Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 3, 1981

УДК 531.36

О ПРИНЦИПЕ ГАМИЛЬТОНА — ОСТРОГРАДСКОГО ПРИ ИМПУЛЬСИВНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ*

Синицын В. А.

Рассматривается движение динамических систем, описываемых уравнениями Гамильтона при действии обобщенных ударных сил, мгновенные ударные импульсы которых имеют потенциал. В этом случае уравнения движения определяются из условия стационарности функционала вариационной задачи Больца, где интегральная часть является действием по Гамильтону. Показано, что при потенциальности ударных импульсов имеет место интегральный инвариант Пуанкаре — Картана. Обсуждается применение полученных результатов к исследованию движения натуральных систем с разрывами обобщенных импульсов, происходящими в результате мгновенного изменения обобщенного потенциала.

1. Пусть движение динамической системы описывается уравнениями Гамильтона

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}+Q_i\quad (i=1,\ldots,n) \tag{1.1}$$

где H — функция Гамильтона динамической системы, q_i, p_i $(i=1,\ldots,n)$ — канонические переменные, Q_i — обобщенные ударные силы.

Обозначим через S импульсы ударных обобщенных сил за время удара τ (обобщенные ударные импульсы)

$$S_i=\lim_{\substack{Q_i\to\infty\\ \tau\to 0}}\int_0^\tau Q_i\,dt\quad (i=1,\ldots,n) \tag{1.2}$$

При действии мгновенных ударных импульсов уравнения импульсивного движения в соответствии с (1.1) и (1.2) получаем в виде

$$q_i^+-q_i^-=0,\quad p_i^+-p_i^-=S_i\quad (i=1,\ldots,n) \tag{1.3}$$

Индексы плюс и минус указывают на принадлежность значений переменных моментам времени до и после удара.

Известно, что движение системы (1.1) на интервалах времени, когда отсутствуют ударные силы Q_i, может рассматриваться как непрерывная последовательность контактных преобразований, порожденных функцией H. Подобно этому, наложим на обобщенные ударные импульсы ограничения, при выполнении которых уравнения импульсивного движения (1.3) являются каноническими преобразованиями переменных q_i, p_i

$$q_i^+=q_i^-,\quad p_i^+=p_i^-+S_i\quad (i=1,\ldots,n) \tag{1.4}$$

Необходимые и достаточные условия каноничности преобразования [1] состоят в том, чтобы скобки Лагранжа удовлетворяли следующим равенствам:

$$[q_i^- q_k^-] = 0, \quad [p_i^- p_k^-] = 0, \quad [q_i^- p_k^-] = c\delta_{ik} \tag{1.5}$$

Здесь c — валентность канонического преобразования, δ_{ik} — символ Кронекера.

Составляем скобки Лагранжа для преобразования (1.4)

$$[q_i^- q_k^-] = \frac{\partial S_i}{\partial q_k^-} - \frac{\partial S_k}{\partial q_i^-}, \quad [p_i^- p_k^-] = 0, \quad [q_i^- p_k^-] = \delta_{ik} + \frac{\partial S_i}{\partial p_k^-} \tag{1.6}$$

Из условия (1.5) для равенств (1.6) следует, что преобразование (1.4) будет каноническим, если ударные импульсы обобщенных сил удовлетворяют равенствам

$$\frac{\partial S_i}{\partial q_k^-} - \frac{\partial S_k}{\partial q_i^-} = 0 \quad (i, k = 1, \ldots, n) \tag{1.7}$$
$$\frac{\partial S_i}{\partial p_k^-} = 0 \quad (i \neq k), \quad 1 + \frac{\partial S_i}{\partial p_k^-} = c \quad (i = k)$$

Условия (1.7), накладываемые на ударные импульсы S_i, будут, очевидно, выполнены, если принять их в виде

$$S_i = (c - 1)p_i^- + F_i(q_1^-, \ldots, q_n^-, t) + c_i \tag{1.8}$$

при $\partial F_i / \partial q_k^- = \partial F_k / \partial q^-_i \quad (k, i = 1, \ldots, n)$

Здесь c_i — некоторые постоянные, определяемые условиями (см. ниже), с помощью которых задается момент удара.

Ударные импульсы (1.8) при $c = 1$ (далее речь будет идти только об импульсивных движениях, соответствующих унивалентным каноническим преобразованиям) определяются некоторой функцией Π, которую назовем потенциалом ударных импульсов. Поскольку поле ударных импульсов (1.8) образуется как результат наложения двух полей, в функции Π также выделим слагаемые, линейно зависящие от q_i $(i = 1, \ldots, n)$ и t

$$\Pi = -\Pi_0 - \sum_{i=1}^{n} c_i q_i - c_0 t \tag{1.9}$$

С помощью потенциала Π ударные импульсы определяются аналогично силам потенциального силового поля

$$S_i = -\partial\Pi / \partial q_i^- \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.10}$$

Однако поле ударных импульсов отличает то, что действие его локализовано во времени, т. е. происходит мгновенное наложение и снятие поля.

С учетом (1.9) производящую функцию K канонического преобразования (1.4) запишем в виде

$$K = \sum_{i=1}^{n} p_i^+ q_i^- + \Pi(q_1^-, \ldots, q_n^-, t) \tag{1.11}$$

Действительно, производящая функция (1.11) приводит к преобразованию, соответствующему импульсивному движению (1.4)

$$\frac{\partial K}{\partial q_i^-}=p_i^+ + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i^-}=p_i^-, \quad \frac{\partial K}{\partial p_i^+}=q_i^-=q_i^+ \quad (i=1,\ldots,n) \tag{1.12}$$
$$H^+=H^-+\frac{\partial K}{\partial t}=H^-+\frac{\partial \Pi}{\partial t}$$

Независимые переменные здесь q_i^-, p_i^+ $(i = 1, \ldots, n)$.

Заметим, что некоторая характеристика $X(p, q, t)$ динамического процесса при изучаемом импульсивном движении изменяется так, что для скобок Пуассона имеем равенство [1] $(XH)^- = (XH)^+$. В частности, интеграл, не зависящий от времени, сохраняется.

2. Покажем, что в случае потенциального поля ударных импульсов на действительном движении динамической системы для функционала, составленного в виде суммы функции — П и действия по Гамильтону, выполняется условие стационарности. При этом фиксируются: начальный и конечный моменты времени t_0 и t_1, начальное и конечное положение системы, а также обобщенные координаты (необязательно все) и (или) момент времени приложения ударных импульсов.

В момент времени t^- начинается импульсивное движение, которое описывается производящей функцией (1.11). Обозначим через L функцию Лагранжа и введем в рассмотрение функционал

$$J=-\Pi_0(q_1^-,\ldots,q_n^-,t^-)+\int\limits_{t_0}^{t^-} L\,dt+\int\limits_{t^+}^{t_1} L\,dt \tag{2.1}$$

Мгновенное действие ударных импульсов, при котором обобщенные координаты не изменяются, а также фиксирование некоторых обобщенных координат и, возможно, времени приложения удара приводят к равенствам

$$\Phi_l=q_l^+-q_l^-=0 \quad (l=1,\ldots,n), \quad \Phi_{n+1}=t^+-t^-=0 \tag{2.2}$$
$$\Phi_l=q_{l-n-1}^- - \alpha_{l-n-1}=0 \quad (l=n+2,\ldots,p<2n+1),$$
$$\Phi_0=t^- - \alpha_0=0$$

α_s $(s = 0,1, \ldots, p - n - 1)$ — фиксированные постоянные.

Отыскание условий минимума J (2.1) при ограничениях (2.2) является разрывной вариационной задачей [2]. Необходимое условие стационарности функционала с последующим переходом к каноническим переменным $(p_i = \partial L / \partial (dq_i / dt))$ приводит к уравнениям (1.1) на интервалах, где отсутствуют ударные импульсы ($Q_i = 0$), и равенствам

$$p_i^-=-\frac{\partial \Phi}{\partial q_i^-}, \quad p_i^+=\frac{\partial \Phi}{\partial q_i^+} \quad (i=1,\ldots,n) \tag{2.3}$$
$$H^-=\frac{\partial \Phi}{\partial t^-}, \quad H^+=-\frac{\partial \Phi}{\partial t^+}, \quad \Phi=-\Pi_0+\sum_{l=0}^{p}\rho_l\Phi_l$$

Здесь ρ_l $(l = 0, 1, \ldots, p)$ — неопределенные постоянные множители.

Исключая из уравнений (2.3) неопределенные множители ρ_l ($l = 1, \ldots, n + 1$), получаем

$$(2.4) \qquad p_i^+ = p_i^- - \frac{\partial \Pi_0}{\partial q_i^-} + \rho_{n+1+i} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$$H^+ = H^- + \frac{\partial \Pi_0}{\partial t^-} - \rho_0$$

Из сравнения (2.4) и (1.12) видно, что постоянные c_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) в (1.9) должны быть выбраны равными соответствующим неопределенным множителям, т. е.

$$(2.5) \qquad c_i = \rho_{n+1+i} \ (i = 1, \ldots, p - n - 1), \quad c_i = 0 \text{ при } i > p - n - 1$$

Если момент времени t^- не фиксирован, то следует принять также $c_0 = 0$.

Таким образом, на действительном движении динамической системы в условиях принципа Гамильтона — Остроградского при действии потенциальных ударных импульсов (1.10) выполняется необходимое условие стационарности функционала I

$$\delta I = 0, \quad I = -\Pi + W, \quad W = \int_{t_0}^{t^-} L\,dt + \int_{t^+}^{t_1} L\,dt$$

где W — действие по Гамильтону.

Для определения постоянных c_i ($i = 0, 1, \ldots, n$), входящих в функцию Π, привлекается вторая группа уравнений (2.2) в соответствии с условиями (2.5).

Полученное утверждение принципа Гамильтона — Остроградского естественным образом распространяется на случай конечного (фиксированного) числа моментов действия мгновенных ударных импульсов с потенциалами вида (1.9).

3. Видно, что в случае потенцальных ударных импульсов в системе (1.1) имеет место интегральный инвариант Пуанкаре — Картана. С этой целью рассмотрим расширенное фазовое $(2n + 1)$-мерное пространство переменных q_i, p_i, t. В этом пространстве выберем замкнутую трубку прямых путей с контуром C^0, определяющим начальные состояния системы в момент времени t_0. На трубке выделим замкнутую кривую C^-, охватывающую трубку и имеющую с каждой образующей лишь одну общую точку. Контур C^- характеризует состояние системы перед ударом и, вообще говоря, является произвольным, так как различным образом могут быть заданы условия, определяющие момент приложения ударных импульсов. Полагая, что преобразование (1.4) взаимно однозначное, дополним его равенством $t^+ = t^-$ (мгновенность удара) и построим контур C^+. При последующем движении системы он задает новую трубку прямых путей, на которой выделим произвольный замкнутый контур C^1, охватывающий трубку.

Полученные две трубки пересекаются в подпространстве q_i ($i = 1, \ldots, n$), t. Для каждой трубки имеем интегральные инварианты Пуанкаре — Картана [1].

Обозначим W_1 и W_2 действие по Гамильтону вдоль образующих трубок от кривой C^0 до кривой C^- и от C^+ до C^1

$$W_1 = \int\limits_{t_0(\alpha)}^{t^-(\alpha)} L\,dt, \quad W_2 = \int\limits_{t^+(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L\,dt, \quad L = \sum_i p_i \frac{dq_i}{dt} - H$$

Здесь L — функция Лагранжа, выраженная через канонические переменные, α — параметр, с помощью которого уравнения кривых представляются в виде

$$q_i = q_i(\alpha), \quad p_i = p_i(\alpha) \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad t = t(\alpha)$$

При любом α имеем [1]

$$\delta W_1 = [\sum_i p_i \delta q_i - H\delta t]_0^-, \quad \delta W_2 = [\sum_i p_i \delta q_i - H\delta t]_+^1$$

Найдем сумму δW_1 и δW_2 с учетом (2.2)

$$\delta W = \delta W_1 + \delta W_2 = [\sum_i p_j \delta q_i - H\delta t]_0^1 - \tag{3.1}$$

$$- \sum_i (p_i^+ - p_i^-)\,\delta q_i^- + (H^+ - H^-)\,\delta t^-, \quad (\delta q_i^- = \delta q_i^+, \quad \delta t^- = \delta t^+)$$

После подстановки в (3.1) равенств (1.12) и интегрирования по α для замкнутых контуров C^0 и C^1 получаем

$$\oint\limits_{C^0} \Big[\sum_i p_i \delta q_i - H\delta t\Big] = \oint\limits_{C^1} \Big[\sum_i p_i \delta q_i - H\delta t\Big] \tag{3.2}$$

Таким образом, значение интегрального инварианта Пуанкаре — Картана сохраняется при разрывах фазовых координат данного вида.

В качестве примера системы с разрывами фазовых координат рассмотрим момент перехода натуральной системы из одной области пространства состояний в другую с различными обобщенными потенциалами. Обобщенный потенциал описывается (см., например, [1]) выражением вида

$$V\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{dq_1}{dt}, \ldots, \frac{dq_n}{dt}, t\right) = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{dq_i}{dt} + A_0$$

где A_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ — функции обобщенных координат и времени t.

Обобщенные импульсы определяются равенствами

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial\,(dq_i\,/\,dt)} = \frac{\partial T}{\partial\,(\partial q_i\,/\,dt)} - A_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

(T — кинетическая энергия), из которых следует, что разрывы первого рода функций A_i приводят к разрывности обобщенных импульсов. Момент мгновенного изменения обобщенного потенциала характеризуется условиями

$$p_i^+ - p_i^- = -A_i^+ + A_i^- \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Если для разностей в правых частях этих равенств существует функция $\Pi\,(q_1, \ldots, q_n, t)$, такая, что

$$A_i^- - A_i^+ = \partial\Pi\,/\,\partial q_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

то все предыдущие рассуждения и выводы справедливы.

Не только интегральный инвариант, но и обобщенные силы, а следовательно, и другие механические величины инвариантны по отношению к рассматриваемому преобразованию обобщенного потенциала. Используя терминологию, принятую в теории поля, назовем функцию A_0 скалярным потенциалом, а $(A_1, \ldots, A_n)'$ — векторным потенциалом. Тогда имеющаяся неоднозначность потенциалов позволяет выбрать их так, чтобы скалярный потенциал был равен нулю. Для этого достаточно выполнения условия (при ударном действии оно может быть выполнено только непосредственно после окончания удара)

$$A_0 - \partial \Pi / \partial t = 0$$

Указанное свойство является обобщением известной в теории поля [3] калибровочной (или градиентной) инвариантности физических величин по отношению к такому же преобразованию потенциала поля лоренцовой силы [1].

В заключение заметим, что роль скалярного и векторного потенциалов могут играть члены нулевой формы и набор коэффициентов линейной формы относительно обобщенных скоростей в выражении функции Лагранжа систем с нестационарными связями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М.: «Наука», 1966.
2. *Веретенников В. Г., Синицын В. А.* Разрывная вариационная задача оптимизации процессов управления.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 2, с. 357—360.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М.: Наука, 1973.

Москва

Поступила в редакцию
22.V.1979