{\cdot}$, $\psi^{\cdot}$, $x^{\cdot}$ и $y^{\cdot}$), если центр масс тела находится ниже обоих главных центров кривизны поверхности тела в точке его касания с опорной плоскостью, и неустойчиво в противном случае.

4. *Пример.* Рассмотрим тяжелый неоднородный шар на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. Пусть ρ — радиус шара, а $-\lambda$, $-\mu$ и $-\nu$ — координаты его геометрического центра в системе $G\xi\eta\zeta$. Тогда

$$\xi = -\lambda - \rho\gamma_1, \quad \eta = -\mu - \rho\gamma_2, \quad \zeta = -\nu - \rho\gamma_3 \tag{4.1}$$

и уравнение (2.3) и условие (2.4) принимают соответственно вид

$$(B - C)\lambda\gamma_2\gamma_3 + (C - A)\mu\gamma_1\gamma_3 + (A - B)\nu\gamma_1\gamma_2 = 0 \tag{4.2}$$

$$(A - B)\gamma_1\gamma_2(\lambda\gamma_2 - \mu\gamma_1) \geqslant 0 \tag{4.3}$$

и в точности совпадают с соответствующими выражениями для случая твердого тела с неподвижной точкой, координаты центра масс которого в главных осях его эллипсоида инерции, построенного для неподвижной точки, суть λ, μ, ν, причем уравнение (4.2) также определяет в этом случае конус второго порядка. Следовательно, с точностью до указанного смысла постоянных λ, μ и ν многообразия допустимых осей перманентных вращений в данном примере и в задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой совпадают.

Вычисляя теперь коэффициенты квадратичной части функции Рауса в обоих случаях и сравнивая их друг с другом, получим $a_1 = a_2 + \delta^2 = a$, $b_1 = b_2 - \delta\varepsilon = b$, $c_1 = c_2 + \varepsilon^2 = c$, $j_1 = j_2 = j$

$$d_1 = d_2 = -\left[-mgk + \omega^2\left(I_{33} - I_{11} + 4\frac{I_{13}^2}{I_{33}}\right)\right]_0$$

$$e_1 = e_2 = \omega^2\left(I_{12} + 4\frac{I_{13}I_{23}}{I_{33}}\right)_0 \sin\theta_0$$

$$f_1 = f_2 = -\left[-mgk + \omega^2\left(I_{33} - I_{22} + 4\frac{I_{23}^2}{I_{33}}\right)\right]_0 \sin^2\theta_0$$

$$\delta = \left(\frac{I_{13}\omega^2}{\sqrt{mg}}\right)_0, \quad \varepsilon = \left(\frac{I_{23}\omega^2}{\sqrt{mg}}\right)_0 \sin\theta_0$$

Здесь a, b, c и j без индексов имеют вид (3.1), индекс 1 отвечает исследуемому примеру, а индекс 2 — случаю твердого тела с неподвижной точкой, причем в первом случае $k = k(\theta, \varphi)$ — аппликата геометрического центра шара в системе координат $Gx'y'z'$, взятая с обратным знаком, а во втором — аппликата центра масс тела в системе координат с началом в неподвижной точке и аналогичной системе $Gx'y'z'$.

Отсюда следует, что с точностью до указанных обозначений область выполнения определяемых по теореме Рауса достаточных условий устойчивости перманентных вращений тяжелого неоднородного шара на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости совпадает с соответствующей областью выполнения достаточных условий устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Аналогичное утверждение справедливо и для области выполнения достаточных условий неустойчивости, определяемых по теореме Кельвина — Четаева. Что касается области выполнения необходимых условий устойчивости, определяемых положительным знаком J (3.4), то в исследуемой задаче она у́же соответствующей области для случая твердого тела с неподвижной точкой, поскольку

$$J_1 - J_2 = -(f_2\delta^2 + 2e_2\delta\varepsilon + d_2\varepsilon^2) + 2\,(d_2f_2 - e_2^2)^{1/2}[(a_2c_2 - b_2^2)^{1/2} - \\ - (a_2c_2 - b_2^2 + c_2\delta^2 + 2b_2\delta\varepsilon + a_2\varepsilon^2)^{1/2}] < 0 \quad \forall\varepsilon,\ \delta,\ \varepsilon^2 + \delta^2 \neq 0$$

Заметим, что при $A \neq B \neq C \neq A$ имеем $\varepsilon = \delta = 0$ только в том случае, когда вращение происходит вокруг одной из главных осей эллипсоида инерции тела; при этом все условия устойчивости в обеих задачах совпадают (с точностью до указанных обозначений).

5. Рассмотрим теперь случай динамически симметричного твердого тела, ограниченного поверхностью вращения. Тогда, направляя по оси симметрии тела ось $G\zeta$, получим, что функция Лагранжа системы примет вид

$$L = {}^1/_2\,[A + m\,(\chi_1 \cos\theta - \zeta \sin\theta)^2]\,\theta^{\cdot 2} + {}^1/_2\,A \sin^2\theta\psi^{\cdot 2} + \\ + {}^1/_2\,C\,(\varphi^{\cdot} + \psi^{\cdot}\cos\theta)^2 + {}^1/_2 m\,(x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}) + mg\,(\chi_1 \sin\theta + \\ + \zeta\cos\theta)$$

Можно показать, что в данном случае χ_1 и ζ — функции только одной переменной θ, удовлетворяющие соотношению

$$\chi_1' \sin\theta + \zeta' \cos\theta \equiv 0 \tag{5.1}$$

где штрих означает дифференцирование по θ, а $\chi_2 \equiv 0$.

Очевидно, координаты x, y, φ, и ψ — циклические, им отвечают первые интегралы системы

$$\frac{\partial L}{\partial x^{\cdot}} = p = \text{const}, \quad \frac{\partial L}{\partial y^{\cdot}} = q = \text{const}, \quad \frac{\partial L}{\partial \psi^{\cdot}} = P = \text{const} \\ \frac{\partial L}{\partial \psi^{\cdot}} = Q = \text{const} \tag{5.2}$$

с помощью которых можно проигнорировать циклические переменные и ввести функцию Рауса

$$R = {}^1/_2\,[A + m\,(\chi_1\cos\theta - \zeta\sin\theta)^2]\,\theta^{\cdot 2} + mg\,(\chi_1\sin\theta + \zeta\cos\theta) - \\ - \frac{P^2}{2C} - \frac{1}{2m}(p^2 + q^2) - \frac{1}{2}\,\frac{(Q - P\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta}$$

Кроме того, исходная система может совершать стационарные движения вида

$$\theta = \theta_0, \quad \theta^{\cdot} = 0, \quad \varphi^{\cdot} = \varphi_0^{\cdot} \equiv \Omega, \quad \psi^{\cdot} = \psi_0^{\cdot} \equiv \omega, \quad x^{\cdot} = x_0^{\cdot}, \quad y^{\cdot} = y_0^{\cdot} \tag{5.3}$$

При этом тело вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг своей оси симметрии и с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикали, проходящей через центр масс тела, который в свою очередь движется с постоянной скоростью вдоль прямой, параллельной горизонтальной плоскости. Как и ранее, без уменьшения общности будем считать центр масс неподвижным на стационарном движении. Тогда точка касания тела с опорной плоскостью описывает в стационарном движении две окружности: одну — на поверхности тела в плоскости, перпендикулярной его оси симметрии, и другую — на опорной плоскости. Центр первой окружности находится на оси симметрии тела в точке с координатой $\zeta(\theta_0)$, а центр второй — в проекции центра масс на опорную плоскость.

Постоянные θ_0, Ω и ω в (5.3) определяются из системы трех уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial\theta}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial\varphi^{\cdot}}=P,\quad \frac{\partial L}{\partial\psi^{\cdot}}=Q$$

$$W=-mg(\chi_1\sin\theta+\zeta\cos\theta)+\frac{(Q-P\cos\theta)^2}{2A\sin^2\theta}$$

которая с учетом соотношений (5.1) принимает вид

$$-mg(\chi_1\cos\theta-\zeta\sin\theta)+\frac{(Q-P\cos\theta)(P-Q\cos\theta)}{A\sin^3\theta}=0 \tag{5.4}$$

$$C(\Omega+\omega\cos\theta)=P,\quad A\sin^2\theta\,\omega+C(\Omega+\omega\cos\theta)\cos\theta= =Q$$

Постоянные P и Q в (5.2) произвольны, поэтому ω и Ω также можно выбирать произвольными; при этом постоянная θ_0 будет определяться из уравнения

$$-mg(\chi_1\cos\theta-\zeta\sin\theta)+[C\Omega+(C-A)\,\omega\cos\theta]\,\omega\sin\theta=0 \tag{5.5}$$

Первое уравнение системы (5.4) или уравнение (5.5) (в несколько иной форме полученное также в [2]) можно рассматривать как условие существования регулярной прецессии тяжелого твердого динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. В случае твердого тела с неподвижной точкой соответствующее условие существования регулярной прецессии (см., например, [3]), получается из (5.4) или (5.5) при $\chi_1=0, \zeta=-\nu$, где ν — координата центра масс тела на оси симметрии его эллипсоида инерции, построенного для неподвижной точки.

6. Очевидно, что в данном случае (одна позиционная координата в системе) невозмущенное движение устойчиво при $(\partial^2W/d\theta^2)_0>0$ и неустойчиво при строгом нарушении последнего неравенства, которое с учетом (5.4.) принимает вид

$$mg(r-l)_0+A^{-1}\sin^{-4}\theta_0\,[(P-Q\cos\theta_0)^2-2(P-Q\cos\theta_0)\times \times(Q-P\cos\theta_0)\cos\theta_0+(Q-P\cos\theta_0)^2]>0 \tag{6.1}$$

Здесь $r=r(\theta)$ — радиус кривизны меридиального сечения поверхности тела в точке его касания с опорной плоскостью, $l=l(\theta)$— расстояние от этой точки до точки пересечения оси симметрии тела с вертикалью, проходящей через первую точку.

Заметим, что второе слагаемое в условии (6.1) всегда больше нуля ($\theta\neq 0, \pi$) и в точности совпадает со значением второй производной от измененной потенциальной энергии для случая твердого тела с неподвижной точкой (см., например, [3]), в котором, как известно, регулярная прецессия всегда устойчива. В данном случае это не так. Если $r_0 \geqslant l_0$, то регулярная прецессия тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости также устойчива при любых значениях угловых скоростей прецессии и собственного вращения; если же $r_0 < l_0$, то, как следует из (6.1) с учетом (5.4) должно выполняться неравенство

$$[C\Omega + (C - 2A)\,\omega\cos\theta_0]^2 + A^2\omega^2\sin^2\theta_0 > -Amg\,(r_0 - l_0) \tag{6.2}$$

которое накладывает на значения ω и Ω ограничения снизу.

Заметим, что условие (6.2) несколько шире условия, вытекающего из полученного в [2] построением функции Ляпунова условия устойчивости квазирегулярной прецессии симметричного гиростата на горизонтальной плоскости, и является не только достаточным, но и необходимым.

Пример. Регулярная прецессия динамически симметричного тяжелого неоднородного шара на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости всегда устойчива, поскольку в этом случае $r = l = \rho$, где ρ — радиус шара.

Автор благодарит Румянцева В. В. за полезные советы и обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела.— ПММ, 1956, т. 20, вып. 1, с. 51.
2. *Румянцев В. В.* Об устойчивости вращения тяжелого гиростата на горизонтальной плоскости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 4, с. 11.
3. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 141 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.VI.1980