Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 3, 1981

УДК 531—9.314

О РЕАЛИЗАЦИИ СВЯЗЕЙ В НЕГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИКЕ

Бренделев В. Н.

Рассматривается вопрос о возможности реализации неголономной связи при помощи больших неконсервативных сил. Дается механическая характеристика некоторых геометрических объектов, рассмотренных в работе [1], что позволяет естественным образом рассмотреть переход от принципа для системы без связей к принципу для системы со связями. Основные формулировки даются в инвариантном виде. Проводится пример.

1. Рассмотрим гладкую динамическую систему, которая задается лагранжианом L — гладкой функцией на касательном расслоении TM конфигурационного пространства M. Это эквивалентно заданию гамильтониана H — гладкой функции на кокасательном расслоении T^*M. Лагранжиану L соответствует отображение Лежандра $Z: TM \to T^*M$.

Локальные координаты в M обозначим $q^1, \ldots, q_n$, в TM — $q^1, \ldots, q_n$, $q^{1\cdot}, \ldots, q^{n\cdot}$, в T^*M — $q^1, \ldots, q^n, p^1, \ldots, p^n$; $p^i = \partial L/\partial q^{i}$. Неконсервативные силы задаются горизонтальной формой ω на TM или формой $\omega^* = (Z^{-1})^* \omega$ на T^*M. В координатных обозначениях

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} Q_i(q, q^\cdot)\, dq^i, \quad \omega^* = \sum_{i=1}^{n} Q_i(q, p)\, dq^i$$

Траектории системы суть интегральные кривые векторного поля X на T^*M, определяемого уравнением [2, 3]

$$X \,\lrcorner\, \Omega = -dH + \omega^* \tag{1.1}$$

Здесь Ω — симплектическая форма на T^*M.

В координатной записи уравнение (1.1) эквивалентно уравнениям Гамильтона с неконсервативными силами

$$dq^i/dt = \partial H/\partial p^i, \quad dp^i/dt = -\partial H/\partial q^i + Q_i$$

Если лагранжиан L невырожден, то Z — локальный диффеоморфизм. Тогда, если C — интегральная кривая поля X на T^*M, $C^* = (Z^{-1})^* C$ — кривая на TM, то C^* — интегральная кривая поля $Y = (Z^{-1})_* X$ на TM. Следовательно, траектории системы суть интегральные кривые поля $Y = (Z^{-1})_* X$ на TM. Применяя к формуле (1.1) отображение Z^*, получим уравнение для поля Y в виде

$$Y \,\lrcorner\, \Omega_L + dH_L = \omega \tag{1.2}$$

Здесь $\Omega_L = Z^*\Omega$ — фундаментальная 2-форма лагранжиана L, $H_L = Z^*H$ — энергия, соответствующая лагранжиану L. Уравнение

(1.2) соответствует принципу Даламбера [1]. В координатной записи это уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q^{i\cdot}}-\frac{\partial L}{\partial q^{i}}=Q_i$$

Если лагранжиан L невырожден и $I:\Lambda^1(T^*M)\to \mathrm{Vect}\,(T^*M)$ — симплектический изоморфизм, то $I_L=(Z^{-1})_*\circ I\circ(Z^{-1})^*$, $I_L:\Lambda^1(TM)\to$ $\to\mathrm{Vect}\,(TM)$ — изоморфизм 1-форм и векторных полей и уравнение (1.2) принимает вид $I_L^{-1}(Y)=-dH_L+\omega$ откуда

(1.3) $$Y=-I_L(dH_L)+I_L(\omega)$$

Здесь $\Lambda^1(K)$ и $\mathrm{Vect}\,(K)$ — соответственно модули линейных дифференциальных форм и векторных полей на многообразии K (в нашем случае K есть TM и T^*M), $I_L(\omega)$ — векторное поле силы ω относительно данной механической системы. В координатной записи (1.3) — уравнения Лагранжа, разрешенные относительно производных.

Если L — лагранжиан механического типа, т. е. $L={}^1/_2g_{ij}q^{i\cdot}q^{j\cdot}+U(q)$, где $G={}^1/_2g_{ij}dq^i\otimes dq^j$ — риманова метрика на M, $U(q)$ — силовая функция, то уравнения (1.3) принимают вид

$$dq^i/dt=q^{i\cdot},\quad dq^{i\cdot}/dt=\Gamma^i_{kl}(q)\,q^{k\cdot}q^{e\cdot}+g^{is}(\partial U/\partial q^s+Q_s)$$

Здесь $\Gamma_{kl}{}^i$ — символы Кристоффеля римановой связности, ассоциированной с метрикой G.

2. Пусть на систему наложено m независимых линейных неголономных связей

(2.1) $$h_j(q,q^\cdot)=\sum_{i=1}^{n}a_i^{n-m+j},\quad j^{i\cdot}=0,\quad j=1,\ldots,m$$

Будем считать, что связь задается m-мерным кораспределением D на M, которое натянуто на формы $\chi_j\in\Lambda^1(M)$, определенные равенствами $\chi_j(X)(a)=S_X^*(h_j)(a)$, где $S_X:M\to TM$ — график произвольного сечения X. В координатном виде

$$\chi_j=\sum_{i=1}^{n}a_i^{n-m+j}dq^i$$

Задание кораспределения D эквивалентно заданию $(n-m)$-мерного распределения на M: в каждом касательном пространстве T_aM фиксировано $(n-m)$-мерное подпространство $D_a(M)$, в котором должен лежать вектор скорости.

Известно [4, 5], что голономную связь можно определить как предельный случай системы с большой потенциальной энергией. Частный случай задачи о реализации неголономной связи (движение саней Чаплыгина по инерции) рассмотрен в [6]. Рассмотрим общий случай линейных неголономных связей.

Заменим неголономную связь (2.1), зависящей от параметра $\mu>0$, силой

(2.2) $$F=-\mu\sum_{j=1}^{m}h_j\pi^*\chi_j$$

Здесь π — естественная проекция TM на M. Силу (2.2) представим также в виде $F = \tau d\Phi$, где потенциал

$$\Phi = -\frac{1}{2}\mu\sum_{j=1}^{m} h_j^2$$

Операция $\tau : \Lambda^1(TM) \to \Lambda^1(TM)$ определена в [1] (в координатных обозначениях $\tau : adq + bdq^{\cdot} \mapsto bdq$). Заметим, что сила F принадлежит кораспределению π^*D.

Если L — лагранжиан механического типа, то допускается следующая геометрическая характеристика силы $F : I_LF$ — векторное поле силы F относительно данной механической системы. Так как форма F горизонтальна, то поле I_LF вертикально [1]. Для любого $\xi \in TM$ определен изоморфизм [7] $I_\xi : T_aM \to T_\xi(T_aM)$, где $a = \pi(\xi)$. В координатных обозначениях, если

$$Z_\xi = \sum_{i=1}^{n} A^i \frac{\partial}{\partial q^{i\cdot}}\Big|_\xi$$

то

$$I_\xi^{-1}(Z_\xi) = \sum_{i=1}^{n} A^i \frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{\pi(\xi)}$$

Для любой точки $\xi \in TM$ вектор $I_\xi^{-1}\cdot(I_LF)_\xi$ ортогонален подпространству $D_{\pi(\xi)}M$ в метрике G.

Уравнения движения системы с действующей силой F имеют вид

(2.3) $$X \,\lrcorner\, \Omega = -dH + \omega^* + F^*$$

В координатной записи

$$dq^i/dt = \partial H/\partial p^i$$

$$\frac{dp^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} + Q_i(q, p) - \mu\sum_{j=1}^{m} h_j(q, p)\, a_i^{n-m+j}$$

Выберем квазискорости $\pi^{1\cdot}, \ldots, \pi^{n\cdot}$; $\pi^{i\cdot} = a_k{}^i q^{k\cdot}$ таким образом, что $\pi^{n-m+j\cdot} = h_j$, $j = 1, \ldots, m$; $q^1, \ldots, q^n$, $\pi^{1\cdot}, \ldots (\pi^{n-m\cdot})$ — система координат подмногообразия $S = \{(q, q^{\cdot}) \in TM \mid h_j(q, q^{\cdot}) = 0\}$ и перейдем к координатам $v^i = \partial L^*/\partial\pi^{i\cdot} = b_i{}^k p^k$ на T^*M, где $L^*(q, \pi^{\cdot}) = L(q, q^{\cdot}(q, \pi^{\cdot}))$, $a_l{}^i b_k{}^l = \delta_k{}^i$. В системе координат $q^1, \ldots, q^n, v^1, \ldots, v^n$ уравнения (2.3) записываются в виде

$$\frac{dq^i}{dt} = b_k{}^i \frac{\partial H^*}{\partial v^k}$$

$$\frac{dv^i}{dt} = -b_k{}^i \frac{\partial H^*}{\partial q^k} - \gamma_{ijk} v^j \frac{\partial H^*}{\partial v^k} + Q_k b_k{}^i - \mu\sum_{s=1}^{m} h_s \delta_i^{n-m+s}$$

Из записи уравнений (2.3) в системе координат q, v следует, что при $\mu = \infty$ они переходят в уравнения движения системы со связями (2.1).

3. Обозначим $(x^1, \ldots, x^{2n}) = (q^1, \ldots, q^n, v^1, \ldots, v^n)$, $2n - m = l$. Тогда уравнения (2.3) запишем в виде

$$x^{i\cdot} = g_i(x^1, \ldots, x^{2n}), \quad i = 1, \ldots, l \tag{3.1}$$
$$\varepsilon (x^{l+j})^{\cdot} = \varepsilon g_{l+j}(x) + h_j(x), \quad j = 1, \ldots, m$$

Здесь $\varepsilon = 1/\mu$ — малый параметр.

Дальнейшие рассмотрения проводятся локально. Будем считать, что система (3.1) рассматривается в области U пространства R^{2n} переменных $x^1, \ldots, x^{2n}$. Если не оговорено противное, то будем рассматривать решения с начальным условием $P_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^{2n})$, лежащим на поверхности $\Gamma = \{x \mid h(x) = 0\}$.

Наряду с системой (3.1) рассмотрим систему

$$x^{i\cdot} = g_i(x) \tag{3.2}$$
$$\varepsilon_2 (x^{l+j})^{\cdot} = \varepsilon_1 g_{l+j}(x) + h_j(x)$$

Решение системы (3.2) обозначим

$$x = \varphi(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \tag{3.3}$$

Функция $\varphi(t, \varepsilon, \varepsilon)$ одновременно является решением системы (3.1) (с тем же начальным условием P_0). Предположим, что функции g_i, h — аналитические в области U. Тогда при малом ε_1 представим решение (3.3) в виде ряда [8]

$$\varphi(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varphi_0(t, \varepsilon_2) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_1^i \varphi_i(t, \varepsilon_2) \tag{3.4}$$

Здесь $\varphi_0(t, \varepsilon_2)$ — решение получающейся из (3.2) при $\varepsilon_1 = 0$ системы

$$x^{i\cdot} = g_i(x), \quad \varepsilon_2 (x^{l+j})^{\cdot} = h_j(x)$$

Решение (3.3) определено при $0 \leqslant \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_1^\circ$, $0 < \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_2^\circ$ и ряд (3.4) сходится равномерно по t при $0 \leqslant t \leqslant T$. Далее различные константы, численные величины которых не имеют значения, будем обозначать одинаково. Рассмотрим также систему

$$x^{i\cdot} = g_i(x), \quad \varepsilon_1 g_{l+j}(x) + h_j(x) = 0 \tag{3.5}$$

получающуюся из (3.2) при $\varepsilon_2 = 0$, и уравнение быстрых движений системы (3.2)

$$\varepsilon_2 (x^{l+j})^{\cdot} = \varepsilon_1 g_{l+j}(x) + h_j(x) \tag{3.6}$$

Если L — лагранжиан механического типа, то

$$G + {}^1/_2 g_{ij}\, dq^i \otimes dq^j = {}^1/_2 c_{ij}\, d\pi^i \otimes d\pi^j \tag{3.7}$$

Из (3.7) следует, что

$$\partial h_i / \partial x^{l+j} = -\mu d_{n-m+i,\, n-m+j}, \quad i, j = 1, \ldots, m$$

Здесь $\| d_{ij} \|$ — матрица, обратная к матрице $\| c_{ij} \|$. Так как матрица $\| d_{ij} \|$ положительно определена, то матрица $\| \partial h_i / \partial x^{l+j} \|$ определена отрицательно. Следовательно, если ε_1 мало, все корни характеристического уравнения системы (3.6) имеют отрицательные вещественные части. Заметим, что аналогичное доказательство можно провести и в том случае, если L — произвольный положительно-определенный лагранжиан.

Таким образом, любая точка на поверхности $\varepsilon_1 g_{l+j}(x) + h_j(x) = 0$, $j = 1, \ldots, m$ является асимптотически устойчивым положением равновесия уравнения (3.6). Следовательно, выполнены условия теоремы А. Н. Тихонова [8, 9] и существует предел $\lim_{\varepsilon_2\to 0}\varphi(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \psi(t, \varepsilon_1)$ при $0 < t \leqslant T$ равномерно по t на любом отрезке $[t_0, T]$, $0 < t_0 < T$, где $\psi(t, \varepsilon_1)$ — решение системы (3.5) с начальной точкой $P_1 = (x_0^1, \ldots, x_0^l, x_1^{l+1}, \ldots, x_1^{2n})$, лежащей на поверхности $\varepsilon_1 g_{l+j}(x) + h_j(x) = 0$ (можно считать, что $\psi(t, \varepsilon_1)$ — разрывное по x^{l+j} решение с начальным условием P_0 [8]). При $\varepsilon_1 \to 0$ $P_1 \to P_0$ и существует предел $\lim_{\varepsilon_1\to 0}\psi(t, \varepsilon_1) = \varphi_0(t)$, где $\varphi_0(t)$ — решение системы $x^{i\cdot} = g_i(x)$, $h_j(x) = 0$; $i = 1, \ldots, l$; $j = 1, \ldots, m$.

В силу теоремы А. Н. Тихонова равномерно по t при $0 \leqslant t \leqslant T$ существует предел $\lim_{\varepsilon_2\to 0}\varphi_0(t, \varepsilon_2) = \varphi_0(t)$.

Ряд (3.4), степенной относительно ε_1, сходится при $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^\circ$, следовательно, его радиус сходимости $r \geqslant \varepsilon_1^\circ$ (будем считать, что $r > \varepsilon_1^\circ$) и ряд (3.4) сходится абсолютно при $\varepsilon_1 < r$. Согласно формуле Коши — Адамара

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\varphi_n(t, \varepsilon_2)|} = \frac{1}{r} < \frac{1}{\varepsilon_1^\circ} = c$$

Следовательно, после некоторого номера N $|\varphi_n(t, \varepsilon_2)| < c^n$. Если $\varepsilon_1 < 1/(2c)$, то для любого $M > 0$

$$\overline{\lim_{\varepsilon_2\to 0}} \sum_{j=N+1}^{N+M} \varepsilon_1^j \varphi_j(t, \varepsilon_2) \leqslant \sum_{j=N+1}^{N+M} \left(\frac{1}{2}\right)^j < k$$

Следовательно, существует конечный предел

$$\overline{\lim_{\varepsilon_2\to 0}} \sum_{j=N+1}^{\infty} \varepsilon_1^j \varphi_j(t, \varepsilon_2)$$

Аналогично существует конечный предел

$$\underline{\lim_{\varepsilon_2\to 0}} \sum_{j=N+1}^{\infty} \varepsilon_1^j \varphi_j(t, \varepsilon_2)$$

Также при $0 \leqslant \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_1^\circ$, $0 < t \leqslant T$ существует предел

$$\overline{\lim_{\varepsilon_2\to 0}}\, \varphi(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \underline{\lim_{\varepsilon_2\to 0}}\, \varphi(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \lim_{\varepsilon_2\to 0} \varphi(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

Но в этом случае существуют конечные пределы

$$\overline{\lim_{\varepsilon_2\to 0}} \sum_{j=0}^{N} \varepsilon_1^j \varphi_j(t, \varepsilon_2), \quad \underline{\lim_{\varepsilon_2\to 0}} \sum_{j=0}^{N} \varepsilon_1^j \varphi_j(t, \varepsilon_2)$$

т. е. на некотором интервале $(0, \varepsilon_2)$

$$\left| \sum_{j=0}^{N} \varepsilon_1^j \varphi_j(t, \varepsilon_2) \right| \leqslant c$$

Выбирая произвольный набор из N различных чисел ε_1, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_1^\circ$, получим линейную относительно функций $\varphi_j(t, \varepsilon_2)$ систему с определителем, отличным от нуля. Решая ее, доказываем ограниченность функций $\varphi_j(t, \varepsilon_2)$, $j = 1, \ldots, N$ при $0 < \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_2^\circ$, $0 < t \leqslant T$. Рассмотрим теперь ряд (3.4) при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. При $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^\circ$, $0 < t \leqslant T$ он мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

Следовательно, ряд (3.4) сходится равномерно по ε. При $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^\circ$, $0 < t \leqslant T$ существует предел $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^j \varphi_j(t, \varepsilon) = 0$. Тогда можно совершить предельный переход почленно, следовательно, при $0 < t \leqslant T$ существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varphi(t, \varepsilon, \varepsilon) = \varphi_0(t) \tag{3.8}$$

При $t = 0$ $\varphi(0, \varepsilon, \varepsilon) = \varphi_0(t)$, так что равенство (3.8) выполнено при $0 \leqslant t \leqslant T$. Оценивая $|\varphi(t, \varepsilon, \varepsilon) - \varphi_0(t)|$ на отрезке $[0; T]$, найдем, что сходимость равномерная.

Доказательство теоремы п. 3 упрощается, если воспользоваться результатами работы [10].

4. Из предыдущих рассуждений следует, что сила $F(\mu)$ реализует неголономную связь (2.1). Это означает, что если $q^i = q^i(t, \mu)$ — траектория системы (2.3) с начальным условием P_0, определенная на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$, то существует равномерный по t предел

$$\lim_{\mu\to\infty} q(t, \mu) = q(t)$$

Предельная функция $q(t)$ — траектория системы со связью (2.1), т. е. при больших значениях параметра μ траектории системы с действующей силой $F(\mu)$ и системы с неголономной связью (2.1) близки. При предельном переходе ($\mu \to \infty$) траектории совпадают, при этом среднее значение силы F по колебаниям около S представляет силу реакции R неголономной связи. Сила R принадлежит кораспределению π^*D. Таким образом, естественно возникает кораспределение, в котором лежат силы реакций неголономной связи. Для лагранжианов механического типа геометрическая характеристика 1-форм, принадлежащих кораспределению π^*D, приведена в п. 2. Связь, реализуемая силой $F(\mu)$, идеальна. Действительно, виртуальное перемещение определяется [11] как векторное поле $T(Z)$ на TM, такое, что поле Z аннулируется кораспределением D. Но тогда кораспределение π^*D аннулирует поле $T(Z)$, т. е. работа силы реакции связи на виртуальном перемещении равна нулю.

Пример. Для пластинки с лезвием на наклонной плоскости [6] уравнение неголономной связи имеет вид

$$v = -x^{\cdot} \sin\varphi + y^{\cdot}\cos\varphi = 0 \tag{4.1}$$

Заменим связь (4.1) силой, зависящей от параметра μ. Уравнения движения в квазикоординатах имеют вид

$$\begin{aligned} &u^{\cdot} = v\omega + g\sin\alpha\cos\varphi \\ &v^{\cdot} = -u\omega - g\sin\alpha\sin\varphi - \mu v, \qquad \omega^{\cdot} = 0 \\ &u = x^{\cdot}\cos\varphi + y^{\cdot}\sin\varphi \\ &v = -x^{\cdot}\sin\varphi + y^{\cdot}\cos\varphi, \quad \omega = \varphi^{\cdot} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Решая систему (4.2) при начальных условиях $x(0) = y(0) = \varphi(0) = x(0)^{\cdot} = y^{\cdot}(0) = 0$, $\varphi^{\cdot}(0) = \omega_0$ и переходя к пределу ($\mu \to \infty$), получим

$$\begin{aligned} &x = \frac{g\sin\alpha}{2\omega_0^2}\sin^2\omega_0 t \\ &y = \frac{g\sin\alpha}{2\omega_0^2}\left(\omega_0 t - \frac{1}{2}\sin 2\omega_0 t\right) \\ &\varphi = \omega_0 t \end{aligned} \tag{4.3}$$

Уравнения (4.3) — уравнения движения системы с неголономной связью (4.1).

Автор благодарит Румянцева В. В. и Сумбатова А. С. за внимание к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вершик А. М., Фаддеев Л. Д.* Лагранжева механика в инвариантном изложении.— В кн.: Проблемы теоретической физики. Вып 2. Л.: Изд-во ЛГУ, 1975, с. 129—141.
2. *Стернберг С.* Лекция по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970. 412 с.
3. *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973. 188 с.
4. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.
5. *Хаар Д. тер.* Основы гамильтоновой механики. М.: Наука, 1974. 233 с.
6. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
7. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. М.: Мир, 1971. 343 с.
8. *Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1973. 247 с.
9. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
10. *Градштейн И. С.* Применение теории устойчивости А. М. Ляпунова к теории дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных.— Матем. сб., 1953, т. 32, № 2, с. 263—286.
11. *Брендел*ев В. Н.* О перестановочных соотношениях в неголономной механике.— Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1978, № 6, с. 47—54.

Москва

Поступила в редакцию
21.VI.1979