Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 3, 1981

УДК 531.35 : 521.1

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОМ РАВНОВЕСИИ СПУТНИКА-ГИРОСТАТА В ОБОБЩЕННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Рубановский В. Н.

Исследуется множество относительных равновесий спутника-гиростата, когда его центр масс находится в одной из прямолинейных или треугольных точек либрации. Дается наглядное геометрическое представление этого множества равновесий. Получены и проанализированы достаточные условия устойчивости.

1. Рассмотрим три тела: M_1, M_2 и M, из которых M_1 и M_2 — материальные точки или тела со сферическими распределениями масс, а M представляет собой гиростат.

Обозначим через m, m_1, m_2 и G, G_1, G_2 массы и центры масс тел M, M_1, M_2 и предположим, что $m_1 \gg m$, $m_2 \gg m$ и точки G_1 и G_2 движутся одна относительно другой по кеплеровым круговым орбитам радиуса a с орбитальной угловой скоростью Ω ($\Omega^2 = f(m_1 + m_2) a^{-3}$), где f — постоянная тяготения.

Введем равномерно вращающуюся с угловой скоростью Ω вокруг оси z прямоугольную систему осей координат G_0xyz с началом в центре масс тел M_1 и M_2, ось x которой проходит через точки G_1 и G_2, ось z перпендикулярна плоскости орбит этих точек, а ось y направлена в сторону движения точки G_2. Координаты a_1 и a_2 точек G_1 и G_2 по оси x таковы

$$a_1 = -\frac{a(1-p)}{2}, \quad a_2 = \frac{a(1+p)}{2}, \quad p = \frac{1-w}{1+w}, \quad w = \frac{m_2}{m_1} \tag{1.1}$$

Главные центральные оси инерции спутника примем за оси системы координат $Gx_1x_2x_3$. Положение корпуса гиростата в системе координат G_0xyz будем определять координатами x, y, z его центра масс и углами Эйлера ϑ, ψ, φ или косинусами α_s, β_s, γ_s ($s = 1, 2, 3$) углов между осями x_s и x, y, z, соответственно, при этом

$$\pi_1 = \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 = 0, \quad \pi_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \tag{1.2}$$

$$\pi_3 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \tag{1.3}$$

Величины α_s, β_s, γ_s выражаются известными формулами [1] через углы Эйлера.

Предположим, что роторы гиростата вращаются с постоянными относительно корпуса спутника угловыми скоростями, и обозначим через $k_s = \text{const}$ проекции на оси x_s суммарного гиростатического момента относительных движений роторов.

При вычислении силовых функций U_1 и U_2 сил ньютоновского притяжения спутника точками G_1 и G_2 будем считать, что характерный размер

l спутника много меньше расстояний $r_i = [(x - a_i)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$ ($i = 1, 2$) между точкой G и точками G_1 и G_2. Тогда, пренебрегая членами порядка l^3/r_i^3 и выше, примем приближенные выражения [1] для U_1 и U_2:

$$U_i = \frac{\mu_i m}{r_i} - \frac{3}{2}\frac{\mu_i}{r_i^3}\left(A_1\gamma_{i1}^2 + A_2\gamma_{i2}^2 + A_3\gamma_{i3}^2 - \frac{A_1+A_2+A_3}{3}\right)$$

$$\mu_i = fm_i, \quad \gamma_{is} = \frac{1}{r_i}[(x - a_i)\alpha_s + y\beta_s + z\gamma_s] \quad (i = 1, 2;\ s = 1, 2, 3)$$

Здесь A_s ($s = 1, 2, 3$) — главные центральные моменты инерции гиростата, γ_{is} — косинусы углов между осями x_s и радиус-вектором $\mathbf{r}_i$ точки G_i относительно точки G.

Измененная потенциальная энергия действующих на спутник гравитационных сил и сил инерции в системе координат $G_0\,xyz$ имеет вид [2]

$$W = -\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3}(\Omega^2 A_s\gamma_s^2 + 2\Omega k_s\gamma_s) - \frac{1}{2}m\Omega^2(x^2 + y^2) - U_1 - U_2$$

Введем безразмерные координаты

$$x = ax',\ y = ay',\ z = az',\ x_s = lx_s' \ (s = 1, 2, 3)$$

и положим

(1.4) $\quad \varepsilon = l^2/a^2,\ A_s = l^2 A_s',\ k_s = \Omega l^2 k_s' \quad (s = 1, 2, 3)$

Тогда выражение для W примет вид

(1.5) $\quad a^{-2}\Omega^{-2}W = mW_1(x', y', z') + \varepsilon W_2(x', y', z', \vartheta, \psi, \varphi)$

(1.6) $$W_1 = -\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - \frac{\mu_1'}{r_1'} - \frac{\mu_2'}{r_2'}, \quad r_i = ar_i',$$

$$\mu_i = (m_1 + m_2)\mu_i' \quad (i = 1, 2)$$

$$W_2 = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3}\{[3(h_\alpha\alpha_s^2 + h_\beta\beta_s^2 + h_\gamma\gamma_s^2 +$$

$$+ 2h_{\alpha\beta}\alpha_s\beta_s + 2h_{\beta\gamma}\beta_s\gamma_s + 2h_{\gamma\alpha}\gamma_s\alpha_s) - \gamma_s^2] - 2k_s'\gamma_s - hA_s'\}$$

(1.7) $$h_\alpha = \frac{\mu_1'(x' - a_1')^2}{r_1'^5} + \frac{\mu_2'(x' - a_2')^2}{r_2'^5}, \quad h = \frac{\mu_1'}{r_1'^3} + \frac{\mu_2'}{r_2'^3}$$

$$h_\beta = y'^2 h_1, \quad h_\gamma = z'^2 h_1, \quad h_{\beta\gamma} = y'z'h_1, \quad h_{\gamma\alpha} = z'h_2, \quad h_{\alpha\beta} = y'h_2$$

$$h_1 = \frac{\mu_1'}{r_1'^5} + \frac{\mu_2'}{r_2'^5}, \quad h_2 = \frac{\mu_1'(x' - a_1')}{r_1'^5} + \frac{\mu_2'(x' - a_2')}{r_2'^5}, \quad a_i = aa_i'$$

Уравнения относительных равновесий гиростата получим из условия стационарности функции W:

(1.8) $$\frac{\partial W_1}{\partial x'} + \frac{\varepsilon}{m}\frac{\partial W_2}{\partial x'} = 0 \quad (x'y'z'), \qquad \frac{\partial W_2}{\partial \vartheta} = \frac{\partial W_2}{\partial \psi} = \frac{\partial W_2}{\partial \varphi} = 0$$

Решение уравнений (1.8) будем искать в виде

(1.9) $\quad x' = x_{(0)}' + \varepsilon x_{(1)}' + o(\varepsilon) \quad (x'y'z')$

$\quad \vartheta = \vartheta_0 + \varepsilon\vartheta_1 + o(\varepsilon) \quad (\vartheta\psi\varphi)$

Для определения величин $x_{(0)}'$, $y_{(0)}'$, $z_{(0)}'$ имеем уравнения

$$\frac{\partial W_1}{\partial x'} = \frac{\partial W_1}{\partial y'} = \frac{\partial W_1}{\partial z'} = 0$$

совпадающие с уравнениями относительного равновесия ограниченной круговой задачи трех тел в случае, когда тело M принимается за материальную точку [1]. Следовательно, эти уравнения имеют в качестве решений три прямолинейные L_1, L_2, L_3 и две треугольные точки L_4, L_5 либрации.

Величины ϑ_0, ψ_0, φ_0 определяются из второй группы уравнений (1.8), в которых вместо x', y', z' следует подставить координаты одной из точек либрации.

Для определения $x_{(1)}'$, $y_{(1)}'$, $z_{(1)}'$, ϑ_1, ψ_1, φ_1 продифференцируем уравнения (1.8) по параметру ε в предположении, что переменные являются функциями ε, и после дифференцирования положим $\varepsilon = 0$, $x' = x'_{(0)}$, $y' = y_{(0)}'$, $z' = z_{(0)}'$, $\vartheta = \vartheta_0$, $\psi = \psi_0$, $\varphi = \varphi_0$. В результате получим уравнения

$$\left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial x'^2}\right)_0 x_{(1)}' + \left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial y'\,\partial x'}\right)_0 y_{(1)}' + \left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial z'\,\partial x'}\right)_0 z_{(1)}' = -\frac{1}{m}\left(\frac{\partial W_2}{\partial x'}\right)_0 (x'y'z') \tag{1.10}$$

$$\left(\frac{\partial^2 W_2}{\partial \vartheta^2}\right)_0 \vartheta_1 + \left(\frac{\partial^2 W_2}{\partial \vartheta\,\partial \psi}\right)_0 \psi_1 + \left(\frac{\partial^2 W_2}{\partial \vartheta\,\partial \varphi}\right)_0 \varphi_1 = -\left(\frac{\partial^2 W_2}{\partial x'\,\partial \vartheta}\right)_0 x_{(1)}' -$$
$$-\left(\frac{\partial^2 W_2}{\partial y'\,\partial \vartheta}\right)_0 y_{(1)}' - \left(\frac{\partial^2 W_2}{\partial z'\,\partial \vartheta}\right) z_{(1)}' \quad \begin{pmatrix} x'y'z' \\ \vartheta\psi\varphi \end{pmatrix}$$

2. Пусть $x_{(0)}'$, $y_{(0)}' = 0$, $z_{(0)}' = 0$ — координаты одной из прямолинейных точек либрации. Для определения ориентации корпуса гиростата в относительном равновесии вместо второй группы уравнений (1.8) используем эквивалентные им уравнения относительно направляющих косинусов α_s, γ_s $(s = 1, 2, 3)$ осей x и z. Эти уравнения получим из условия стационарности функции W_2, в которой вместо x', y', z' следует подставить координаты одной из прямолинейных точек либрации. В результате

$$W_2^\circ = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3}(3h_\alpha^\circ A_s'\alpha_s^2 - A_s'\gamma_s^2 - 2k_s'\gamma_s) \tag{2.1}$$

$$h_\alpha^\circ = \frac{\mu_1'(x_{(0)}' - a_1')^2}{r_1'^5} + \frac{\mu_2'(x_{(0)}' - a_2')^2}{r_2'^5}$$

Поскольку α_s, γ_s связаны равенствами (1.2) и (1.3), то вместо W_2° введем функцию

$$W_{2*}^\circ = W_2^\circ + 3\lambda h_\alpha^\circ \pi_1 + \frac{1}{2}\nu\pi_2 - \frac{3}{2}\sigma h_\alpha^\circ \pi_3$$

где λ, ν, σ — неопределенные множители Лагранжа.

Уравнения относительного равновесия записываются в виде

$$\partial W_{2*}^\circ/\partial\alpha_s = 3h_\alpha^\circ[(A_s' - \sigma)\alpha_s + \lambda\gamma_s] = 0 \quad (s = 1,\ 2,\ 3) \tag{2.2}$$

$$\partial W_{2*}^\circ/\partial\gamma_s = 3\lambda h_\alpha^\circ \alpha_s + (\nu - A_s')\gamma_s - k_s' = 0 \quad (s = 1,\ 2,\ 3) \tag{2.3}$$

Для исследования уравнений (1.2), (1.3), (2.2) и (2.3) используем метод, развитый [3] в задаче о стационарных движениях спутника-гиростата в поле одного притягивающего центра.

Зафиксируем $\nu = \nu_0$ и $\alpha_s = \alpha_{s0}$ $(s = 1, 2, 3)$, удовлетворяющие соотношению (1.3), и разрешим уравнения (1.2), (2.2) и (2.3) относительно σ, λ, γ_s, k_s'. В результате получим

$$\sigma = \sigma_0 = \sum_{s=1}^{3} A_s'\alpha_{s0}^2 \tag{2.4}$$

$$(2.5)\qquad \lambda=\lambda_0=\pm\Big[\sum_{s=1}^{3}A_s'^2\alpha_{s0}^2-\Big(\sum_{s=1}^{3}A_s'\alpha_{s0}^2\Big)^2\Big]^{1/2}$$

$$(2.6)\qquad \gamma_i=\gamma_{i0}=\lambda_0^{-1}\Big(\sum_{s=1}^{3}A_s'\alpha_{s0}^2-A_i'\Big)\alpha_{i0}\quad (i=1,2,3)$$

$$(2.7)\qquad k_i'=k_{i0}'=3\lambda_0 h_\alpha{}^\circ\alpha_{i0}+(\nu_0-A_i')\gamma_{i0}\quad (i=1,2,3)$$

если $\lambda_0\neq 0$.

Если $\lambda_0=0$, то в качестве γ_{i0} можно взять любые значения, удовлетворяющие уравнениям (1.2), а величины k_{i0}' определятся из (2.3)

$$(2.8)\qquad k_i'=k_{i0}'=(\nu_0-A_i')\,\gamma_{i0}\ (i=1,\ 2,\ 3)$$

Из (2.6) и (2.5) следует, что ориентация корпуса гиростата в положении относительного равновесия не зависит от параметра ν, который влияет только на выбор гиростатических моментов k_{i0}' и на устойчивость равновесий.

Выражение для λ_0^2 можно представить в виде [3]

$$(2.9)\qquad \lambda_0^2=\sum_{(123)}(A_2'-A_3')^2\alpha_{20}^2\alpha_{30}^2\geqslant 0$$

Правая часть этого выражения обращается в нуль лишь в случае, когда в положении равновесия одна из главных центральных осей инерции гиростата коллинеарна оси x. Следовательно, уравнения (1.2), (1.3), (2.2) и (2.3) разрешимы относительно σ, λ, γ_s, k_s' при любых значениях ν_0 и α_{s0}, связанных равенством (1.3).

Итак, в положении равновесия спутник-гиростат может быть направлен на любое из тел M_1 и M_2 произвольно выбранным в нем направлением. Если главная центральная ось инерции гиростата не коллинеарна оси x ($\lambda_0\neq 0$), то каждому такому направлению отвечают два динамически эквивалентных положения равновесия, соответствующих различным знакам величин λ_0 и различающихся поворотом на 180° вокруг оси, коллинеарной оси x. Для этих двух положений равновесия величины k_{i0}' различаются знаками. Если главная центральная ось инерции гиростата коллинеарной оси x ($\lambda_0=0$), то возможно любое, относительно поворота вокруг этой оси, положение равновесия.

Рассмотрим следующие два однопараметрических семейства относительных равновесий:

$$(2.10)\qquad \begin{aligned}&\alpha_{10}=1,\quad \alpha_{20}=0,\quad \alpha_{30}=0,\quad \gamma_{10}=0,\quad \gamma_{20}=\sin\vartheta,\quad \gamma_{30}=\cos\vartheta\\ &k_{10}'=0,\quad k_{20}'=(\nu_0-A_2')\sin\vartheta,\quad k_{30}'=(\nu_0-A_3')\cos\vartheta\end{aligned}$$

$$(2.11)\qquad \begin{aligned}&\alpha_{10}=0,\quad \alpha_{20}=\cos\vartheta,\quad \alpha_{30}=-\sin\vartheta,\quad \gamma_{10}=0,\quad \gamma_{20}=\sin\vartheta,\\ &\gamma_{30}=\cos\vartheta\\ &k_{10}'=0,\quad k_{20}'=[\nu_0-A_2'+3(A_2'-A_3')h_\alpha{}^\circ\cos^2\vartheta]\sin\vartheta,\\ &k_3'=[\nu_0-A_3'+3(A_3'-A_2')h_\alpha{}^\circ\sin^2\vartheta]\cos\vartheta\end{aligned}$$

первое из которых изучено В. В. Румянцевым [2].

В положении равновесия (2.10) ось x_1 коллинеарна оси x, а оси x_2 и x_3 расположены в плоскости, параллельной yz, при этом ось x_3 образует с осью z угол ϑ, а ось ротора ортогональна осям x_1 и x.

Для решения (2.11) ось x_1 коллинеарна оси y, а оси x_2 и x_3 расположены в плоскости, параллельной xz, при этом ось x_3 составляет с осью z угол ϑ, а ось ротора ортогональна осям x_1 и y. Семейства положений относительного равновесия вида (2.10) и (2.11) отвечают точкам больших кругов $\alpha_{i0} = 0$ ($i = 1, 2, 3$) на единичной сфере (1.3). Если эллипсоид инерции гиростата симметричен ($A_1 = A_2$), то семейства (2.10) и (2.11) исчерпывают все положения относительных равновесий гиростата.

Обратимся теперь к построению точных (в принятой в п. 1 постановке задачи) решений уравнений относительного равновесия (1.8) гиростата в форме (1.9). Выше были исследованы первые члены разложений (1.9) (нулевое приближение).

Рассмотрим первую группу уравнений (1.10), служащую для уточнения положения центра масс гиростата в относительном равновесии. Для прямолинейных точек либрации имеем

$$(2.12)\qquad \left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial x'^2}\right)_0 = -1-2h^\circ,\quad \left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial y'^2}\right)_0 = -1+h^\circ,\quad \left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial z'^2}\right)_0 = h^\circ$$

$$\left(\frac{\partial W_2}{\partial x'}\right)_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x'}\right)_0 \sum_{s=1}^{3}(3\alpha_s^2-1)A_s',\quad \left(\frac{\partial W_2}{\partial y'}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{\partial W_2}{\partial z'}\right)_0 = \lambda_0\left(\frac{\partial h}{\partial x'}\right)_0$$

$$h^\circ = \frac{\mu_1'}{|x_{(0)}' - a_1'|^3} + \frac{\mu_2'}{|x_{(0)}' - a_2'|^3} > 0$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x'}\right)_0 = -3\left[\frac{\mu_1'(x_{(0)}' - a_1')}{|x_{(0)}' - a_1'|^5} + \frac{\mu_2'(x_{(0)}' - a_2')}{|x_{(0)}' - a_2'|^5}\right]$$

а вторые смешанные производные от W_1 по x', y', z' равны нулю.

Подставляя эти значения (2.12) в (1.10), находим

$$(2.13)\qquad x_{(1)}' = \frac{1}{2m(1+h^\circ)}\left(\frac{\partial h}{\partial x'}\right)_0 \sum_{s=1}^{3}(3\alpha_s^2-1)A_s'$$

$$y_{(1)}' = 0,\quad z_{(1)}' = -\frac{\lambda_0}{mh^\circ}\left(\frac{\partial h}{\partial x'}\right)_0$$

Отсюда для $m_1 \neq m_2$ заключаем, что в относительном равновесии гиростата его центр масс расположен в плоскости xz и отстоит от точки либрации на расстоянии, имеющем порядок малости отношения l^2/a^2. Центр масс находится на оси x только для положений равновесия, в которых главная центральная ось инерции коллинеарна оси x. Для всех остальных положений равновесия центр масс смещен также и в направлении нормали к плоскости его орбиты на величину, имеющую порядок малости l^2/a^2.

Аналогичный результат в задаче о стационарных движениях спутника-гиростата в поле одного притягивающего центра получен в [3].

Центр масс гиростата будет совпадать с точкой либрации для относительных равновесий, для которых одновременно выполняются следующие условия:

$$\lambda_0 = 0,\ 3(A_1\alpha_{10}^2 + A_2\alpha_{20}^2 + A_3\alpha_{30}^2) = A_1 + A_2 + A_3$$

что имеет место лишь для решений (2.10) при дополнительном условии: $2A_1 = A_2 + A_3$.

Если $m_1 = m_2$, то для точек либрации L_1 и L_3 все предыдущие заключения остаются в силе, а для точки L_2 центр масс гиростата в относительном равновесии будет совпадать с точкой L_2, так как в этом случае $(\partial h/\partial x')_0 = 0$.

Из второй группы уравнений (1.10) следует, что в относительном равновесии гиростата отклонения величин α_s, γ_s, k_s' ($s = 1, 2, 3$) от их значений, даваемых формулами (2.5) — (2.8), имеют порядок малости l^2/a^2.

3. Исследуем устойчивость относительных равновесий гиростата (2.6) в предположении, что его центр масс движется по невозмущаемой круговой орбите с угловой скоростью Ω. Для этого к центру масс необходимо приложить управляющие силы [2], которые бы компенсировали возмущения от движения гиростата вокруг центра масс. Тогда уравнения движения гиростата будут допускать обобщенный интеграл энергии $T_r + W = \mathrm{const}$, где T_r — кинетическая энергия гиростата в его движении относительно системы координат $G_0\, xyz$.

В силу теоремы Лагранжа относительное равновесие спутника будет устойчивым по отношению к величинам $\vartheta, \psi, \varphi, \vartheta^{\cdot}, \psi^{\cdot}, \varphi^{\cdot}$, если для него функция W_2 имеет изолированный минимум. Достаточные условия устойчивости получим из требования определенной положительности второй вариации $\delta^2 W_2$ в окрестности положения равновесия.

В возмущенном движении положим

$$\alpha_s = \alpha_{s0} + \xi_s, \quad \gamma_s = \gamma_{s0} + \eta_s \quad (s = 1,\ 2,\ 3)$$

Тогда будем иметь

$$\delta^2 W_{2*} = \sum_{s=1}^{3} [3h_\alpha{}^\circ (A_s' - \sigma_0)\, \xi_s{}^2 + 6\lambda_0 h_\alpha{}^\circ \xi_s \eta_s + (\nu_0 - A_s')\, \eta_s{}^2] \tag{3.1}$$

где переменные ξ_s, η_s связаны соотношениями

$$\delta\pi_1 = \sum_{s=1}^{3} (\gamma_{s0}\xi_s + \alpha_{s0}\eta_s) = 0, \quad \delta\pi_2 = 2\sum_{s=1}^{3} \gamma_{s0}\eta_s = 0 \tag{3.2}$$

$$\delta\pi_3 = 2\sum_{s=1}^{3} \alpha_{s0}\xi_s = 0$$

Условия [4] положительной определенности квадратичной формы (3.1) на линейном многообразии (3.2) приводятся к виду

$$g_0 > 0,\ 2g_0\nu_0 + g_1 > 0,\ \Delta = g_0\nu_0{}^2 + g_1\nu_0 + g_2 > 0 \tag{3.3}$$

$$g_0 = \sum_{s=1}^{3} (A_s' - \sigma_0)\, \beta_{s0}{}^2 = \lambda_0^{-2} (\sigma_0 - A_1')(\sigma_0 - A_2')(\sigma_0 - A_3')$$

$$g_1 = -g_0 \sum_{(123)} (A_2' + A_3')\, \gamma_{10}{}^2 + 3h_\alpha{}^\circ \sum_{(123)} (A_2' - \sigma_0)(A_3' - \sigma_0)\, \alpha_{10}{}^2 - 3h_\alpha{}^\circ \lambda_0{}^2$$

$$g_2 = g_0 \sum_{(123)} A_2' A_3' \gamma_{10}{}^2 - 3h_\alpha{}^\circ \sum_{s=1}^{3} A_s' \beta_{s0}{}^2 \sum_{(123)} (A_2' - \sigma_0)(A_3' - \sigma_0)\, \alpha_{10}{}^2 + 3h_\alpha{}^\circ \lambda_0{}^2 \Big[\sum_{s=1}^{3} A_s' \alpha_{s0}{}^2 - 3h_\alpha{}^\circ \sum_{s=1}^{3} (A_s' - \sigma_0)\, \gamma_{s0}{}^2\Big]$$

$$\beta_{10} = \gamma_{20}\alpha_{30} - \gamma_{30}\alpha_{20} = \lambda_0^{-1} (A_2' - A_3')\, \alpha_{20}\alpha_{30} \quad (123)$$

Условия (3.3) можно представить в форме [3]

$$g_0 > 0, \quad \nu_0 > \nu_2 \quad \left(2g_0\nu_2 = -g_1 + \sqrt{g_1{}^2 - 4g_0 g_2}\right) \tag{3.4}$$

где ν_2 — наибольший из корней ν_1, ν_2 уравнения $\Delta = 0$. Дискриминант этого уравнения неотрицателен, ибо в противном случае при $g_0 \neq 0$ и любом ν_0 было бы $\Delta \neq 0$ и знак Δ совпадал бы со знаком g_0. Тогда в силу второго из условий (3.3) степень неустойчивости была бы различной при $\nu_0 = \pm N$, где N — достаточно большое положительное число, а именно, она была бы равна 0 и 2 при $g_0 > 0$ и 1 и 3 при $g_0 < 0$, что противоречит теории бифуркаций [5].

Условия (3.4) совпадают с условиями, полученными в [3] для задачи об устойчивости относительных равновесий спутника-гиростата в поле одного притягивающего центра. Анализ работы [3] целиком переносится на рассматриваемую здесь задачу.

Укажем достаточные условия устойчивости для относительных равновесий (2.10) и (2.11).

Эти условия для решения (2.10) имеют вид

$$g_0 = A_2' \cos\vartheta + A_3' \sin\vartheta - A_1' > 0, \quad \nu_0 > \nu_2 = A_2' \cos^2\vartheta + A_3' \sin^2\vartheta \tag{3.5}$$

и эквивалентны условиям, указанным В. В. Румянцевым [2].

Для решения (2.11) трехчлен Δ разлагается на множители

$$\Delta = [(A_1' - A_2'\alpha_{20}^2 - A_3'\alpha_{30}^2)(\nu_0 - A_1') + 3h_\alpha^\circ (A_3' - A_2')\alpha_{20}^2\alpha_{30}^2] \times [\nu_0 - A_2'\alpha_{20}^2 - A_3'\alpha_{30}^2 + 3h_\alpha^\circ (A_3' - A_2')(\alpha_{20}^2 - \alpha_{30}^2)]$$

и условия (3.4) принимают вид

$$\begin{gathered} g_0 = A_1' - A_2'\alpha_{20}^2 - A_3'\alpha_{30}^2 > 0, \quad \nu_0 > \nu_1, \quad \nu_0 > \nu_2 \\ \nu_1 = A_1' + 3h_\alpha^\circ (A_2' - A_3')^2 \alpha_{20}^2\alpha_{30}^2 (A_1' - A_2'\alpha_{20}^2 - A_3'\alpha_{30}^2)^{-1} \\ \nu_2 = A_2'\alpha_{20}^2 + A_3'\alpha_{30}^2 + 3h_\alpha^\circ (A_2' - A_3')(\alpha_{20}^2 - \alpha_{30}^2) \end{gathered} \tag{3.6}$$

4. Пусть теперь $x'_{(0)} = p/2$, $y'_{(0)} = \pm\sqrt{3}/2$, $z'_{(0)} = 0$ — координаты одной из треугольных точек либрации. Относительные равновесия гиростата будем искать в форме разложений (1.9), первые члены которых определяют равновесия в нулевом приближении, когда центр масс гиростата совпадает с треугольной точкой либрации, а ориентация корпуса гиростата находится из второй группы у уравнений (1.8). Вместо этих уравнений используем эквивалентные им уравнения относительно направляющих косинусов, получаемые из условия стационарности функции W_2, в которой вместо x', y', z' следует подставить координаты треугольной точки либрации. Имеем

$$W_2^\circ = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3}\left\{\left[\frac{3}{4}(\alpha_s^2 + 2\sqrt{3}p\alpha_s\beta_s \operatorname{sign} y'_{(0)} - \gamma_s^2\right] A_s' - 2k_s'\gamma_s\right\} \tag{4.1}$$

Преобразуем выражение (4.1) к специальному виду. Для этого повернем орты α и β осей x и y на угол θ вокруг оси z

$$\alpha' = \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta, \quad \beta' = -\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta$$

где θ — угол между ортами α' и α. Обозначим через α_s', β_s' ($s = 1, 2, 3$) проекции векторов α' и β' на оси x_s. Тогда выражение

$$D_s = d_s^2 + 2\sqrt{3}p\alpha_s\beta_s \operatorname{sign} y'_{(0)} + 3\beta_s^2 \tag{4.2}$$

в новых переменных преобразуется к виду

$$D_s = (1 + 2\sin^2\theta + \sqrt{3}p\sin 2\theta \operatorname{sign} y'_{(0)})\,\alpha_s'^2 + \\ + (1 + 2\cos^2\theta - \sqrt{3}p\sin 2\theta \operatorname{sign} y'_{(0)})\beta_s'^2 + \\ + 2(\sin 2\theta + \sqrt{3}p\cos 2\theta \operatorname{sign} y_0')\,\alpha_s'\beta_s'$$

Угол θ определим из уравнения

$$\operatorname{tg} 2\theta = -\sqrt{3}p \operatorname{sign} y'_{(0)} \tag{4.3}$$

При изменении отношения $w = m_2/m_1$ от 0 до ∞ параметр p изменяется от $+1$ до -1, а значения θ — от $-\pi/6$ до $\pi/6$, если $y'_{(0)} > 0$, и от $\pi/6$ до $-\pi/6$, если $y'_{(0)} < 0$.

Пусть C — точка пересечения оси x с прямой, проходящей через треугольную точку либрации и имеющей направление орта β'. Для координаты $x' = x_C'$ точки C имеем выражение

$$x_C' = \frac{1}{2p}(1 + p^2 - \sqrt{1 + 3p^2})$$

При изменении параметра p от $+1$ до -1 длина отрезка G_1C, отнесенного к величине a и равного

$$x_C' - a_1' = \frac{1}{2p}(1 + p - \sqrt{1 + 3p^2})$$

изменяется от 0 до 1 и, следовательно, точка C перемещается вдоль оси x от точки G_1 до точки G_2.

Выражение (4.2) с учетом (4.3) и соотношения

$$\alpha_s'^2 + \beta_s'^2 + \gamma_s^2 = 1 \quad (s = 1,\ 2,\ 3)$$

запишем в виде

$$D_s' = 2\sqrt{1 + 3p^2}\,\beta_s'^2 - (2 - \sqrt{1 + 3p^2})\,\gamma_s^2 + 2 - \sqrt{1 + 3p^2}$$

Подставляя это выражение в (4.1) и отбрасывая несущественное постоянное слагаемое, получаем искомое выражение для функции W_2°:

$$\varkappa_1^{-1} W_2^\circ = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3}(3\varkappa A_s'\beta_s'^2 - A_s'\gamma_s^2 - 2k_s''\gamma_s) \tag{4.4}$$

Здесь

$$2\varkappa\varkappa_1 = \sqrt{1 + 3p^2}, \quad 4\varkappa_1 = 10 - 3\sqrt{1 + 3p^2}, \quad k_s' = \varkappa_1 k_s'' \tag{4.5}$$

а β_s', γ_s связаны равенствами

$$\pi_1' = \beta_1'\gamma_1 + \beta_2'\gamma_2 + \beta_3'\gamma_3 = 0, \quad \pi_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \tag{4.6}$$

$$\pi_3' = \beta_1'^2 + \beta_2'^2 + \beta_3'^2 = 1 \tag{4.7}$$

Сопоставляя (4.4), (4.6) и (4.7) с (2.1), (1.2) и (1.3), видим, что задачи об относительном равновесии гиростата в случаях, когда его центр масс совпадает с треугольными и прямоугольными точками либрации, динамически эквивалентны. Поэтому для определения ориентации гиростата с центром масс в треугольной точке либрации достаточно в (2.4)— (2.9) величины α_s, k_s° и h_α° заменить на β_s', k_s'' и $\varkappa$ соответственно. В результате имеем

$$\sigma = \sigma_0 = \sum_{s=1}^{3} A_s'\beta_{s0}'^2, \quad \lambda^2 = \lambda_0^2 = \sum_{(123)}(A_2' - A_3')^2\beta_{20}'^2\beta_{30}'^2 \tag{4.8}$$

$$\gamma_i = \gamma_{i0} = \lambda_0^{-1}\left(\sum_{s=1}^{3} A_s'\beta_{s0}'^2 - A_i'\right)\beta_{i0}'$$
$$k_i'' = k_{i0}'' = 3\lambda_0\varkappa\beta_{i0}' + (\nu_0 - A_i')\gamma_{i0} \quad (i = 1, 2, 3)$$

если $\lambda_0 \neq 0$.

Если $\lambda_0 = 0$, то в качестве γ_{i0} можно взять любые значения, удовлетворяющие равенствам (4.6), а величины k_{i0}'' определять по формулам]

$$k_i'' = k_{i0}'' = (\nu_0 - A_i')\gamma_{i0} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Итак, в положении равновесия гиростат может быть направлен на точку C произвольно выбранным в нем направлением. При этом, если главная центральная ось инерции гиростата не совпадает с ортом β', приложенным в его центре масс ($\lambda_0 \neq 0$), то каждому такому направлению отвечают два динамически эквивалентных положения равновесия, соответствующих различным знакам λ_0 и отличающихся поворотом на 180° вокруг вектора β'. Для этих двух положений равновесия величины k_{i0}'' отличаются знаками. Если главная центральная ось инерции гиростата направлена вдоль вектора β' ($\lambda_0 = 0$), то возможно любое относительно поворота вокруг вектора β' положение равновесия.

Рассмотрим следующие два семейства относительных равновесий, аналогичные семействам (2.10) и (2.11):

$$\beta_{10}' = 1,\ \beta_{20}' = 0,\ \beta_{30}' = 0,\ \gamma_{10} = 0,\ \gamma_{20} = \sin\vartheta,\ \gamma_{30} = \cos\vartheta \tag{4.9}$$
$$k_{10}'' = 0,\ k_{20}'' = (\nu_0 - A_2')\sin\vartheta,\ k_{30}'' = (\nu_0 - A_3')\cos\vartheta$$

$$\beta_{10}' = 0,\ \beta_{20}' = \cos\vartheta,\ \beta_{30}' = -\sin\vartheta,\ \gamma_{10} = 0,\ \gamma_{20} = \sin\vartheta,\ \vartheta_{30} = \cos\vartheta \tag{4.10}$$
$$k_{10}'' = 0,\ k_{20}'' = [\nu_0 - A_2' + 3\varkappa(A_2' - A_3')\cos^2\vartheta]\sin\vartheta,$$
$$k_{30}'' = [\nu_0 - A_3' + 3\varkappa(A_3' - A_2')\sin^2\vartheta]\cos\vartheta$$

Для решения (4.9) ось x_1 коллинеарна орту β', а оси x_2 и x_3 расположены в плоскости, параллельной векторам α' и γ, при этом ось x_3 образует с осью z угол ϑ, а ось ротора ортогональна оси x_1 и орту β'.

В положении равновесия (4.10) ось x_1 коллинеарна орту α', а оси x_2 и x_3 расположены в плоскости, параллельной вектором β' и γ, при этом ось x_3 составляет с осью z угол ϑ, а ось ротора ортогональна оси x_1 и вектору α'.

Семейства решений вида (4.9), (4.10) отвечают точкам больших кругов $\beta_{i0}' = 0$ ($i = 1, 2, 3$) на единичной сфере (4.7) и для симметричного гиростата ($A_1 = A_2$) исчерпывают все положения относительных равновесий.

Если $m_1 = m_2$, то точка C совпадает с точкой G_0, а орты α', β' — с ортами осей x, y. В этом случае решение (4.9) переходит в решение, исследованное Румянцевым В. В. [2].

Рассмотрим первую группу уравнений (1.10) для уточнения положения центра масс в относительном равновесии. Для треугольных точек либрации эти уравнения в системе координат $Cuvz$ с ортами α' и β' осей u и v принимают вид

$$\left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial u'^2}\right)_0 u_{(1)}' = -\frac{1}{m}\left(\frac{\partial W_2}{\partial u'}\right)_0,\quad \left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial v'^2}\right)_0 = -\frac{1}{m}\left(\frac{\partial W_*}{\partial v'^2}\right)_0$$
$$z_{(1)}' = -\frac{3}{2m}\left(p\sum_{s=1}^{3} A_s'\alpha_{s0}\gamma_{s0} + \sqrt{3}\,\mathrm{sign}\,y_{(0)}'\sum_{s=1}^{3} A_s'\beta_{s0}\gamma_{s0}\right)$$
$$u = au',\quad v = av'$$
$$\left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial u'^2}\right)_0 = -\frac{3}{4}\left(2 - \sqrt{1+3p^2}\right),\quad \left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial v'^2}\right)_0 = -\frac{3}{4}\left(2 + \sqrt{1+3p^2}\right)$$

Отсюда следует, что уравнения (4.1) разрешимы относительно $u_{(1)}'$, $v_{(1)}'$, $z_{(1)}'$, если $p \neq \pm 1$. В противном случае одна из масс m_1 или m_2 равна нулю и точка C совпадает с центром масс того из тел M_1 или M_2, масса которого отлична от нуля. Тогда переменные v и z, дополненные угловой координатой φ, можно рассматривать как цилиндрические координаты центра масс гиростата и последние два из уравнений (4.11) дадут поправки для уточнения положения центра масс гиростата в относительном равновесии.

Из (4.1) заключаем, что если для относительного равновесия правая часть последнего уравнения отлична от нуля, то плоскость орбиты центра масс гиростата не проходит через точки G_1 и G_2.

Достаточные условия устойчивости относительных равновесий (4.8) и (4.9), (4.10) получаются из условий (3.3), (3.4) и (3.5), (3.6), если в них величины α_s, k_s', h_α° заменить на β_s', k_s'', $\varkappa$ соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 141 с.
2. *Румянцев В. В.* Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами в точках либрации.— Publ. math., 1974, 17 (31), p. 139—148.
3. *Степанов С. Я.* О множестве стационарных движений спутника-гиростата в центральном ньютоновском поле сил и их устойчивости.— ПММ, т. 33, вып. 4, с. 737—744.
4. *Рубановский В. Н., Степанов С. Я.* О теореме Рауса и методе Четаева построения функции Ляпунова из интегралов уравнений движения.— ПММ, т. 33, вып. 5, с. 904—912.
5. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Изд. 2-е. М.: Гостехиздат, 1955. 207 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.III.1981