Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 3, 1981

УДК 531—31

О ТЕОРИИ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ПУАНКАРЕ — ЧЕТАЕВА

Фам Гуен

Общая теория циклических перемещений, введенная впервые в аналитическую механику Н. Г. Четаевым [1], была развита для голономных [2] и неголономных [3, 4] систем. Ниже дается одно определение циклических перемещений для обобщенных уравнений Пуанкаре — Четаева [5], пригодных как для голономных, так и для неголономных систем, и аналогичное определение для уравнений движения неголономных систем в переменных Пуанкаре — Четаева [6]. Показано, что это определение содержит как частные случаи определения, данные в [1, 3, 4], и некоторые другие определения циклических координат ([7—9] и др.). Приводятся уравнения Рауса с пониженным порядком.

1. Циклическое перемещение и интеграл для обобщенных уравнений Пуанкаре — Четаева. Рассмотрим механическую систему из N материальных точек, определяемую в каждый момент времени t переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые на действительных перемещениях подчинены $n - l$ линейным уравнениям связей

$$\eta_j \equiv \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i^{\boldsymbol\cdot} + a_j = 0 \quad (j = l+1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

а на возможных перемещениях — $n - l$ соотношениям

$$\omega_j \equiv \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \delta x_i = 0 \quad (j = l+1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

Здесь l — число степеней свободы системы, a_{ji}, a_j — известные функции переменных t и x_i. Среди рассмотренных связей могут быть и неголономные, в этом случае предположим $k - l$ последних соотношений голономными $(l \leqslant k \leqslant n)$.

Тогда, как известно [5], можно построить систему операторов перемещений $X_0, X_1, \ldots, X_l$, удовлетворяющих соотношениям

$$(X_s, X_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{l} C_{s\alpha\beta} X_\beta + \sum_{\nu=l+1}^{k} C_{s\alpha\nu} X_\nu \tag{1.3}$$
$$(s = 0, 1, \ldots, l; \quad \alpha = 1, \ldots, l)$$

и получить уравнения движения в виде обобщенных уравнений Пуанкаре — Четаева, пригодных как для голономных (когда $k = l$), так и для неголономных систем (когда $k > l$)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_\alpha} - X_\alpha (T+U) - \sum_{\beta=1}^{l}\left(C_{0\alpha\beta} + \sum_{s=1}^{l}\eta_s C_{s\alpha\beta}\right)\frac{\partial T}{\partial \eta_\beta} - \tag{1.4}$$
$$- \sum_{\nu=l+1}^{k}\left(C_{0\alpha\nu} + \sum_{s=1}^{l}\eta_s C_{s\alpha\nu}\right)\left(\frac{\partial T^\circ}{\partial \eta_\nu}\right) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, l)$$

Здесь T — кинетическая энергия системы (с учетом всех наложенных связей), T° — кинетическая энергия соответствующей «голономной системы», когда не учитываются неголономные связи, U — силовая функция, $C_{s\alpha\beta}$ и $C_{s\alpha\nu}$ — в общем случае функции переменных $t, x_i, X_{l+1}, \ldots$ $\ldots, X_k$ — операторы, соответствующие формам левых частей уравнений неголономных связей (1.1).

Для получения некоторых первых интегралов уравнений (1.4) примем следующее определение.

Определение 1. Будем называть циклическим перемещением для уравнений (1.4) всякое перемещение с оператором X_γ, удовлетворяющим условиям:

1°. Коммутаторы (1.3) для X_γ имеют вид

$$(X_s, X_\gamma) = \sum_{\nu=l+1}^{k} C_{s\gamma\nu} X_\nu \quad (s = 0, 1, \ldots, l) \tag{1.5}$$

т. е. могут выражаться лишь через операторы, соответствующие левым частям уравнений неголономных связей (1.1).

2°. Для кинетической энергии и силовой функции имеет место равенство

$$X_\gamma (T+U) + \sum_{\nu=l+1}^{k}\left(C_{0\gamma\nu} + \sum_{s=1}^{l}\eta_s C_{s\gamma\nu}\right)\left(\frac{\partial T^\circ}{\partial \eta_\nu}\right) = 0 \tag{1.6}$$

Тогда из γ-го уравнения (1.4) можно получить циклический интеграл

$$\partial T/\partial \eta_\gamma = \beta_\gamma = \mathrm{const} \tag{1.7}$$

Определение 1 включает в себя как частные случаи: определение циклического перемещения, данного Четаевым [1] для голономных систем, так как для таких систем все коэффициенты $C_{s\gamma\nu}$ равны нулю, а из (1.5), (1.6) следуют условия Четаева и определение, данное в [4] для тех же уравнений (1.4), ибо, когда оператор X_γ перестановочен со всеми операторами X_s, условия (1.5), (1.6) совпадают с данными в [4].

2. Циклическое перемещение для уравнений движения неголономных систем в переменных Пуанкаре — Четаева. Аналогично, для уравнений движения неголономных систем в переменных Пуанкаре — Четаева [6]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_\alpha} - Y_\alpha (T+U) - \sum_{\beta=1}^{l}\left(k_{0\alpha\beta} + \sum_{s=1}^{l}\eta_s k_{s\alpha\beta}\right)\frac{\partial T}{\partial \eta_\beta} - \tag{2.1}$$
$$- \sum_{\nu=l+1}^{k}\left(k'_{0\alpha\nu} + \sum_{s=1}^{l}\eta_s k'_{s\alpha\nu}\right)\left(\frac{\partial T^\circ}{\partial \eta_\nu}\right) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, l)$$

можно дать следующее определение.

Определение 2. Оператор Y_γ будет оператором циклического перемещения для уравнений (2.1), если выполняются условия

$$(2.2) \qquad (Y_s, Y_\gamma) = \sum_{\nu=l+1}^{k} k'_{s\gamma\nu} X_\nu \quad (s = 0, 1, \ldots, l)$$

$$Y_\gamma(T + U) + \sum_{\nu=l+1}^{k} \left(k'_{0\gamma\nu} + \sum_{s=1}^{l} \eta_s k'_{s\gamma\nu}\right)\left(\frac{\partial T^\circ}{\partial \eta_\nu}\right) = 0$$

Здесь Y_α — операторы действительных перемещений неголономных систем со связями

$$(2.3) \qquad \eta_\nu = \sum_{\alpha=1}^{l} c_{\nu\alpha}\eta_\alpha + c_{\nu 0} \quad (\nu = l + 1, \ldots, k)$$

Эти операторы выражаются через операторы перемещений X_α для соответствующей голономной системы в виде

$$(2.4) \qquad Y_\alpha = X_\alpha + \sum_{\nu=l+1}^{k} c_{\nu\alpha} X_\nu \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, l)$$

$$(Y_s, Y_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{l} k_{s\alpha\beta} Y_\beta + \sum_{\nu=l+1}^{k} k'_{s\alpha\nu} X_\nu$$

$$(s = 0, 1, \ldots, l; \quad \alpha = 1, \ldots, l)$$

$$k_{s\alpha\beta} = C_{s\alpha\beta} + \sum_{\nu=l+1}^{k} c_{\nu\alpha} C_{s\nu\beta} + \sum_{\mu=l+1}^{k} c_{\mu s}\left(C_{\mu\alpha\beta} + \sum_{\nu=l+1}^{k} c_{\nu\alpha} C_{\mu\nu\beta}\right)$$

$$k'_{s\alpha\nu} = k_{s\alpha\nu} - \sum_{\beta=1}^{l} c_{\nu\beta} k_{s\alpha\beta} + Y_s(c_{\nu\alpha}) - Y_\alpha(c_{\nu s})$$

$$(s = 0, 1, \ldots, l; \ \alpha = 1, \ldots, l; \ \beta = 1, \ldots, k; \ \nu = l + 1, \ldots, k)$$

Коэффициенты $C_{s\alpha\beta}$ взяты из коммутаторов

$$(X_s, X_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{k} C_{s\alpha\beta} X_\beta \quad (s = 0, 1, \ldots, k; \quad \alpha = 1, \ldots, k)$$

T° — кинетическая энергия соответствующей голономной системы, T — ее выражение при учете (2.3), т. е. кинетическая энергия неголономной системы.

Каждому циклическому перемещению по определению 2 соответствует циклический интеграл

$$(2.5) \qquad \partial T / \partial \eta_\gamma = \beta_\gamma = \text{const}$$

Определение 2 содержит как частный случай определение, данное в [3] для уравнений движения неголономных систем в переменных Пуанкаре — Четаева с множителями связей, согласно которому X_γ—циклическое перемещение, если

$$(2.6) \qquad (X_s, X_\gamma) = 0, \quad (s = 0, 1, \ldots, k), \ X_\gamma(L^\circ) = 0$$

$$c_{\nu\gamma} = 0 \ (\nu = l + 1, \ldots, k)$$

Здесь X_α — операторы перемещения соответствующей голономной системы, $c_{\nu\alpha}$ — коэффициенты в уравнениях неголономных связей (2.3), L° — функция Лагранжа для соответствующей голономной системы.

В самом деле, подставляя (2.6) в (2.4), получим

$$Y_\alpha = X_\alpha + \sum_{\nu=l+1}^{k} c_{\nu\alpha} X_\nu, \quad Y_\gamma = X_\gamma \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, l; \quad \alpha \neq \gamma)$$

$$(Y_s, Y_\gamma) = (Y_s, X_\gamma) = -\sum_{\nu=l+1}^{k} X_\gamma (c_{\nu s}) X_\nu \quad (s = 0, 1, \ldots, l)$$

$$Y_\gamma (L) = X_\gamma (L) = \sum_{\nu=l+1}^{k} \frac{\partial T^\circ}{\partial \eta_\nu} \left[X_\gamma (c_{\nu 0}) + \sum_{s=1}^{l} \eta_s X_\gamma (c_{\nu s}) \right]$$

Два последних соотношения показывают, что условия удовлетворены, так как $k'_{s\gamma\nu} = -X_\gamma (c_{\nu s})$, $k'_{0\gamma\nu} = -X_\gamma (c_{\nu 0})$. Поэтому при условии (2.6) X_γ является также и циклическим перемещением преобразованных (к независимым параметрам) уравнений (2.1) а из существования циклического интеграла $\partial T^\circ / \partial \eta_\gamma = \text{const}$ для уравнений с множителями следует циклический интеграл для преобразованных уравнений (2.1). Последнее можно получить непосредственно, ибо

$$\frac{\partial T}{\partial \eta_\gamma} = \frac{\partial T^\circ}{\partial \eta_\gamma} + \sum_{\nu=l+1}^{k} \frac{\partial T^\circ}{\partial \eta_\nu} c_{\nu\gamma} \tag{2.7}$$

Пользуясь определением (2.2), можно показать также следующее:

а) определение циклической координаты [7], дающее первый интеграл для уравнений с множителями, в общем случае не дает интеграла для преобразованных уравнений (2.1). Для последнего необходимо и достаточно, чтобы было выполнено соответствующее второе условие (2.2);

б) определение циклической координаты [8] приводится к частному случаю определения (2.2), оно дает первый интеграл одновременно и для уравнений с множителями и для преобразованных уравнений (2.1).

В самом деле, пусть неголономная система в обобщенных координатах подчинена неголономным связям

$$q_\nu^{\cdot} = \sum_{\alpha=1}^{l} c_{\nu\alpha} q_\alpha^{\cdot} \quad (\nu = l + 1, \ldots, n) \tag{2.8}$$

а уравнения с множителями связей будут

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^\circ}{\partial q_\alpha^{\cdot}} - \frac{\partial L^\circ}{\partial q_\alpha} - \sum_{\nu=l+1}^{n} \mu_\nu c_{\nu\alpha} = 0 \tag{2.9}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^\circ}{\partial q_\nu^{\cdot}} - \frac{\partial L^\circ}{\partial q_\nu} + \mu_\nu = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, l; \ \nu = l + 1, \ldots, n)$$

Тогда циклическая координата, удовлетворяющая условиям [7]

$$\frac{\partial L^\circ}{\partial q_\gamma} = 0, \quad \sum_{\nu=l+1}^{n} \mu_\nu c_{\nu\gamma} = 0 \tag{2.10}$$

дает первый интеграл $\partial T^\circ / \partial q_\gamma^{\cdot} = \text{const}$. Однако соотношение (2.7) показывает, что, не предполагая $c_{\gamma\gamma} = 0$, из (2.10) не всегда следует интеграл $\partial T / \partial q_\gamma^{\cdot} = \text{const}$ для преобразованных уравнений, которые в данном случае являются уравнениями Воронца.

В общем случае из (2.7) в силу (2.10) можно получить

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_\gamma^{\cdot}} = \sum_{\nu=l+1}^{n} \frac{dc_{\nu\gamma}}{dt}\frac{\partial T^\circ}{\partial q_\nu^{\cdot}} + \sum_{\nu=l+1}^{n} c_{\nu\gamma}\frac{d}{dt}\frac{\partial T^\circ}{\partial q_\nu^{\cdot}}$$

или

$$\sum_{\nu=l+1}^{n} c_{\nu\gamma}\frac{d}{dt}\frac{\partial T^\circ}{\partial q_\nu^{\cdot}} = \sum_{\nu=l+1}^{n} c_{\nu\gamma}\frac{d}{dt}\frac{\partial L^\circ}{\partial q_\nu^{\cdot}} = \tag{2.11}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_\gamma^{\cdot}} - \sum_{\nu=l+1}^{n}\frac{\partial T^\circ}{\partial q_\nu^{\cdot}}\sum_{s=1}^{l} q_s^{\cdot} Y_s(c_{\nu\gamma})$$

где из (2.3)

$$Y_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_s = \frac{\partial}{\partial q_s} + \sum_{\nu=l+1}^{n} c_{\nu s}\frac{\partial}{\partial q_\nu}$$

$$(Y_s, Y_\gamma) = \sum_{\nu=l+1}^{n} k'_{s\gamma\nu}X_\nu, \quad X_\nu = \frac{\partial}{\partial q_\nu}$$

$$k'_{0\gamma\nu} = 0, \quad k'_{s\gamma\nu} = Y_s(c_{\nu\gamma}) - Y_\gamma(c_{\nu s}) \quad (s = 1, \ldots, l;\ \nu = l+1, \ldots, n)$$

и, кроме того

$$Y_\gamma(T+U) = \frac{\partial L^\circ}{\partial q_\gamma} + \sum_{\nu=l+1}^{n} c_{\nu\gamma}\frac{\partial L^\circ}{\partial q_\nu} + \sum_{\nu=l+1}^{n}\frac{\partial T^\circ}{\partial q_\nu^{\cdot}}\sum_{s=1}^{l} q_s^{\cdot} Y_\gamma(c_{\nu s})$$

что в силу первого условия (2.10) дает

$$\sum_{\nu=l+1}^{n} c_{\nu\gamma}\frac{\partial L^\circ}{\partial q_\nu} = Y_\gamma(T+U) - \sum_{\nu=l+1}^{n}\frac{\partial T^\circ}{\partial q_\nu^{\cdot}}\sum_{s=1}^{l} q_s^{\cdot} Y_\gamma(c_{\nu s}) \tag{2.12}$$

Подставляя (2.11) и (2.12) во второе условие (2.10), получим

$$\sum_{\nu=l+1}^{n} \mu_\nu c_{\nu\gamma} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_\gamma^{\cdot}} - Y_\gamma(T+U) - \tag{2.13}$$

$$- \sum_{\nu=l+1}^{n}\frac{\partial T^\circ}{\partial q_\nu^{\cdot}}\sum_{s=1}^{l} q_s^{\cdot}[Y_s(c_{\nu\gamma}) - Y_\gamma(c_{\nu s})] = 0$$

Соотношение (2.13) доказывает вторую часть утверждения а).

Если циклическая координата q_γ для уравнений (2.9) удовлетворяет условиям [8]

$$\partial L^\circ/\partial q_\gamma = 0, \quad c_{\nu\gamma} = 0 \quad (\nu = l+1, \ldots, n)$$

то удовлетворяет условиям (2.10), а из (2.7) следует, что $\partial T/\partial q_\gamma^{\cdot} = \mathrm{const}$ — интеграл преобразованных уравнений (2.1). Условия (2.2) выполняются, что следует из (2.3) и (2.13). Утверждение б) доказано.

В [9—11] дано другое определение: q_γ — циклическая координата, если

$$\frac{\partial L^\circ}{\partial q_\gamma} = 0, \quad \frac{\partial c_{\nu\alpha}}{\partial q_\gamma} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, l;\quad \nu = l+1, \ldots, n)$$

Как известно [12], это определение не дает первого интеграла уравнений с множителями. Оно не может дать интеграла и для преобразованных уравнений (2.1), т. е. уравнений Воронца, так как соответствующее q_γ

уравнение тогда имеет вид

$$(2.14)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_\gamma^{\cdot}} = \sum_{\nu=l+1}^{n} c_{\nu\gamma}\frac{\partial (T+U)}{\partial q_\nu} + \sum_{\nu=l+1}^{n}\frac{\partial T^c}{\partial q_\nu^{\cdot}}\sum_{s=1}^{l} q_s^{\cdot}\times$$

$$\times\left(\frac{\partial c_{\nu\gamma}}{\partial q_s} + \sum_{\mu=l+1}^{n} c_{\mu s}\frac{\partial c_{\nu\gamma}}{\partial q_\mu} - \sum_{\mu=l+1}^{n} c_{\mu\gamma}\frac{\partial c_{\nu s}}{\partial q_\mu}\right)$$

Из этого уравнения видим, что можно получить интеграл $\partial T/\partial q_\gamma^c =$ $=\mathrm{const}$ лишь при выполнении еще одного условия, вытекающего из (2.2), согласно которому правая часть (2.14) должна обращаться в нуль.

В [13] дано определение циклической координаты для уравнений Воронца, которое выражается условиями

$$\partial T/\partial q_\gamma = 0,\quad c_{\nu\gamma} = 0$$
$$\partial c_{\nu s}/\partial q_\gamma = 0 \quad (s = 1,\ldots,l;\ \nu = l+1,\ldots,n)$$

Можно показать, что эти условия приводятся к условиям (2.2).

Итак, определение 2 содержит как частные случаи определения, данные в [3, 8, 13], а для того, чтобы определения циклических координат в [7, 9, 11] дали первый интеграл для преобразованных уравнений (2.1) (которые в данном случае совпадают с уравнениями Воронца), необходимо выполнение еще некоторого дополнительного, вытекающего из (2.2) условия.

3. Уравнения Рауса. Покажем, что, имея $l-m$ циклических интегралов (1.7)

$$(3.1)\qquad \partial T/\partial \eta_\gamma = \beta_\gamma = \mathrm{const}\quad (\gamma = m+1,\ldots,l)$$

можно понизить порядок системы уравнений (1.4). В самом деле, так как T — определенно-положительная квадратичная функция параметров $\eta_1,\ldots,\eta_l$, можно разрешить (3.1) относительно, скажем, $l-m$ последних параметров

$$(3.2)\qquad \eta_\gamma = \eta_\gamma(t, x_1,\ldots,x_n, \eta_1,\ldots,\eta_m, \beta_{m+1},\ldots,\beta_l)$$
$$(\gamma = m+1,\ldots,l)$$

Теперь, введя функцию Рауса в виде [1]

$$(3.3)\qquad R = T + U - \sum_{\gamma=m+1}^{l}\eta_\gamma\beta_\gamma$$

в силу (3.1) получим

$$(3.4)\qquad \delta R = \sum_{\alpha=1}^{l}\omega_\alpha X_\alpha(T+U) + \sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \eta_\alpha}\delta\eta_\alpha - \sum_{\gamma=m+1}^{l}\eta_\gamma\delta\beta_\gamma$$

С другой стороны, подставляя (3.2) в (3.3), получим функцию R, зависящую от t; x_i; $\eta_1,\ldots,\eta_m$; $\beta_{m+1},\ldots,\beta_l$, и

$$(3.5)\qquad \delta R = \sum_{\alpha=1}^{l}\omega_\alpha X_\alpha(R) + \sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\partial R}{\partial \eta_\alpha}\delta\eta_\alpha + \sum_{\gamma=m+1}^{l}\frac{\partial R}{\partial \beta_\gamma}\delta\beta_\gamma$$

Из (3.4) и (3.5) следует

(3.6) $\partial T/\partial \eta_\alpha = \partial R/\partial \eta_\alpha,\ X_\alpha (T + U) = X_\alpha (R)$
$\eta_\gamma = -\partial R/\partial \beta_\gamma,\quad X_\gamma\ (T + U) = X_\gamma\ (R)\quad (\alpha = 1, \ldots, m;$
$\gamma = m + 1, \ldots, l)$

В силу (3.6) m первых обобщенных уравнений Пуанкаре — Четаева (1.4) принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \eta_\alpha} - X_\alpha(R) - \sum_{\beta=1}^{m}\left(C_{0\alpha\beta} + \sum_{s=1}^{m}\eta_s C_{s\alpha\beta}\right)\frac{\partial R}{\partial \eta_\beta} - \tag{3.7}$$
$$- \sum_{\gamma=m+1}^{l}\beta_\gamma\left(C_{0\alpha\gamma} + \sum_{s=1}^{m}\eta_s C_{s\alpha\gamma}\right) -$$
$$- \sum_{\nu=l+1}^{k}\left(C_{0\alpha\nu} + \sum_{s=1}^{m}\eta_s C_{s\alpha\nu} - \sum_{\gamma=m+1}^{l}\frac{\partial R}{\partial \beta_\gamma}C_{\gamma\alpha\nu}\right)\left(\frac{\partial T^\circ}{\partial \eta_\nu}\right) = 0$$
$$(\alpha = 1, \ldots, m)$$

Это уравнения Рауса порядка $2m$ ($m < l$). Они вместе с кинетическими уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = X_0(x_i) + \sum_{s=1}^{m}\eta_s X_s(x_i) - \sum_{\gamma=m+1}^{l}\frac{\partial R}{\partial \beta_\gamma}X_\gamma(x_i)\qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.8}$$

образуют замкнутую систему $n + m$ дифференциальных уравнений для определения $n + m$ переменных x_i и η_α в функциях времени t. После этого можно определить η_γ из уравнений (3.6).

В случае голономных систем уравнения (3.7) совпадают с известными уравнениями Рауса для уравнений Пуанкаре [1], а когда операторы циклических переменных X_α перестановочны со всеми другими операторами, они принимают вид, данный в [4].

Аналогично, если уравнения (2.1) имеют $l - m$ циклических интегралов (3.1), то соответствующие уравнения Рауса приведенной системы будут

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \eta_\alpha} - Y_\alpha(R) - \sum_{\beta=1}^{m}\left(k_{0\alpha\beta} + \sum_{s=1}^{m}\eta_s k_{s\alpha\beta}\right)\frac{\partial R}{\partial \eta_\beta} - \tag{3.9}$$
$$- \sum_{\gamma=m+1}^{l}\beta_\gamma\left(k_{0\alpha\gamma} + \sum_{s=1}^{m}\eta_s k_{s\alpha\gamma}\right) -$$
$$- \sum_{\nu=l+1}^{k}\left(k'_{0\alpha\nu} + \sum_{s=1}^{m}\eta_s k'_{s\alpha\nu} - \sum_{\gamma=m+1}^{l}\frac{\partial R}{\partial \beta_\gamma}k'_{\gamma\alpha\nu}\right)\left(\frac{\partial T^\circ}{\partial \eta_\nu}\right) = 0$$
$$(\alpha = 1, \ldots, m)$$

где функция Рауса дается соотношением (3.3).

4. Примеры. 1°. Механическая система состоит из вращающегося вокруг вертикальной оси стола с моментом инерции J и движущихся на нем саней Чаплыгина [14]. Определим положение системы следующими переменными: углом вращения стола ψ, прямоугольными координатами ξ, η точки касания A саней (резца) относительно стола и углом φ поворота саней вокруг точки A. Между этими переменными имеется одна неголономная связь

(4.1) $$\eta_4 = \xi^{\cdot} \sin\varphi - \eta^{\cdot} \cos\varphi = 0$$

Взяв эти переменные за переменные Пуанкаре — Четаева, а за параметры действительных перемещений следующие величины:

(4.2) $$\eta_1 = \varphi^{\cdot}, \quad \eta_2 = \xi^{\cdot} \cos\varphi + \eta^{\cdot} \sin\varphi, \quad \eta_3 = \psi^{\cdot}$$

получим систему операторов перемещений неголономной системы

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad X_2 = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\xi} + \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\eta}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial\psi}$$

Коммутаторы этих операторов равны нулю, кроме одного

$$(X_1, X_2) = -X_4; \quad X_4 = \sin\varphi\partial/\partial\xi - \cos\varphi\partial/\partial\eta$$

где X_4 — оператор, соответствующий левой части уравнения неголономной связи (4.1). Эти операторы удовлетворяют первому условию (2.2). Кроме того, имеем (многоточием обозначены члены, не зависящие от η_4)

(4.3) $$\begin{aligned} &T = {}^1/_2 m (\gamma^2\eta_1^2 + \eta_2^2 - 2b\eta_1\eta_2 + 2\Delta_1\eta_1\eta_3 - 2\Delta_2\eta_2\eta_3 + \Delta_3\eta_3^2) \\ &T^\circ = {}^1/_2 m (\eta_4^2 - 2a\eta_1\eta_4 - \Delta_4\eta_4\eta_3 + \ldots, \quad U = 0 \\ &\Delta_1 = \gamma^2 + a(\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi) + b(-\xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi) \\ &\Delta_2 = b + \xi\sin\varphi - \eta\cos\varphi, \quad \Delta_3 = J/m + \gamma^2 + \xi^2 + \eta^2 + \\ &+ 2a(\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi) + 2b(-\xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi), \quad \Delta_4 = a + \\ &+ \xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi \end{aligned}$$

Здесь m — масса саней, a, b — координаты центра тяжести саней в жестко связанной с санями системе координат Axy (ось Ax направлена по резцу, ось Ay перпендикулярна к Ax). Видно, что только X_3 удовлетворяет второму условию (2.2). Соответствующий этому циклическому перемещению интеграл

(4.4) $$\partial T/\partial\eta_3 = m(\Delta_1\eta_1 - \Delta_2\eta_2 + \Delta_3\eta_3) = \beta = \text{const}$$

есть интеграл сохранения момента количеств движения системы относительно вертикальной оси вращения, который может быть получен непосредственно из общей теоремы динамики.

Для вывода уравнений Рауса из (4.4) получим выражение для η_3 и найдем функцию Рауса $R = T + U - \beta\eta_3$. Эти уравнения имеют вид

(4.5) $$\begin{aligned} &\left(\gamma^2 - \frac{\Delta_1^2}{\Delta_3}\right)\eta_1^{\cdot} - \left[b - (2b - \Delta_2)\frac{\Delta_1}{\Delta_3}\right]\eta_2^{\cdot} - \frac{\Delta_1}{\Delta_3}\frac{\partial\Delta_1}{\partial\varphi}\eta_1^2 + \\ &+ \left(a - \frac{\Delta_1\Delta_4}{\Delta_3}\right)\eta_1\eta_3 - \frac{1}{\Delta_3^2}(\beta/m - \Delta_1\eta_1 + \Delta_2\eta_2) \times \\ &\times \left[(\beta/m + \Delta_1\eta_1 + \Delta_2\eta_2)\frac{\partial\Delta_1}{\partial\varphi} - 2(a\Delta_3 - \Delta_1\Delta_4)\eta_2\right] = 0 \\ &\left[b - (2b - \Delta_2)\frac{\Delta_1}{\Delta_3}\right]\eta_1^{\cdot} - \left[1 - \frac{(2b - \Delta_2)^2}{\Delta_3}\right]\eta_2^{\cdot} + \\ &+ \left(a - \frac{2b - \Delta_2}{\Delta_3}\frac{\partial\Delta_1}{\partial\varphi}\right)\eta_1^2 - (2b - \Delta_2)\frac{\Delta_4}{\Delta_3}\eta_1\eta_2 - \\ &- \frac{1}{\Delta_3^2}[\beta/m - \Delta_1\eta_1 + (2b - \Delta_2)\eta_2]\left\{2\left[a\Delta_3 - (2b - \Delta_2)\frac{\partial\Delta_1}{\partial\varphi}\right]\eta_1 - \right. \\ &\left. - [\beta/m - \Delta_1\eta_1 + 3(2b - \Delta_2)\eta_2]\Delta_4\right\} = 0 \end{aligned}$$

Уравнения (4.5) вместе с уравнениями

$$\varphi^{\cdot} = \eta_1, \quad \xi^{\cdot} = \eta_2\cos\varphi, \quad \eta^{\cdot} = \eta_2\sin\varphi$$

образуют замкнутую систему для определения φ, ξ, η, η_1, η_2 в функциях времени t, после этого можно определить ψ из уравнения (4.4), где $\psi^{\cdot} = \eta_3$.

2°. Колесико с острым краем [15, 16], принадлежащее некоторому прибору, который принуждает его двигаться по горизонтальной плоскости так, чтобы его плоскость оставалась все время перпендикулярной к последней, а само оно катится без скольжения на этой плоскости, центр тяжести колесика находится на вертикальной оси, проходящей через точку касания.

Определим положение системы горизонтальными координатами ξ, η центра тяжести G колесика (точки касания), углом ψ, образуемым проекцией плоскости колесика на горизонтальной плоскости с осью $O\xi$, и углом поворота φ колесика вокруг своей оси O_1O_2. Тогда среди них имеются следующие неголономные связи, выражающие условия, что колесико катится без скольжения и скорость его центра тяжести все время лежит на его плоскости:

$$(4.6) \qquad \eta_3 \equiv \xi^{\cdot} - R\varphi^{\cdot} \sin\varphi = 0, \quad \eta_4 \equiv \eta^{\cdot} - R\varphi^{\cdot} \cos\psi = 0$$

Примем ξ, η, φ, ψ за переменные Пуанкаре — Четаева, а $\eta_1 = \varphi^{\cdot}$, $\eta_2 = \psi^{\cdot}$ — за параметры действительных перемещений, тогда соответствующие операторы перемещения будут

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial \varphi} + R\sin\psi \frac{\partial}{\partial \xi} + R\cos\psi \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial \psi}$$

Эти операторы удовлетворяют условию (1.5), так как

$$(X_0, X_1) = 0, \quad (X_0, X_2) = 0, \quad (X_1, X_2) = -R\cos\psi X_3 + R\sin\psi X_4$$

где $X_3 = \partial/\partial\xi$, $X_4 = \partial/\partial\eta$ — операторы, соответствующие левым частям уравнений неголономных связей (4.6). Кроме того, имеем

$$T = {}^1/_2 m\, [(R^2 + k_1^2)\, \eta_1^2 + k_2^2 \eta_2^2], \quad U = 0$$
$$T^{\circ} = {}^1/_2 m\, [\eta_3^2 + \eta_4^2 + 2R\eta_1\, (\eta_3 \sin\psi + \eta_4 \cos\psi) + \ldots]$$

где k_1, k_2 — радиусы инерции колесика относительно его диаметра и относительно его оси вращения, многоточие — члены, не содержащие η_3, η_4. Поэтому условие (1.6) удовлетворяется для X_1 и X_2, а соответствующие циклические интегралы будут

$$\partial T/\partial \eta_1 = m\,(R^2 + k_1^2)\, \eta_1 = \beta_1 = \text{const}, \; \partial T/\partial \eta_2 = m k_2^2 \eta_2 = \beta_2 = \text{const}$$

Эти интегралы показывают, что параметры η_1, η_2 все время имеют постоянные значения $\eta_1 = \beta_1/[m(R^2 + k_1^2)]$, $\eta_2 = \beta_2/(mk_2^2)$. Подставляя их в уравнения (3.9)

$$\varphi^{\cdot} = \eta_1, \; \psi^{\cdot} = \eta_2, \; \xi^{\cdot} = R\sin\psi\eta_1, \; \eta^{\cdot} = R\cos\psi\eta_2$$

и интегрируя, получим искомые законы движения колесика.

3°. Однородный шар радиуса a катится без скольжения по неподвижной горизонтальной плоскости. Следуя [17], определим положение шара координатами ξ, η, ζ его центра тяжести и углами Эйлера θ, φ, ψ и примем их за переменные Пуанкаре — Четаева. Тогда условие качения без скольжения по плоскости дает уравнения связей

$$\eta_4 = \xi^{\cdot} - a\,(\theta^{\cdot} \sin\psi - \varphi^{\cdot} \cos\psi \sin\theta) = 0$$
$$\eta_5 \equiv \eta^{\cdot} + a\,(\theta^{\cdot} \cos\psi + \varphi^{\cdot} \sin\psi \sin\theta) = 0, \; \eta_6 = \zeta^{\cdot} = 0$$

Принимая $\eta_1 = \theta^{\cdot}$, $\eta_2 = \varphi^{\cdot}$, $\eta_3 = \psi^{\cdot} + \varphi\cos\theta$ за параметры действительных перемещений, получим систему операторов перемещения

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial \theta} + a\sin\psi\frac{\partial}{\partial \xi} - a\cos\psi\frac{\partial}{\partial \eta}$$
$$X_2 = \frac{\partial}{\partial \varphi} - \cos\theta\frac{\partial}{\partial \psi} - a\cos\psi\sin\theta\frac{\partial}{\partial \xi} - a\sin\psi\sin\theta\frac{\partial}{\partial \eta}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial \psi}$$

из которых только X_3 удовлетворяет условию (1.5), так как

$$(X_0, X_1) = 0, \; (X_0, X_2) = 0, \; (X_0, X_3) = 0$$
$$(X_1, X_2) = \sin\theta X_3 - a\cos\theta\cos\psi X_4 - a\cos\theta\sin\psi X_5$$
$$(X_2, X_3) = -a\sin\psi\sin\theta X_4 + a\cos\psi\sin\theta X_5$$
$$(X_3, X_1) = a\cos\psi X_4 + a\sin\psi X_5$$

где $X_4 = \partial/\partial\xi$, $X_5 = \partial/\partial\eta$ — операторы, соответствующие левым частям уравнений неголономных связей $\eta_4 = 0$, $\eta_5 = 0$.

Кроме того, имеем

$$T = {}^1/_2[(A + ma^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2) + A\eta_3^2], \quad U = 0$$
$$T^0 = {}^1/_2 m[\eta_4^2 + \eta_5^2 + \eta_6^2 + 2(a \sin\psi\eta_1 - a\cos\psi\sin\theta)\eta_4 + $$
$$+ 2(-a\cos\psi\eta_1 - a\sin\psi\sin\theta\eta_2)\eta_5 + \ldots].$$

Поэтому X_3 удовлетворяет также и условию (1.6). Отсюда имеем циклический интеграл

$$\partial T/\partial\eta_3 = A\eta_3 = \beta = \text{const}$$

Для вывода уравнений Рауса введем функцию

$$R = T + U - \beta\eta_3 = {}^1/_2\ [(A + ma^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2) - \beta^2/A]$$

которая после подстановки в (3.8) дает

$$(A + ma^2)\eta_1^{\cdot} + ma^2\sin\theta\cos\theta\eta_2^2 + \frac{A + ma^2}{A}\beta\sin\theta\eta_2 = 0$$
$$(A + ma^2)\eta_2^{\cdot} - ma^2\sin\theta\cos\theta\eta_1\eta_2 - \frac{A + ma^2}{A}\beta\sin\theta\eta_1 = 0$$

Эти уравнения вместе со следующими, полученными из (3.9):

$$\theta^{\cdot} = \eta_1,\ \varphi^{\cdot} = \eta_2,\ \psi^{\cdot} = -\eta_1\cos\theta + \beta/A$$
$$\xi^{\cdot} = a(\eta_1\sin\psi - \eta_2\cos\psi\sin\theta)$$
$$\eta^{\cdot} = -a(\eta_1\cos\psi + \eta_2\sin\psi\sin\theta),\ \zeta^{\cdot} = 0$$

образуют замкнутую систему для определения искомых величин $\theta, \varphi, \psi, \xi, \eta, \zeta, \eta_1, \eta_2$ в функциях времени t.

Автор благодарит Румянцева В. В. за ценные советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н. Г.* Об уравнениях Пуанкаре.— ПММ, 1941, т. 5, вып. 2, с. 253.
2. *Богоявленский А. А.* Обобщенные циклические перемещения.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 6, с. 1135.
3. *Назиев Э. Х.* О циклических интегралах уравнений движения механических систем.— Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1968, № 3, с. 101.
4. *Фам Гуен.* Циклический интеграл и уравнения Рауса в переменных Пуанкаре — Четаева.— Сб. научн. работ Лаборатории механики при Гос. Комитете по науке и технике СРВ, 1972, т. 2 (на вьетнамском языке).
5. *Фам Гуен.* Об одной форме уравнений движения механических систем.— ПММ, 1969, т. 33. вып. 3, с. 397.
6. *Фам Гуен.* К уравнениям движения неголономных систем в переменных Пуанкаре — Четаева.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 5, с. 253.
7. *Семенова Л. Н.* О теореме Рауса для неголономных систем.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 1, с. 156.
8. *Назиев Э. Х.* К теории об обобщении теоремы площадей.— Вестн. МГУ, 1968, № 2, с. 112.
9. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Об устойчивости стационарных движений голономных и неголономных систем.— ПММ, 1966, т. 30, вып. 2, с. 236.
10. *Обморшев А.Н.* Колебания и устойчивость неголономных систем.— В сб.: Механика. М.: Оборонгиз, 1956, с. 75.
11. *Добронравов В. В.* Основы механики неголономных систем. М.: Высшая школа, 1970. 270 с.
12. *Румянцев В. В., Карапетян А. В.* Устойчивость движений неголономных систем.— В сб.: Итоги науки и техники. Сер. общая механика. Т. 3. М: ВИНИТИ, 1976, с. 5.
13. *Шульгин М. Ф.* О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании.— Тр. Среднеазиатск. ун-та. Ташкент, 1958, вып. 14. 183 с.
14. *Чаплыгин С. А.* К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе.— Матем. сб., 1912, т. 28, вып. 2, с. 303.
15. *Лойцянский Л. Г., Лурье А. И.* Курс теоретической механики. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1955. 596 с.
16. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
17. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1968. 487 с.

Москва

Поступила в редакцию 14.V.1980