Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 3, 1981

УДК 536.36

О ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛАХ УРАВНЕНИЙ ЧАПЛЫГИНА

Сумбатов А. С.

Устанавливается некоторое геометрическое свойство линий конгруенции, определяемой линейным по скоростям первым интегралом динамических уравнений неголономной системы Чаплыгина. В случае двух степеней свободы и ненулевых приложенных к системе активных сил оно позволяет получить в явном виде необходимые и достаточные условия существования линейного интеграла. Результат иллюстрируется примером.

1. Рассмотрим натуральную неголономную систему, уравнения идеальных связей которой

$$(1.1)\qquad q^{\cdot\alpha} = \sum_{1}^{n}{}_{i} B_i{}^\alpha q^{\cdot i} \quad (\alpha = n+1, n+2, \ldots, m)$$

таковы, что коэффициенты $B_i{}^l$ являются функциями только первых n обобщенных координат q^i системы. Если от координат q^α не зависят также коэффициенты кинетической энергии T системы, а обобщенные активные силы $Q_i = Q_i(q^1, \ldots, q^n)$, $Q_\alpha = 0$ $(i = 1, \ldots, n;\ \alpha = n+1, \ldots, m)$, то система называется чаплыгинской [1, 2] и ее динамические уравнения можно записать так:

$$(1.2)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial q^{\cdot i}} - \frac{\partial T^*}{\partial q^i} - Q_i = \sum_{1}^{n}{}_{j,\,l} N_{ijl}(q^1, \ldots, q^n)\, q^{\cdot j} q^{\cdot l} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Здесь T^* и правая часть i-го уравнения (1.2) получаются подстановкой соответственно в T и

$$\sum_{1}^{n}{}_{l} \sum_{n+1}^{m}{}_{\alpha} \frac{\partial T}{\partial q^{\cdot\alpha}} \left(\frac{\partial B_i^\alpha}{\partial q^l} - \frac{\partial B_l^\alpha}{\partial q^i} \right) q^{\cdot l}$$

выражений (1.1) вместо $q^{\cdot\alpha}$ $(\alpha = n+1, \ldots, m)$. Очевидно

$$(1.3)\qquad \sum_{1}^{n}{}_{i,j,l} N_{ijl} v^i v^j v^l \equiv 0$$

для произвольного n-вектора (v^i).

Пусть подмножество конфигурационного многообразия системы, заданное локально уравнениями $q^{n+1} = \ldots = q^m = 0$, является подмногообразием. Обозначим его через X_n. Введением метрики

$$(1.4)\qquad ds^2 = 2T^* dt^2 = a_{ij} dq^i dq^j \quad (\| a^{ij} \| = \| a_{ij} \|^{-1})$$

превратим X_n в риманово многообразие. В формуле (1.4) и последующих знак суммы опущен, но суммирование подразумевается по повторяющимся индексам в пределах от 1 до n.

Предположим, что уравнения (1.2) допускают первый интеграл (общий) вида

$$\xi_i\,(q^1,\ldots,\ q^n)\dot q^i = \mathrm{const} \tag{1.5}$$

Продифференцировав (1.5) по времени в силу уравнений (1.2) и приравняв нулю в полученном выражении коэффициенты при обобщенных скоростях, придем к уравнениям

$$\xi_{rk} + \xi_{kr} + \xi^i(N_{irk} + N_{ikr}) = 0 \quad (r,\ k = 1,\ldots,\ n) \tag{1.6}$$

$$\xi_i Q^i = 0 \tag{1.7}$$

относительно неизвестных функций $\xi_1,\ldots,\ \xi_n$ (через ξ_{rk} обозначены ковариантные производные). Векторное поле (ξ_i) определяет в X_n конгруенцию линий, дифференциальные уравнения которой можно записать так:

$$dq^i/ds = \tau^i\,(q^1,\ldots,\ q^n) \quad (i = 1,\ldots,\ n) \tag{1.8}$$

где

$$\xi_i = \rho\tau_i,\quad \rho^2 = a^{ij}\xi_i\xi_j \quad (i = 1,\ldots,\ n) \tag{1.9}$$

Подстановкой (1.9) в уравнения (1.6) и (1.7) представим эти уравнения в эквивалентной форме

$$\rho\,(\tau_{rk} + \tau_{kr}) + \rho_k\tau_r + \rho_r\tau_k + \rho\tau^i\,(N_{irk}+N_{ikr}) = 0 \quad (r, k = 1,\ldots, n) \tag{1.10}$$

$$\tau_i Q^i = 0 \quad (\rho_k = \partial\rho/\partial q^k) \tag{1.11}$$

Если умножить (1.10) на $\tau^r\tau^k$ и просуммировать по всем значениям r, $k = 1,\ldots,\ n$, получим с учетом условий (1.3) и

$$\tau_{rk}\tau^r\tau^k = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(\tau_r\tau^r) = 0$$

что соотношение $\rho = \mathrm{const}$ — интеграл уравнений (1.8). Из уравнений (1.10) тогда следует

$$\mu_k + \tau^i\tau^r\,(N_{irk} + N_{ikr}) = \partial\varkappa/\partial q^k,\quad \varkappa = -\ln\rho \quad (k = 1,\ldots, n) \tag{1.12}$$

где величины $\mu_k = \tau_{kr}\tau^r$, рассматриваемые вдоль произвольной линии конгруенции (1.8) — компоненты вектора первой геодезической кривизны этой линии.

В случае голономных связей (1.1) тензор (N_{ijl}) равен нулю, (ξ_i) — вектор Киллинга, решение уравнений (1.8) дает траектории однопараметрической группы движений в римановом многообразии $(X_n,\ ds^2)$, а соотношения (1.12) выражают известный факт ([3], стр. 608), что конгруенция линий кривизны указанных траекторий является нормальной.

2. Положим $n = 2$. Наряду с конгруенцией (1.8) рассмотрим ортогональную к ней конгруенцию, единичный вектор которой обозначим (η_i). Так как $\tau^i\eta_i = 0$, то $\tau_{ik}\eta^i = -\tau^i\eta_{ik}$ (η_{ik} — ковариантные производные), поэтому, умножив (1.10) на $\eta^r\eta^k$ и просуммировав по всем значениям r, $k = 1,\ldots,\ n$, получим скалярное равенство

$$\eta_{rk}\eta^k\tau^r = \tau^i\eta^r\eta^k N_{irk} \tag{2.1}$$

Значение левой части (2.1) в некоторой точке $(q^1, q^2) \in X_2$ равняется кривизне (со знаком) линии вспомогательной конгруенции, проходящей через эту точку.

Очевидно, соотношения (1.12) и (2.1) эквивалентны (1.10). Следовательно, доказана

Теорема. При $n = 2$ уравнения (1.2) допускают интеграл (1.5) тогда и только тогда, когда вектор с компонентами (1.12) потенциальный и выполняются условия (1.11) и (2.1).

Если $a^{ij}Q_iQ_j \neq 0$, то соотношение (1.11) однозначно определяет обе рассмотренные конгруенции и теорема дает в конструктивной форме критерий существования линейного первого интеграла уравнений Чаплыгина. В случае голономных связей (1.1) условия теоремы приводятся к следующим двум: равенство (2.1) показывает, что силовые линии суть геодезические, а из соотношений (1.12) следует, что кривизна каждой линии, ортогональной к силовым, остается постоянной вдоль этой линии. Как известно [4], оба этих условия необходимы и достаточны для существования линейного первого интеграла уравнений Лагранжа.

Пример. Рассмотрим задачу о плоском неголономном движении [5]. Твердое тело опирается на плоскость Oxy тремя точками: две из них представляют свободно скользящие ножки, а третья — точку C прикосновения режущего колесика, фиксированного в теле. Колесико не может скользить в направлении, перпендикулярном к его плоскости. Введем прямоугольную систему координат $C\xi\zeta$, жестко связанную с телом. Оси $C\xi$ и $C\zeta$ параллельны плоскости Oxy, ось $C\xi$ направлена вдоль режущего колесика. Пусть $(x, y, 0)$ — координаты точки C в неподвижной системе Oxy, $(0, \zeta)$ — координаты центра масс тела в системе $C\xi\zeta$, φ — угол между осями $C\xi$ и Ox, масса тела $M = 1$, J — центральный момент инерции относительно перпендикуляра к плоскости Oxy. Допустим, что активные внешние силы приводятся к результирующей, параллельной $C\zeta$, и к паре, момент которой относительно оси Oz $H(\varphi) \neq 0$. Уравнение связи имеет вид

$$x^{\cdot} \sin\varphi - y^{\cdot} \cos\varphi = 0 \tag{2.2}$$

Конфигурационное многообразие системы есть прямое произведение плоскости R^2 и окружности. Данное многообразие покрывается, например, четырьмя координатными окрестностями

$$U_1 = R^2 \times \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), \quad U_2 = R^2 \times \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right), \quad U_3 = R^2 \times \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$U_4 = R^2 \times \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$$

Рассуждения следует провести для точек каждого из множеств U_h в отдельности, но эти рассуждения сходны, поэтому ограничимся только точками координатной окрестности U_1.

В U_1 уравнение (2.2) можно записать в виде $y^{\cdot} = x^{\cdot}\operatorname{tg}\varphi$. Кинетическая энергия тела

$$T = {}^1/_2\,[(x^{\cdot} - \varphi^{\cdot}\zeta\cos\varphi)^2 + (y^{\cdot} - \varphi^{\cdot}\zeta\sin\varphi)^2] + {}^1/_2 J\varphi^{\cdot 2}$$

В качестве обобщенных координат удобно взять абсциссу центра масс $q^1 = x - \zeta\sin\varphi$ и угол $q^2 = \varphi$. Имеем

$$y^{\cdot} = q^{\cdot 1}\operatorname{tg} q^2 + q^{\cdot 2}\zeta\sin q^2, \quad Q^1 = 0, \quad Q^2 = H(q^2)$$

система чаплыгинская. Согласно (1.4)

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 q^2}(dq^1)^2 + J(dq^2)^2$$

Символы Кристоффеля

$$\Gamma_{12}{}^1 = \Gamma_{21}{}^1 = \operatorname{tg} q^2, \quad \Gamma_{11}{}^2 = -\frac{\sin q^2}{J \cos^3 q^2}$$

остальные равны нулю. Компоненты тензора

$$N_{112} = N_{121} = \frac{\sin q^2}{2\cos^3 q^2}, \quad N_{211} = -\frac{\sin q^2}{\cos^3 q^2}$$

остальные равны нулю. Из условия (1.11) находим $\tau_1 = 1/\cos q^2$, $\tau_2 = 0$ и $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = \sqrt{J}$. Следовательно, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = -\operatorname{tg} q^2$ и вектор, компонентами которого служат левые части уравнений (1.12), равен нулю, т. е. $\rho \equiv \text{const}$. С другой стороны, кривизна силовых линий $\eta_{rk}\eta^k\tau^r = 0$, что совпадает с выражением в правой части (2.1). Таким образом, уравнения движения тела имеют интеграл

$$q^{\cdot 1}/\cos q^2 = \text{const}$$

который означает, что модуль скорости центра масс тела сохраняет постоянную величину.

3. При $n = 2$ соотношения (1.11) и (2.1) представляют собой необходимые и достаточные условия, чтобы уравнения (1.2) допускали частный интеграл вида

$$\tau_i q^{\cdot i} = 0 \tag{3.1}$$

Действительно, по определению частного интеграла имеем

$$(\tau_{rk} + \tau^i N_{irk}) q^{\cdot r} q^{\cdot k} + \tau_i Q^i \equiv M \tau_i q^{\cdot i} \tag{3.2}$$

где в левой части стоит полная производная от (3.1) по времени, вычисленная в силу уравнений (1.2), а множитель M $(q, q^{\cdot})$ правой части неизвестен заранее. Понятно, что множитель M может быть только вида $\nu_l q^{\cdot l}$, в котором ν_l — неизвестные функции переменных $q^1, \ldots, q^n$. Тождество (3.2) приводит к уравнениям (1.11) и

$$\tau_{rk} + \tau_{kr} + \tau^i (N_{irk} + N_{ikr}) = \nu_r \tau_k + \nu_k \tau_r \quad (r, k = 1, 2) \tag{3.3}$$

Положим $\omega_1 = \nu_r \eta^r$, $\omega_2 = \nu_r \tau^r$ (η^r — компоненты единичного вектора конгруенции силовых линий). Число уравнений (3.3) равно трем. Свертывая эти уравнения с $\tau^r\tau^k$, $\tau^r\eta^k$, $\eta^r\eta^k$, получим соответственно два уравнения:

$$\omega_2 = 0, \; \omega_1 = \tau_{kr}\tau^r\eta^k + \tau^i\tau^r\eta^k (N_{irk} + N_{ikr})$$

и равенство (2.1), что и требовалось доказать.

4. Заметим, что в рассуждениях нигде не использовались конкретные аналитические выражения для тензоров (a_{ij}) и (N_{ijk}), а только знакоопределенность матрицы $\|a_{ij}\|$ и равенство (1.3). Следовательно, все полученные результаты остаются справедливыми также для голономных систем, подверженных действию квадратичных по скоростям сил, которые обладают свойством (1.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости.— В кн.: Тр. Отд. физ. наук Моск. общ. любителей естеств., антроп. и этногр., 1897, т. 9, № 1, с. 10—16. Собр. соч. Т. 1. М.— Л.: Гостехиздат, 1948, с. 57—75.
2. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.

3. *Ricci G., Levi-Civita T.* Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications.— Math. Ann., 1901, B. 54, S. 128—201, 608.
4. *Synge J. L.* On the geometry of dynamics.—Philos. Trans. Roy. Soc. London, A, 1926, v. 226. No 637, p. 31—106.
5. *Чаплыгин С. А.* К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе.— Матем. сб., 1911, т. 28, № 2, с. 303—314. Собр. соч. Т. 1. М.— Л.: Гостехиздат, 1948, с. 15—25.

Москва

Поступила в редакцию
29.IX.1980