Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 3, 1981

УДК 531.36 : 534

УСТОЙЧИВОСТЬ И ВЕТВЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Жупиев А. Л., Михлин Ю. В.

Рассматриваются существенно нелинейные консервативные системы, допускающие одночастотные режимы — нормальные колебания с прямолинейными траекториями. Переход к рассмотрению траекторий в конфигурационном пространстве позволяет во многих случаях упростить исследование орбитальной устойчивости нормальных колебаний. Эта задача сводится в рамках уравнений в вариациях к четырем задачам Штурма — Лиувилля. Для однородных систем определены все точки смены устойчивости нормальных колебаний, которые одновременно являются точками бифуркаций. Исследованы различные типы периодических режимов, ответвляющихся от решений в нормальных формах (как влияющих, так и не влияющих на устойчивость нормальных колебаний). Изучено влияние механических характеристик цепной нелинейной системы с двумя степенями свободы на число форм нормальных колебаний и их устойчивость. Полученные результаты использованы для систем, близких к однородным.

1. Рассмотрим консервативную систему с n степенями свободы, допускающую прямолинейные формы колебаний

$$Mu^{\cdot\cdot} + dV/du = 0 \tag{1.1}$$

$$M = \operatorname{diag}(m_1, m_2, \ldots, m_n), \quad u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T, \quad \frac{d}{du} = \left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_n}\right)$$

Здесь $V = V(u)$ — потенциал системы, который представляет собой аналитическую четную функцию. Прямолинейные нормальные формы системы определяются соотношениями

$$u = Cx(t), \quad C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)^T$$

причем постоянные C_i можно найти из алгебраических уравнений [1], а функцию $x(t)$ — из уравнения

$$x^{\cdot\cdot} + (C, dV(x)/du) = 0$$

Здесь использовано условие нормировки $(C, MC) = 1$.

При исследовании устойчивости нормальных колебаний $u = Cx(t)$ ограничимся соответствующими уравнениями в вариациях

$$M\delta u^{\cdot\cdot} + (d^2V(Cx)/du^2)\delta u = 0$$

Решение уравнений в вариациях будем разыскивать в виде функций от переменной x. В этой системе координат рассматриваемые нормальные колебания описываются прямыми линиями, что позволяет в ряде случаев облегчить исследование устойчивости. Переход к такой системе координат можно назвать геометризацией задачи устойчивости.

Ограничимся рассмотрением систем, которые допускают диагонализацию матрицы $d^2V(x)/du^2$ при помощи какого-либо преобразования $y = P\delta u$, где P — постоянная неособая матрица. Теорема о возможности такой диагонализации доказана ранее [2]. В частности, диагонализация осуществима, если консервативная система, допускающая прямолинейные нормальные формы колебаний, имеет две степени свободы или если система с любым числом степеней свободы относится к классу однородных или симметричных и др.

Теперь система уравнений в вариациях распадается на n независимых уравнений. Одно из уравнений описывает вариации вдоль прямолинейной траектории, другие — в направлениях, ортогональных к такой траектории. С этими последними вариациями связана орбитальная устойчивость нормальных колебаний. Важно подчеркнуть, что каждое уравнение записывается в одной и той же форме

$$2Wy'' + W'y' + Gy = 0, \quad W = (1 - x^2)\overline{W} \tag{1.2}$$

где $\overline{W}$ — аналитическая функция, которая не имеет действительных корней. Здесь для удобства выбран, без уменьшения общности, такой масштаб, чтобы амплитуда порождающего решения была равна единице.

На основании теории Флоке — Ляпунова области устойчивости и неустойчивости решений уравнений в вариациях в пространстве параметров системы разделяются T- и $T/2$-периодическими решениями, ответвляющимися от порождающего решения [3], причем области динамической неустойчивости представляют собой клинышки, стягивающиеся в точки, когда отклонения от порождающего решения стремятся к нулю [4].

Пусть G — функция некоторого числа параметров. Тогда задача определения T- и $T/2$-периодических решений распадается на четыре задачи Штурма — Лиувилля для четных и нечетных функций, регулярных в точках $x = \pm 1$, либо имеющих в этих точках особенность вида $\sqrt{1 - x^2}$.

В частности, если потенциал системы — полином, то каждое уравнение в вариациях представляет собой обобщенное уравнение Ламе, а собственные функции задач Штурма — Лиувилля — это обобщенные функции Ламе.

Периодические решения, ответвляющиеся от нормальных колебаний в точках перехода устойчивости, при изменении параметров системы вновь сливаются с какими-либо нормальными колебаниями, не меняя уже устойчивости этих колебаний. Задача определения таких решений превращается в задачу на собственные значения $S^m = I$, где S — матрица аналитического продолжения общего решения по замкнутому контуру, охватывающему особые точки $x = \pm 1$.

2. Некоторые задачи динамики многослойных конструкций, а также конструкций с вантовыми элементами приводят к рассмотрению однородных систем, допускающих прямолинейные формы колебаний, и систем, близких к однородным. Для однородных систем, потенциал которых — однородная функция порядка p (частным случаем таких систем являются линейные), каждое уравнение в вариациях (1.2) заменой $x^p = z$ приводится к гипергеометрическому уравнению вида

$$y''z(1-z)+\left(\frac{p-1}{p}-\frac{3p-2}{2p}z\right)y'+\frac{\lambda}{2p}y=0 \tag{2.1}$$

Задача устойчивости и ветвления, сформулированная выше для уравнений в вариациях, в данном случае сильно упрощается. Она сводится к нахождению такого значения параметра λ, при котором после обхода замкнутого контура, содержащего особые точки $z = 0$, $z = 1$, решение умножается на $+1$ или -1. Такие решения называются вырожденными решениями и приведены в [5]. Они имеют вид

$$y = z^{\mu_1}(1-z)^{\mu_2}r_n(z)$$

где $r_n(z)$ — полином, μ_1 может принимать значения 0 и $1/p$, μ_2 — значения 0 и $^1/_2$.

По аналогии с уравнением Матье обозначим собственные функции, которые представляют собой полиномы Гегенбауэра, через $C_{4k}(z)$ (четное $T/2$-периодическое решение), $C_{4k+1}(z)$ (нечетное T-периодическое решение), $S_{4k+2}(z)$ (четное T-периодическое решение), $S_{4k+3}(z)$ (нечетное $T/2$-периодическое решение). В линейном случае траектории этих решений представляют собой известные фигуры Лиссажу. Выпишем в том же порядке собственные значения этих задач

$$\lambda_{4k} = k(2kp+p-2),\quad \lambda_{4k+1} = (2k+1)(kp+1)$$
$$\lambda_{4k+2} = (2k+1)(kp+p-1),\quad \lambda_{4k+3} = (k+1)(2kp+p+2)$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots)$$

В качестве примера рассмотрим цепную однородную систему с двумя степенями свободы

$$m_1x_1^{\cdot\cdot} + C_{11}x_1^{p-1} + C_{12}(x_1-x_2)^{p-1} = 0$$
$$m_2x_2^{\cdot\cdot} + c_{22}x_2^{p-1} - c_{12}(x_1-x_2)^{p-1} = 0$$

Уравнение для определения форм колебаний имеет вид

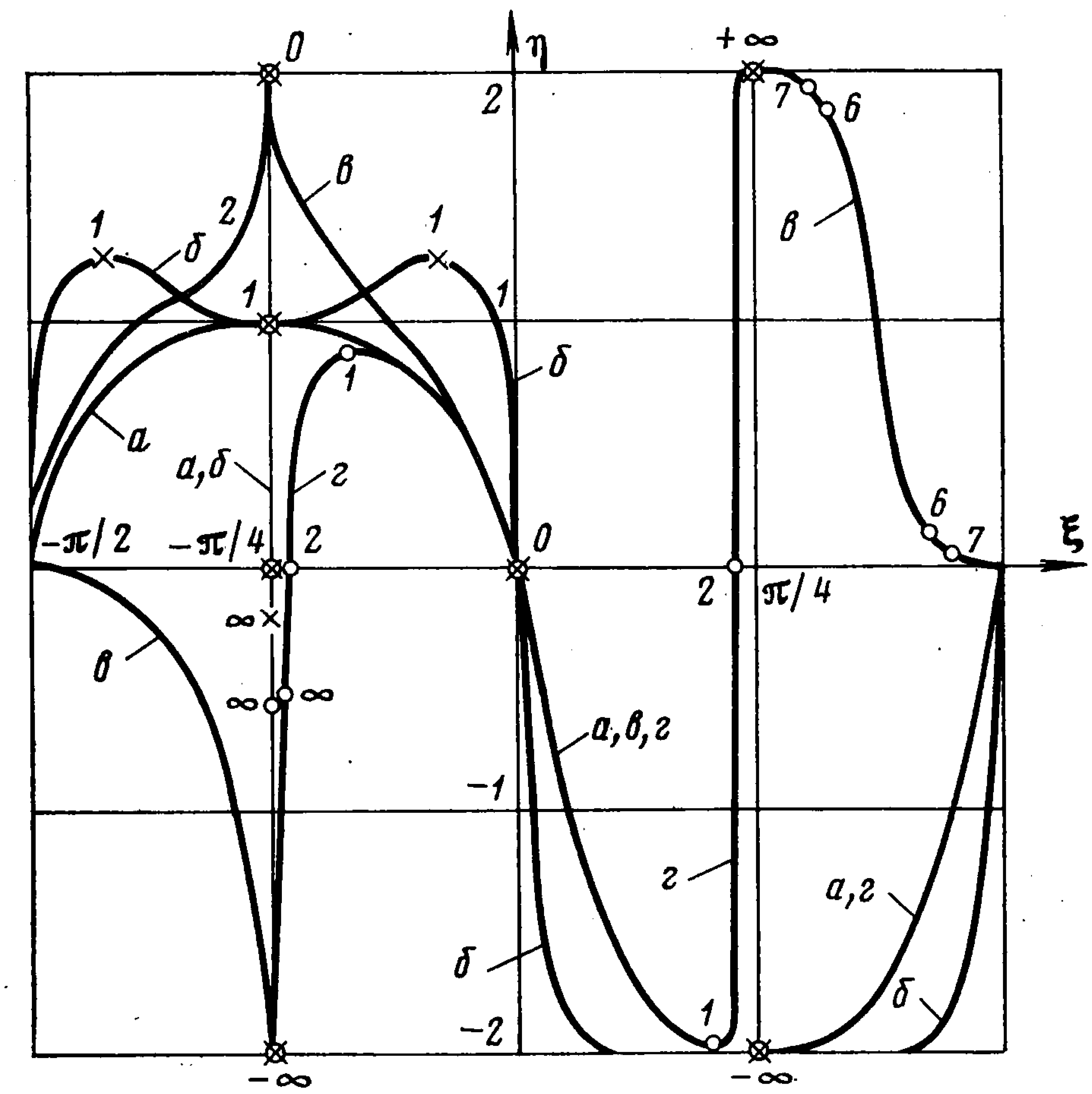
$$\varepsilon = \frac{\alpha\mu^{p-1}-\varkappa\mu}{(1-\mu)^{p-1}(1+\varkappa\mu)}\quad \left(\alpha=\frac{c_{22}}{c_{11}},\quad \varepsilon=\frac{c_{12}}{c_{11}},\right.$$
$$\left.\varkappa=\frac{m_2}{m_1},\quad \mu=\frac{x_2}{x_1}\right)$$

Исследование этого уравнения показывает, что для положительных значений параметра связи ε всегда существует одна синфазная форма колебаний и в зависимости от значения ε и показателя однородности p либо одна, либо три, либо пять антифазных форм. Для отрицательных значений параметра связи ε при любых значениях p существует одна антифазная и либо одна, либо три синфазные формы колебаний.

В этом примере собственное значение гипергеометрического уравнения в вариациях имеет вид

$$\lambda = \frac{(p-1)(1+\varkappa\mu)(\alpha\mu^{p-2}-\varkappa\mu)}{\varkappa(1-\mu)(\alpha\mu^{p-1}+1)}$$

Графики связи между $\eta = 4\pi^{-1} \operatorname{arctg} (\varepsilon \cdot 2^{p-1}/(p-2))$ и $\xi = \operatorname{arctg} \mu$ (фигура) позволяют установить зависимость числа форм от параметров цепной системы. Кривая *а* соответствует случаю $p = 4$, $\alpha = 1$; *б* — $p = 8$, $\alpha = 1$; *в* — $p = 4$, $\alpha = 0$; *г* — $p = 4$, $\alpha = 1,2$ (всюду $\varkappa = 1$). Первые точки смены устойчивости для $p = 4$ отмечены знаком 0; для $p = 8$ — знаком $\times$; число возле точки соответствует номеру собственного значения λ_i. Участки неустойчивости форм колебаний лежат между точками с номерами от $4k + 1$ до $4k + 2$ и от $4k + 3$ до $4k + 4$ ($k = 0, 1,$



$2, \ldots$). В асимметричном случае ($\alpha \neq 1$) некоторые точки ветвления превращаются в предельные точки.

Для нахождения точек ветвления периодических решений, не влияющих на устойчивость нормальных колебаний, выпишем общее решение уравнения в вариациях (2.1)

$y = C_1 u_1 (z) + C_2 z^{1/(p-1)} u_5 (z)$ (вблизи особой точки $z = 0$)
$y = D_1 u_2 (1 - z) + D_2 \sqrt{1 - z}\, u_6 (1 - z)$ (вблизи особой точки $z = 1$)

где C_1, C_2, D_1, D_2 — произвольные постоянные, $u_1 (z)$, $u_2 (1 - z)$, $u_5 (z)$, $u_6 (1 - z)$ — известные гипергеометрические функции [5]. Обозначим через N матрицу, связывающую постоянные C_1, C_2 и D_1, D_2

$$\begin{Vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Vmatrix} = N \begin{Vmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Vmatrix}$$

Можно поставить счетное количество граничных задач

$$(JN^{-1}JN)^m = I \quad (m = 1, 2, \ldots); \quad J = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

для определения ответвляющихся периодических решений, обходящих m раз особые точки $z = 0$ и $z = 1$.

Для собственного значения $\lambda = (p-2)/(p-1)$ такое периодическое решение записывается в явном виде

$$y = C_1(1+\sqrt{1-z^{p-1}})^{1/(p-1)} + C_2 z(1+\sqrt{1-z^{p-1}})^{-1/(p-1)}$$

3. Полученные результаты можно использовать для систем, близких к однородным. Если исключить из рассмотрения значения параметра λ, при которых происходит смена устойчивости порождающих нормальных колебаний, всегда можно построить близкие периодические решения — нормальные колебания с криволинейными траекториями [6]. Периодические решения уравнений в вариациях, разделяющие области устойчивости и неустойчивости, следует искать методом возмущений. В нулевом приближении эти решения описываются собственными функциями гипергеометрического уравнения, соответствующими порождающей однородной системе. Из условий периодичности решений в следующих приближениях определяются точки смены устойчивости.

В качестве примера рассмотрим симметричную цепную систему, потенциал которой содержит члены второй и четвертой степени по переменным x_1 и x_2:

$$\begin{aligned} &mx_1^{\cdot\cdot} + c_{11}x_1 + c_{13}x_1^3 + c_{21}(x_1-x_2) + c_{23}(x_1-x_2)^3 = 0 \\ &mx_2^{\cdot\cdot} + c_{11}x_2 + c_{23}x_2^3 - c_{21}(x_1-x_2) - c_{23}(x_1-x_2)^3 = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Для подобной системы с одним параметром выделена [7] точка бифуркации прямолинейных форм колебаний, которая определяет первую смену устойчивости этих периодических решений.

Уравнение, описывающее антифазную форму колебаний, и уравнение в вариациях, позволяющее судить об орбитальной устойчивости этой формы колебаний, имеют вид

$$u^{\cdot\cdot} + u(\gamma + 2\rho u^2) = 0, \quad v^{\cdot\cdot} + v(\sigma + \beta u^2) = 0$$

$$\gamma = \frac{c_{11}+2c_{21}}{m}, \quad \rho = \frac{c_{13}+8c_{23}}{m}, \quad \sigma = \frac{c_{11}}{m}, \quad \beta = \frac{3c_{13}}{m}$$

$$u = \frac{x_1-x_2}{2}, \quad v = \frac{\delta x_1 + \delta x_2}{2}$$

или (штрих означает дифференцирование по u)

$$v''(\gamma(1-u^2) + \rho(1-u^4)) - v'(\gamma u + 2\rho u^3) + (\sigma + \beta u^2) = 0 \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2) является уравнением Ламе и для определенных соотношений между параметрами σ, β, γ, ρ допускает решения в виде полиномов Ламе или функций Ламе. Если система (3.1) близка к линейной или кубической, то применение указанного выше метода возмущений для определения первых двух точек смены устойчивости (ответвление нормальных колебаний и периодических колебаний с периодом порождающего решения, но сдвинутых по фазе на полпериода) приведет к следующим выражениям:

$$\gamma_0 = \sigma_0, \quad \beta_0 = \rho_0 = 0 \quad \text{или} \quad \gamma_0 = \sigma_0 = 0, \quad \beta_0 = 2\rho_0$$

$$\frac{\gamma_1 - \sigma_1}{\beta_1 - 2\rho_1} = 0{,}75 \quad \text{или} \quad \frac{\gamma_1 - \sigma_1}{\beta_1 - 2\rho_1} = \frac{1}{12}\left[\frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}\right]^2 \approx 0{,}729$$

для квазилинейных и квазикубических систем, соответственно, для первой точки смены устойчивости и

$$\gamma_0 = \sigma_0, \quad \beta_0 = \rho_0 = 0 \quad \text{или} \quad \gamma_0 = \sigma_0 = 0, \quad \beta_0 = 6\rho_0$$

$$\frac{\gamma_1 - \sigma_1}{\beta_1 - 6\rho_1} = 0{,}25 \quad \text{или} \quad \frac{\gamma_1 - \sigma_1}{\beta_1 - 6\rho_1} = \frac{12}{5}\left[\frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}\right]^2 \approx 0{,}274$$

для второй точки смены устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rozenberg R. M., Hsu C. S.* On the geometrization of normal vibration of nonlinear systems having many degrees of freedom.— Тр. Междунар. симп. по нелинейным колебаниям. Киев, 1961. Т. 1, Киев, Изд-во АН УССР, 1963.
2. *Hsu C. S.* On a restricted class of coupled Hill's equations and some applications.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1961, v. 28. No. 4, p. 551.
3. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
4. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
5. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973. 294 с.
6. *Маневич Л. И., Михлин Ю. В.* О периодических решениях, близких к прямолинейным нормальным формам колебаний.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 6, с. 1051.
7. *Month L. A., Rand R. H.* The stability of bifurcating periodic solutions in a two degree of — freedom nonlinear system.—Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1977, v. 44, № 4, p. 782.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
21.VIII.1979