Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 3, 1981

УДК 531.36

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЛЕВИ-ЧИВИТА НА НЕГОЛОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ

Каподанно П.

Теорема Леви-Чивита о стационарных решениях автономной канонической системы, которая допускает инвариантные соотношения, находящиеся в инволюции, распространяется на неголономные системы с не зависящими от времени связями. Этот результат получен с использованием канонической формы уравнений Воронца. Приводится пример. Показано, что теорема может быть распространена на гироскопические системы.

1. Каноническая форма уравнений Воронца. Рассмотрим материальную систему, положение которой определяется n лагранжевыми координатами q_j, на которую действуют силы, производные от функции $U(q_1, \ldots, q_n)$, и наложены неголономные связи

$$q_r^{\cdot} = \sum_{i=1}^{k} b_{ri}(q_1, \ldots, q_n)\, q_i^{\cdot} \quad (k < n, \quad r = k+1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Обозначим через $T(q_i, q_r, q_i^{\cdot}, q_r^{\cdot})$ кинетическую энергию системы и положим

$$\Theta(q_i, q_r, q_i^{\cdot}) = T\left(q_i, q_r, q_i^{\cdot}, \sum_{l=1}^{k} b_{rl} q_l^{\cdot}\right) (i = 1, \ldots, k, r = k+1, \ldots, n)$$

Известно, что уравнения движения получаются добавлением к уравнениям (1.1) уравнений Воронца [1]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial q_i^{\cdot}}\right) - \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial q_i} - \sum_{r=k+1}^{n} \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial q_r} b_{ri} = \tag{1.2}$$

$$= \sum_{r=k+1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_r^{\cdot}} \sum_{l=1}^{k} A_{il}^{(r)} q_l^{\cdot} \quad (i = 1, \ldots, k)$$

$$A_{il}^{(r)} = \frac{\partial b_{ri}}{\partial q_l} + \sum_{s=k+1}^{n} \frac{\partial b_{ri}}{\partial q_s} b_{sl} - \frac{\partial b_{rl}}{\partial q_i} - \sum_{s=k+1}^{n} \frac{\partial b_{rl}}{\partial q_s} b_{si}$$

где производные $\partial T / \partial q_r^{\cdot}$ выражены через q_i, q_r, $q_i^{\cdot}$; величины $A_{il}^{(r)}$ антисимметричны по индексам i и l.

Положив

$$L(q_i, q_r, q_i^{\cdot}) = \Theta + U, \ p_i = \partial L / \partial q_i^{\cdot}$$

$$H(q_i, q_r, p_i) = \sum_{i=1}^{k} p_i q_i^{\cdot} - L(q_i, q_r, q_i^{\cdot})$$

запишем уравнения Воронца в канонической форме

$$dq_i/dt = \partial H/\partial p_i \quad (i = 1, \ldots, k) \tag{1.3}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_{r=k+1}^{n} b_{ri}\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{r=k+1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_r^{\boldsymbol{\cdot}}} \sum_{l=1}^{k} A_{il}^{(r)} \frac{\partial H}{\partial p_l}$$

Здесь производные $\partial T/\partial q_r^{\boldsymbol{\cdot}}$ выражены через q_i, q_r, p_i. К (1.3) необходимо присоединить уравнения связей

$$q_r^{\boldsymbol{\cdot}} = \sum_{i=1}^{k} b_{ri}(q_1, \ldots, q_n)\frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (r = k+1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

В дальнейшем символом D/Dt будем обозначать производную по времени в силу системы (1.3), (1.4).

Замечания. 1°. Функция H является первым интегралом системы (1.3), (1.4). Действительно, принимая во внимание (1.4) и антисимметричность величин $A_{il}^{(r)}$, имеем $DH/Dt = 0$.

2°. Необходимое и достаточное условие того, чтобы функция $\varphi(q_i, q_r, p_i)$ представляла собой первый интеграл системы (1.3), (1.4), имеет вид

$$(\varphi, H)_k + \sum_{i=1}^{k}\sum_{r=k+1}^{n} b_{ri}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_r}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_r}\right) + \tag{1.5}$$
$$+ \sum_{r=k+1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial T}{\partial q_r^{\boldsymbol{\cdot}}} A_{il}^{(r)}\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial p_l} = 0$$
$$(\varphi, H)_k = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)$$

3°. Условиями стационарности H являются

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial q_r} = 0 \quad (i = 1, \ldots, k, r = k+1, \ldots, n)$$

Видно, что эти соотношения образуют множество инвариантных соотношений для системы (1.3), (1.4). Действительно, непосредственно проверяется, что

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right), \quad \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right), \quad \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_r}\right)$$

— линейные комбинации $\partial H/\partial q_i$, $\partial H/\partial p_i$, $\partial H/\partial q_r$ и, следовательно, обращаются в нуль вместе с ними.

2. Распространение теоремы Леви-Чивита на неголономные системы. Леви-Чивита показал [2, 3], что если автономная каноническая система допускает m инвариантных соотношений (соответственно m первых интегралов), которые находятся в инволюции, то она обладает ∞^m(соответственно ∞^{2m}) частными решениями (которые называются стационарными), получаемыми в результате интегрирования системы m дифференциальных уравнений первого порядка в нормальной форме. Распространим эту теорему на систему (1.3), (1.4).

Предположим, что система (1.3), (1.4) допускает m не зависящих от времени t инвариантных соотношений

$$f_u(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_k) = 0 \quad (u = 1, \ldots, m,\ m < k)$$

которые удовлетворяют условиям, аналогичным (1.5)

$$(2.1)\qquad (f_u, f_v)_k + \sum_{r=k+1}^{n}\sum_{i=1}^{k} b_{ri}\left(\frac{\partial f_u}{\partial q_r}\frac{\partial f_v}{\partial p_i} - \frac{\partial f_u}{\partial p_i}\frac{\partial f_v}{\partial q_r}\right) +$$
$$+\sum_{r=k+1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial T}{\partial q_r}A_{il}^{(r)}\frac{\partial f_u}{\partial p_i}\frac{\partial f_v}{\partial p_l} = 0 \quad (u, v = 1, \ldots, m)$$

Допустим, что m инвариантных соотношений разрешимы относительно $p_1, \ldots, p_m$

$$(2.2)\qquad p_\alpha - \varphi_\alpha(q_1, \ldots, q_n, p_{m+1}, \ldots, p_k) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

С учетом соотношений

$$\frac{\partial f_u}{\partial q_s} + \sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\partial f_u}{\partial p_\alpha}\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q_s} = 0 \quad (u = 1, \ldots, m, \quad s = 1, \ldots, n)$$

$$\frac{\partial f_v}{\partial p_h} + \sum_{\beta=1}^{m}\frac{\partial f_v}{\partial p_\beta}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_h} = 0 \quad (v = 1, \ldots, m, \quad h = m + 1, \ldots, k)$$

условия (2.1) преобразуются к виду

$$\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m}\frac{\partial f_u}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f_v}{\partial p_\beta}F_{\alpha\beta}(q_1, \ldots, q_n, p_{m+1}, \ldots, p_k) = 0$$

Так как, по предположению, функциональный определитель функций f_u по отношению к p_α отличен от нуля, то эти условия приводятся к

$$F_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

Используя явные выражения для $F_{\alpha\beta}$, представим условия (2.1) в форме

$$(2.3)\qquad \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q_\beta} - \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_\alpha} + \{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\} - \sum_{r=k+1}^{n}\left(b_{r\alpha}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_r} - b_{r\beta}\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q_r}\right) -$$
$$-\sum_{r=k+1}^{n}\sum_{h=m+1}^{k} b_{rh}\left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q_r}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial p_h} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial p_h}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_r}\right) -$$
$$-\sum_{r=k+1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_r}\left[A_{\alpha\beta}^{(r)} - \sum_{h=m+1}^{k}\left(A_{\alpha h}^{(r)}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial p_h} + A_{h\beta}^{(r)}\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial p_h}\right) +\right.$$
$$\left.+\sum_{h=m+1}^{k}\sum_{j=m+1}^{k} A_{hj}^{(r)}\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial p_h}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial p_j}\right] = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

$$\{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\} = \sum_{h=m+1}^{k}\left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial p_h}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial p_h} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q_h}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial p_h}\right)$$

Продифференцируем инвариантные соотношения $p_\alpha = \varphi_\alpha = 0$ по времени в силу уравнений (1.3), (1.4). Получим

$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} + \{H, \varphi_\alpha\} + \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q_\beta} \frac{\partial H}{\partial p_\beta} + \sum_{r=k+1}^{n} \left(b_{r\alpha} - \sum_{h=m+1}^{k} b_{rh} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial p_h}\right) \frac{\partial H}{\partial q_r} + \sum_{r=k+1}^{n} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q_r} \left[\sum_{\beta=1}^{m} b_{r\beta} \frac{\partial H}{\partial p_\beta} + \sum_{h=m+1}^{k} b_{rh} \frac{\partial H}{\partial p_h}\right] + \sum_{r=k+1}^{n} \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \left(\sum_{h=m+1}^{k} A_{hl}^{(r)} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial p_h} - A_{\alpha h}^{(r)}\right) \frac{\partial H}{\partial p_l} = 0 \tag{2.4}$$

$$(\alpha = 1, \ldots, m)$$

Обозначив

$K(q_1, \ldots, q_n, p_{m+1}, \ldots, p_k) = H(q_1, \ldots, q_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_m, p_{m+1}, \ldots, p_k)$ получим

$$\frac{\partial K}{\partial q_\omega} = \frac{\partial H}{\partial q_\omega} + \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial p_\beta} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_\omega} \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial K}{\partial p_h} = \frac{\partial H}{\partial p_h} + \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial p_\beta} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial p_h}$$

$$(\omega = 1, \ldots, n, \; h = m+1, \ldots, k)$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial K}{\partial q_\alpha} + \{K, \varphi_\alpha\} = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} + \{H, \varphi_\alpha\} + \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial p_\beta} \left[\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial p_\alpha} - \{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\}\right]$$

$$(\alpha = 1, \ldots, m)$$

так что соотношения (2.4) с учетом (2.3) и (2.5) примут вид

$$\frac{\partial K}{\partial q_\alpha} + \{K, \varphi_\alpha\} + \sum_{r=k+1}^{n} \left(b_{r\alpha} - \sum_{h=m+1}^{k} b_{rh} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial p_h}\right) \frac{\partial K}{\partial q_r} + \sum_{r=k+1}^{n} \sum_{h=m+1}^{k} b_{rh} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q_r} \frac{\partial K}{\partial p_h} - \sum_{r=k+1}^{n} \sum_{h=m+1}^{k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \times \left[A_{\alpha h}^{(r)} - \sum_{j=m+1}^{k} A_{jh}^{(r)} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial p_j}\right] \frac{\partial K}{\partial p_h} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, m) \tag{2.6}$$

где предполагается, что коэффициенты выражены через $q_1, \ldots, q_n, p_{m+1}, \ldots, p_k$ при помощи (1.4) и (2.2). Таким образом, функция K удовлетворяет системе уравнений с частными производными (2.6).

Покажем, что система, составленная из уравнений (2.2) и уравнений

$$\frac{\partial K}{\partial p_j} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial q_j} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial q_r} = 0 \tag{2.7}$$

$$(j = m+1, \ldots, k, \quad r = k+1, \ldots, n)$$

представляет собой множество инвариантных соотношений для системы (1.3), (1.4).

Во-первых, имеем, используя (2.5)

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial K}{\partial p_j}\right)=\left\{K,\frac{\partial K}{\partial p_j}\right\}+\sum_{r=k+1}^{n}\sum_{h=m+1}^{k}b_{rh}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial p_j\partial q_r}\frac{\partial K}{\partial p_h}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^2 K}{\partial p_j\partial p_h}\frac{\partial K}{\partial q_r}\right)+\sum_{r=k+1}^{n}\sum_{h=m+1}^{k}\sum_{s=m+1}^{k}\frac{\partial T}{\partial q_r}\cdot A_{hs}^{(r)}\frac{\partial^2 K}{\partial p_j\partial p_h}\frac{\partial K}{\partial p_s}+$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\left[\frac{\partial^2 K}{\partial p_j\partial q_\alpha}-\left\{\varphi_\alpha\frac{\partial K}{\partial p_j}\right\}+\sum_{r=k+1}^{n}\frac{\partial^2 K}{\partial p_j\partial q_r}\times\right.$$
$$\times\left(b_{r\alpha}-\sum_{h=m+1}^{k}b_{rh}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial p_h}\right)+\sum_{r=k+1}^{n}\sum_{h=m+1}^{k}b_{rh}\frac{\partial^2 K}{\partial p_j\partial p_h}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial q_r}+$$
$$\left.+\sum_{r=k+1}^{n}\sum_{h=m+1}^{k}\frac{\partial T}{\partial q_r}\cdot\left[A_{h\alpha}^{(r)}-\sum_{s=m+1}^{k}A_{hs}^{(r)}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial p_s}\right]\frac{\partial^2 K}{\partial p_j\partial p_h}\right]$$

Дифференцируя по p_j систему уравнений (2.6), находим, что коэффициент при $\partial H/\partial p_\alpha$ представляет собой линейную комбинацию частных производных первого порядка от K; окончательно получим

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial K}{\partial p_i}\right)=\left\{K,\frac{\partial K}{\partial p_j}\right\}+\sum_r\sum_h b_{rh}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial p_j\partial q_r}\frac{\partial K}{\partial p_h}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^2 K}{\partial p_j\partial p_h}\frac{\partial K}{\partial q_r}\right)+\sum_r\sum_h\sum_s\frac{\partial T}{\partial q_r}\cdot A_{hs}^{(r)}\frac{\partial^2 K}{\partial p_j\partial p_h}\frac{\partial K}{\partial p_s}+$$
$$+\sum_\alpha\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\left[\left\{\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial p_j},K\right\}-\sum_r\frac{\partial}{\partial p_j}\left[b_{r\alpha}-\sum_h b_{rh}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial p_h}\right]\frac{\partial K}{\partial q_r}-\right.$$
$$-\sum_r\sum_h\frac{\partial}{\partial p_j}\left(b_{rh}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial q_r}\right)\frac{\partial K}{\partial p_h}+$$
$$\left.+\sum_r\sum_h\frac{\partial}{\partial p_j}\left[\frac{\partial T}{\partial q_r}\cdot\left(A_{\alpha h}^{(r)}-\sum_s A_{hs}^{(r)}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial p_s}\right)\right]\frac{\partial K}{\partial p_h}\right]$$

Таким образом, $(D/Dt)\ (\partial K/\partial p_j)$ — линейная комбинация $\partial K/\partial p_j$, $\partial K/\partial q_j$, $\partial K/\partial q_r$ ($j=m+1,\ldots,k$; $r=k+1,\ldots,n$) и, следовательно, обращается в нуль вместе с ними. Аналогично показывается равенство нулю производных $(D/Dt)\ (\partial K/\partial q_j)$ и $(D/Dt)\ (\partial K/\partial q_r)$, что и доказывает результат. Из уравнений (2.6) тогда следует, что уравнения (2.7) дают $\partial K/\partial q_\alpha = 0$ ($\alpha=1,\ldots,m$), так что $n+k-2m$ соотношений (2.7) представляют собой условия стационарности K.

Итак, если система (1.3), (1.4) допускает m инвариантных соотношений, разрешимых относительно $p_1,\ldots,p_m$ и удовлетворяющих условиям (2.1) или (2.3), то $n+k$ условий стационарности H приводятся к $n+k-2m$ уравнениям (2.7).

Предположим, что соотношения (2.7) разрешимы относительно $q_{m+1},\ldots,q_k, q_{k+1},\ldots,q_n, p_{m+1},\ldots,p_k$. Тогда уравнения (2.2) и (2.7) позволяют выразить эти переменные в функции от $q_1,\ldots,q_m$.

Разделим систему (1.3), (1.4) на две части

$$\begin{cases} \dfrac{dq_h}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p_h} \quad (h=m+1,\ldots,k); \quad \dfrac{dp_i}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial q_i}- \\ \qquad\qquad -\sum\limits_r b_{ri}\dfrac{\partial H}{\partial q_r}+\sum\limits_r\sum\limits_l \dfrac{\partial T}{\partial q_r^{\cdot}}A_{il}^{(r)}\dfrac{\partial H}{\partial p_l} \\ q_r^{\cdot}=\sum\limits_r b_{ri}\dfrac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i=1,\ldots,k;\ r=k+1,\ldots,n) \end{cases}$$

$$\left\{\dfrac{dq_\alpha}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \quad (\alpha=1,\ldots,m)\right.$$

Первые $2n-m$ уравнений необходимо удовлетворяются рассматриваемыми значениями $q_{m+1},\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_k$; заменяя их в $\partial H/\partial p_\alpha$ функциями от $q_1,\ldots,q_m$, получим систему дифференциальных уравнений первого порядка в нормальной форме, которая служит для нахождения $q_1,\ldots$ $\ldots,q_m$ как функций от t и m постоянных интегрирования. Если какое-нибудь инвариантное соотношение заменить первым интегралом, то появится новая постоянная.

Итак, получено следующее распространение теоремы Леви-Чивита на неголономные системы.

Теорема. Если система (1.3), (1.4) допускает m инвариантных соотношений (соответственно m первых интегралов), разрешимых относительно m параметров $p_1,\ldots,p_m$ и удовлетворяющих условиям (2.1) или (2.3), то она имеет ∞^m (соответственно ∞^{2m}) частных решений, определяемых системой m уравнений первого порядка в нормальной форме.

В случае, когда имеется только одно инвариантное соотношение ($m=1$), очевидно, условия (2.1) или (2.3) заведомо выполняются.

3. Пример. Рассмотрим тяжелую сферу радиуса a с массой m. Центр тяжести G сферы совпадает с ее геометрическим центром, а распределение массы обладает осевой симметрией относительно диаметра Gz. Пусть C — момент инерции сферы относительно Gz, A — момент инерции относительно диаметра, перпендикулярного к Gz. Сфера катится без скольжения по горизонтальной плоскости $x_1O_1y_1$; обозначим через O_1z восходящую вертикаль с единичным вектором $\mathbf{z}_1$. Параметрами являются координаты x, y точки G и углы Эйлера θ, φ, ψ.

Обозначим через $\mathbf{V}_G$ скорость точки G, через Ω и σ — мгновенную угловую скорость сферы и ее кинетический момент относительно точки G. Уравнениями движения являются

(3.1) $$\mathbf{V}_G=a\Omega\times\mathbf{z}_1$$

(3.2) $$\sigma+ma^2\mathbf{z}_1\times(\Omega\times\mathbf{z}_1)=\mathbf{c}$$

где $\mathbf{c}$ — векторная постоянная интегрирования. Интеграл энергии имеет вид

$$\sigma\cdot\Omega+ma^2(\Omega\times\mathbf{z}_1)^2=h$$

Комбинируя его с уравнением (3.2), получим

(3.3) $$\Omega\cdot\mathbf{c}=h$$

Пусть $(c_0, 0, c_1)$ — компоненты $\mathbf{c}$ (вторую компоненту можно взять равной нулю при соответствующем выборе оси O_1x_1). Соотношение (3.3), представленное в виде

(3.4) $$f\equiv c_0(\theta^{\cdot}\cos\psi+\varphi^{\cdot}\sin\theta\sin\psi)+c_1(\psi^{\cdot}+\varphi^{\cdot}\cos\theta)-h=0$$

используем в качестве инвариантного соотношения.

Известно [4, 5], что интегрирование задачи приводится к квадратурам. Покажем, что приведенная выше теорема позволяет получить частные решения.

Уравнение (3.1) дает

(3.5) $$x^{\cdot} - a(\theta^{\cdot} \sin\psi - \varphi^{\cdot} \sin\theta\cos\psi) = 0,\ y^{\cdot} + a(\theta^{\cdot}\cos\psi + \varphi^{\cdot}\sin\theta\sin\psi) = 0$$

так что

$$2\Theta = (A + ma^2)\theta^{\cdot 2} + (A\psi^{\cdot 2} + ma^2\varphi^{\cdot 2})\sin^2\theta + C(\psi^{\cdot}\cos\theta + \varphi^{\cdot})^2$$

(В данном случае уравнения Воронца становятся уравнениями Чаплыгина [1].)

Обозначая через p_θ, p_φ, p_ψ переменные, сопряженные с θ, φ, ψ, получаем

$$H = \frac{p_\theta^2}{2(A + ma^2)} + \frac{1}{2\Delta}\{(A\sin^2\theta + C\cos^2\theta)p_\varphi^2 - 2\cos\theta p_\varphi p_\psi + {}$$
$$+ (C + ma^2\sin^2\theta)p_\psi^2$$
$$\Delta = [CA + ma^2(A\sin^2\theta + C\cos^2\theta)]\sin^2\theta$$

а (3.4) принимает вид

(3.6) $$f \equiv \frac{1}{\Delta}\{(c_0\sin\theta\sin\psi + c_1\cos\theta)[(A\sin^2\theta + C\cos^2\theta)p_\varphi - C\cos\theta p_\psi] + {}$$
$$+ c_1[-C\cos\theta p_\varphi + (C + ma^2\sin^2\theta)p_\psi]\} + \frac{c_0 p_\theta\cos\psi}{A + ma^2} - h = 0$$

Условия стационарности H при условии (3.6) записываются в символической форме $\delta H - \lambda\delta f = 0$, где λ — неопределенный множитель. Отсюда

(3.7) $$-\theta^{\cdot}\sin\psi + \varphi^{\cdot}\sin\theta\cos\psi = 0$$

(3.8) $$p_\theta = \lambda c_0\cos\psi,\quad p_\varphi = \lambda(c_0\sin\theta\sin\psi + c_1\cos\theta),\quad p_\psi = \lambda c_1$$

Записав (3.2) в проекции на ось O_1y_1, с учетом (3.7) находим

(3.9) $$\psi^{\cdot}\cos\theta + \varphi^{\cdot} = 0$$

Из (3.9) следует, что

$$p_\varphi = ma^2\sin^2\theta\varphi^{\cdot},\quad p_\psi = A\sin^2\theta\psi^{\cdot}$$

Поэтому, используя (3.8), имеем

$$\frac{p_\varphi}{p_\psi} = \frac{ma^2}{A}\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{c_0}{c_1}\sin\theta\sin\psi + \cos\theta$$

и, наконец, учитывая (3.9), получим

(3.10) $$\operatorname{tg}\theta = \frac{\gamma}{\sin\psi}\quad \left(\gamma = -\frac{A + ma^2}{A}\frac{c_1}{c_0}\right)$$

Соотношения (3.9) и (3.10) дают

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \pm\frac{\sin\psi}{\sqrt{\gamma^2 + \sin^2\psi}}$$

поэтому (Φ — постоянная интегрирования)

(3.11) $$\cos(\varphi - \Phi) = \frac{\cos\psi}{\sqrt{\gamma^2 + 1}}$$

Дифференцируя (3.10) по времени, получаем

$$\theta^{\cdot} = -\frac{\gamma\cos\psi}{\gamma^2 + \sin^2\psi}\psi^{\cdot}$$

При помощи этого соотношения, а также (3.9) и (3.4) приходим к дифференциальному уравнению относительно ψ

(3.12) $$\frac{\psi^{\cdot}}{\gamma^2 + \sin^2\psi} = h'\quad \left(h' = h\left[c_0\gamma\left(1 + \frac{\gamma^2 A}{A + ma^2}\right)\right]^{-1}\right)$$

Следовательно

$$(3.13)\qquad \operatorname{ctg}\psi = -\sqrt{\frac{\gamma^2+1}{\gamma}}\operatorname{tg}[h'\gamma\sqrt{\gamma^2+1}(t-\tau)]$$

где τ — новая постоянная интегрирования. Условия (3.5) с учетом (3.7), (3.9) и (3.12) принимают вид

$$x^{\cdot} = 0, \quad y^{\cdot} = a\gamma h'$$

т. е. точка G движется равномерно по прямой, параллельной O_1y_1.

Таким образом, указано ∞^5 движений сферы; аналогичные результаты получены Агостинелли [5].

4. Одно обобщение. Покажем теперь, что теорема Леви-Чивита распространяется на материальную систему, положение которой определяется n лагранжевыми координатами $q_1, \ldots, q_n$ и которая подвержена силам, производным от функции $U(q_1, \ldots, q_n)$, а также гироскопическим силам (этот результат получен в [6] для систем менее общего вида и вследствие ошибки в выкладках только для частных случаев).

Движение рассматриваемой системы описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{n} g_{ik} q_k^{\cdot} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

где $L(q_i, q_i^{\cdot})$ — лагранжиан, а g_{ik} — непрерывно дифференцируемые функции от $q_1, \ldots, q_k, q_1^{\cdot}, \ldots, q_k^{\cdot}$, удовлетворяющие условиям $g_{ik} = -g_{ki}$ $(i, k = 1, \ldots, n)$.

Полагая

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}}, \quad H = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i^{\cdot} - L^{\cdot}$$

видим, что уравнения движения можно представить в канонической форме

$$(4.1)\qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{n} g_{ik}\frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (i=1, \ldots, n)$$

где g_{ik} теперь выражены через q_i, p_i.

Предположим, что система (4.1) допускает m не зависящих от времени t инвариантных соотношений

$$f_u(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = 0 \quad (u = 1, \ldots, m < n)$$

удовлетворяющих условиям

$$(4.2)\qquad (f_u, f_v) + \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} g_{rs}\frac{\partial f_u}{\partial p_r}\frac{\partial f_v}{\partial p_s} = 0 \quad (u, v = 1, \ldots, m)$$

где (f_u, f_v) — скобка Пуассона от f_u и f_v.

Проведем выкладки, как в п. 2. Предположим, что m инвариантных соотношений разрешимы относительно $p_1, \ldots, p_m$:

$$(4.3)\qquad p_\alpha - \varphi_\alpha(q_1, \ldots, q_n, p_{m+1}, \ldots, p_n) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

Условия (4.2) принимают вид

$$
(4.4)\qquad \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial q_\beta}-\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\alpha}+\{\varphi_\alpha,\varphi_\beta\}-g_{\alpha\beta}+\sum_{h=m+1}^{n}\left(g_{\alpha h}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial p_h}+g_{h\beta}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial p_h}\right)-
$$

$$
-\sum_{h=m+1}^{n}\sum_{s=m+1}^{n}g_{hs}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial p_h}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial p_s}=0\quad(\alpha=1,\ldots,m)
$$

$$
\{\varphi_\alpha,\varphi_\beta\}=\sum_{j=m+1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial p_j}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_j}-\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial q_j}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial p_j}\right)
$$

Дифференцируя по времени соотношения (4.3), учитывая (4.1) и вводя функцию

$$
K(q_1,\ldots,q_n,p_{m+1},\ldots,p_n)=H(q_1,\ldots,q_n,\varphi_1,\ldots,\varphi_m,p_{m+1},\ldots,p_n)
$$

получаем

$$
(4.5)\qquad \frac{\partial K}{\partial q_\alpha}+\{K,\varphi_\alpha\}-\sum_{j=m+1}^{n}\left[g_{\alpha h}-\sum_{j=m+1}^{n}g_{jh}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial p_j}\right]\frac{\partial K}{\partial p_h}=0
$$

$$
(\alpha=1,\ldots,m)
$$

где $g_{\alpha h}$ и g_{jh} выражены через $q_1,\ldots,q_n,p_{m+1},\ldots,p_n$ при помощи (4.3). Таким образом, K удовлетворяет системе дифференциальных уравнений с частными производными (4.5).

Далее, можно показать, что уравнения (4.3) и уравнения

$$
(4.6)\qquad \partial K/\partial p_j=0,\ \partial K/\partial q_j=0\quad(j=m+1,\ldots,n)
$$

дают множество инвариантных соотношений для системы (4.1). Например, находим

$$
\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial K}{\partial p_j}\right)=\left\{K,\frac{\partial K}{\partial p_j}\right\}+\sum_{h=m+1}^{n}\sum_{s=m+1}^{n}g_{hs}\frac{\partial^2 K}{\partial p_j\partial p_h}\frac{\partial K}{\partial p_s}+
$$

$$
+\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\left[\left\{\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial p_j},K\right\}+\sum_{h=m+1}^{n}\frac{\partial}{\partial p_j}\left(g_{\alpha h}-\sum_{s=m+1}^{n}g_{sh}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial p_s}\right)\frac{\partial K}{\partial p_h}\right]
$$

так что $(D/Dt)\,(\partial K/\partial p_j)$ — линейная комбинация первых частных производных от K.

Из уравнений (4.5) следует, что уравнения (4.6) дают $\partial K/\partial q_\alpha=0$ ($\alpha=1,\ldots,m$). Поэтому условия стационарности K приводятся к $2(n-m)$ условиям (4.6). Предположим, что уравнения (4.6) разрешимы относительно q_h, p_h ($h=m+1,\ldots,n$); тогда уравнения (4.3) и (4.6) позволяют выразить $q_{m+1},\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n$ в виде функций от $q_1,\ldots,q_m$. Внося их в уравнения

$$
dq_\alpha/dt=\partial H/\partial p_\alpha\quad(\alpha=1,\ldots,m)
$$

получаем $q_1,\ldots,q_m$ как функции от t и m постоянных интегрирования.

Теорема. Если система (4.1) допускает m инвариантных соотношений (соответственно m первых интегралов), разрешимых относительно m параметров p_i и удовлетворяющих условиям (4.2) или (4.4), то она имеет ∞^m

(соответственно ∞^{2m}) частных решений, которые получаются в результате интегрирования системы m уравнений первого порядка в нормальной форме.

Эта теорема содержит как частный случай обобщение теоремы Леви-Чивита на неголономные системы, описываемые уравнениями Чаплыгина.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519с.
2. *Levi-Civita T.* Sulla determinazione di soluzioni particolari di un sistema canonico, quando se ne conosce qualche integrale o relazione invariante.— Rend Accad. Lincei, 1901, v. 10, p. 3.
3. *Levi-Civita T., Amaldi V.* Lezioni de Meccanica Razionale. V. 2, pt. 2. Bologna: Zanichelli, 1952. (Рус. перев:. М.: Изд-во иностр. лит., 1951.)
4. *Routh E. J.* The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. New York: Dover, 1955.
5. *Agostinelli C.* Sul moto di rotolamento su un piano orizzontale di una sfera pesante a struttura giroscopica rispetto a un diametro.— Riv. Mat. Univ. Parma, 1952, v. 3, p. 327.
6. *Capodanno P.* Sur deux extensions d'un théorème de Levi-Civita aux systèmes gyroscopiques et quelques applications.— J. Mécanique, 1978, v. 17, No. 3, p. 433.

Франция

Поступила в редакцию
8.IV.1980