Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 3, 1981

УДК 531.31

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОНОМНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ В СЛУЧАЕ НУЛЕВЫХ ЧАСТОТ

Сокольский А. Г.

Решена задача об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы для случая, когда определяющее уравнение линеаризованной системы имеет четыре нулевых корня.

1. Рассмотрим автономную гамильтонову систему с двумя степенями свободы. Пусть начало координат фазового пространства соответствует положению равновесия системы, а функция Гамильтона аналитична в некоторой его окрестности, т. е.

$$H = H_2 + \ldots + H_m + \ldots$$

где H_m — однородные полиномы степени m относительно обобщенных координат q_k и импульсов p_k $(k = 1, 2)$:

$$H_m = \sum_{\nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2=m} h_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2}$$

К настоящему времени вопрос об устойчивости по Ляпунову таких систем в строгой нелинейной постановке изучен для всех возможных случаев (см. [1, 2]), кроме случая четырех равных нулю корней определяющего уравнения (или случай двух нулевых частот, или случай двукратного резонанса первого порядка). Решению этого вопроса и посвящена данная работа. В заключение рассмотрена задача обращения теоремы Лагранжа — Дирихле.

Согласно схеме исследования, выработанной при изучении всех предыдущих случаев, рассмотрим сначала вопрос о нормализации линеаризованной системы, соответствующей квадратичной части функции Гамильтона. Для этого запишем линеаризованную систему в виде

$$d\mathbf{x} / dt = Jh\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = (q_1, q_2, p_1, p_2)^T \tag{1.1}$$

$$J = -J^T = \begin{Vmatrix} O_2 & E_2 \\ -E_2 & O_2 \end{Vmatrix}, \quad h = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^2 H_2}{\partial \mathbf{x}^2} \end{Vmatrix}$$

где O, E — нулевая и единичные матрицы соответствующих порядков. Тогда задача нормализации сводится к нахождению такой невырожденной, вещественной, симплектической матрицы N, что преобразование

$$\mathbf{x} = N\mathbf{x}', \quad \mathbf{x}' = (q_1', q_2', p_1', p_2')^T \tag{1.2}$$

приводит линейную систему (1.1) к виду

$$dx'/dt = Jh'x', \quad h' = \left\| \frac{\partial^2 H_2'}{\partial x'^2} \right\| \tag{1.3}$$

При этом вопрос о нормальных формах квадратичных гамильтонианов H_2' для всех возможных типов собственных значений матрицы Jh разрешен в работах Вильямсона (см. добавление 6 в [3]), т. е. зависимость H_2' от q_k', p_k' известна. В рассматриваемой задаче, когда все собственные значения матрицы Jh равны нулю, в зависимости от ранга матрицы h имеем такие случаи (для случая общего положения $\mathrm{rg}\, h = 3$ в [3] приведена более сложная нормальная форма):

$$H_2' = {}^1/_2 \delta p_1'^2 - q_1' q_2' \quad (\delta = \pm 1), \quad \mathrm{rg}\, h = 3 \tag{1.4}$$

$$H_2' = {}^1/_2 \delta_1 p_1'^2 + {}^1/_2 \delta_2 p_2'^2 \quad (\delta_1 = \pm 1,\ \delta_2 = \pm 1), \quad \mathrm{rg}\, h = 2 \tag{1.5}$$

$$H_2' = {}^1/_2 \delta p_1'^2 \quad (\delta = \pm 1), \quad \mathrm{rg}\, h = 1 \tag{1.6}$$

$$H_2' \equiv 0, \quad \mathrm{rg}\, h = 0 \tag{1.7}$$

Заметим, что алгоритмов нормализации для рассматриваемого случая двух и более нулевых частот до настоящего времени нет. Предложим здесь конструктивный алгоритм нахождения матрицы нормализующего преобразования для всех возможных случаев, который проще рассматриваемых ранее в литературе (полный обзор методов линейной нормализации см. в [1] и [1]).

Искомая матрица должна, во-первых, приводить матрицу Jh к виду Jh', т. е. $JhN = NJh'$, а во-вторых, должна быть симплектической, т. е.

$$N^T J N = J \tag{1.8}$$

Решение первого уравнения существует только тогда, когда матрицы Jh и Jh' имеют одинаковые жордановы формы [4]. Пусть G — жорданова форма этих матриц. Ясно, что матрица, приводящая Jh к жордановой форме, вообще говоря, не будет симплектической, хотя бы потому, что только жордановы клетки не выше первого порядка (при этом четное число клеток) могут соответствовать некоторой канонической системе. Однако произведение двух несимплектических матриц может оказаться симплектической матрицей. В соответствии с этим будем искать матрицу нормализующего преобразования в виде $N = AB$. Здесь A — произвольная матрица, приводящая матрицу Jh к ее жордановой форме, т. е. она является произвольным (но фиксированным) невырожденным решением уравнения $JhA = AG$ и составлена из собственных и присоединенных векторов a_j матрицы Jh. Матрица $B = C^{-1}$, где матрица C приводит матрицу Jh' к той же жордановой форме G: $Jh'C = CG$. При составлении матрицы C из собственных и присоединенных векторов матрицы Jh' сохраним все произвольные постоянные, нормирующие эти векторы. Заметим, что матрицы B можно найти заранее для всех известных наборов собственных значений. Полученным произволом можно теперь распорядиться так,

---

[1] См. также: *Титова Т. Н.* О нормализации гамильтоновых матриц. Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук: М.: Университет дружбы народов, 1978, 112с.

чтобы матрица N была симплектической. Из (1.8) имеем такие соотношения нормировки:

$$B^T F B = J \tag{1.9}$$

где $F = A^T J A$ — кососимметрическая матрица, так как $f_{jn} = (\mathbf{a}_j, J\mathbf{a}_n) = (J^T\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_n) = -(\mathbf{a}_n, J\mathbf{a}_j) = -f_{nj}$. Дальнейшее изучение структуры матрицы F проще проводить для каждого случая отдельно, подобно тому, как это сделано для случая простых собственных значений (см. [1]).

Применим эту простую идею в рассматриваемой задаче.

Для случая $\mathrm{rg}\, h = 3$ имеем

$$\begin{aligned} &Jh\mathbf{a}_1 = 0,\\ &Jh\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1,\\ &Jh\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_2,\\ &Jh\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_3, \end{aligned} \quad B = \begin{Vmatrix} \delta b_2 & b_4 & b_3 & \delta b_1 \\ \delta b_1 & b_3 & b_2 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad F = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & f_{14} \\ 0 & 0 & -f_{14} & 0 \\ 0 & f_{14} & 0 & f_{34} \\ -f_{14} & 0 & -f_{34} & 0 \end{Vmatrix} \tag{1.10}$$

причем b_j — произвольные вещественные числа ($b_1 \neq 0$), а $f_{14} \neq 0$, так как $f_{14}^4 = \det F = (\det A)^2 \neq 0$. Подставляя выражения для матриц B и F в соотношение нормировки (1.9), получаем уравнения для определения δ и b_j:

$$\delta b_1^2 f_{14} = -1, \quad 2b_1b_3f_{14} - b_2^2 f_{14} + b_1^2 f_{34} = 0$$

Полагая для простоты $b_2 = b_4 = 0$, получаем окончательное выражение для нормализующей матрицы

$$N = \| \delta b_1\mathbf{a}_2,\ b_3\mathbf{a}_2 + b_1\mathbf{a}_4,\ b_3\mathbf{a}_1 + b_1\mathbf{a}_3,\ \delta b_1\mathbf{a}_1 \|$$

$$\delta = -\operatorname{sign}(\mathbf{a}_1, J\mathbf{a}_4), \quad b_1 = |(\mathbf{a}_1, J\mathbf{a}_4)|^{-1/2}, \quad b_3 = {}^1/_2\delta b_1^3(\mathbf{a}_3, J\mathbf{a}_4)$$

где $\mathbf{a}_j$ ($j = 1, 2, 3, 4$) — произвольные линейно-независимые решения уравнений (1.10).

Для случая $\mathrm{rg}\, h = 2$ находим

$$\begin{aligned} &Jh\mathbf{a}_1 = 0,\\ &Jh\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1,\\ &Jh\mathbf{a}_3 = 0,\\ &Jh\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_3, \end{aligned} \quad B = \begin{Vmatrix} b_1 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 b_1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 b_2 \end{Vmatrix}, \quad F = \begin{Vmatrix} 0 & f_{12} & 0 & 0 \\ -f_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{34} \\ 0 & 0 & -f_{34} & 0 \end{Vmatrix} \tag{1.11}$$

причем $f_{12} \neq 0$, $f_{34} \neq 0$, так как $f_{12}^2 f_{34}^2 = \det F = (\det A)^2 \neq 0$. Аналогично предыдущему случаю получаем из (1.9), (1.11) уравнения для δ_1, δ_2 и b_j

$$\delta_1 b_1^2 f_{12} = 1, \quad \delta_2 b_2^2 f_{34} = 1$$

Полагая для простоты $b_3 = b_4 = 0$, имеем окончательное выражение

$$N = \| b_1\mathbf{a}_1,\ \ b_2\mathbf{a}_3,\ \ \delta_1 b_1\mathbf{a}_2,\ \ \delta_2 b_2\mathbf{a}_4 \|$$

$$\delta_1 = \operatorname{sign}(\mathbf{a}_1, J\mathbf{a}_2), \quad b_1 = |(\mathbf{a}_1, J\mathbf{a}_2)|^{-1/2}, \quad \delta_2 = \operatorname{sign}(\mathbf{a}_3, J\mathbf{a}_4),$$

$$b_2 = |(\mathbf{a}_3, J\mathbf{a}_4)|^{-1/2}$$

где $\mathbf{a}_j$ — решение уравнений (1.11).

Наконец, для случая $\mathrm{rg}\, h = 1$

$$\begin{aligned} &Jh\mathbf{a}_1 = 0,\\ &Jh\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1,\\ &Jh\mathbf{a}_3 = 0,\\ &Jh\mathbf{a}_4 = 0, \end{aligned} \quad B = \begin{Vmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta b_1 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 \end{Vmatrix}, \quad F = \begin{Vmatrix} 0 & f_{12} & 0 & 0 \\ -f_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{34} \\ 0 & 0 & -f_{34} & 0 \end{Vmatrix} \tag{1.12}$$

причем, как и в предыдущем случае, $f_{12} \neq 0$, $f_{34} \neq 0$. Используя условия нормировки, получаем окончательное выражение для нормализующей матрицы

$$
\begin{aligned}
&N = \| b_1\mathbf{a}_1, \quad b_3\mathbf{a}_3, \quad \delta b_1\mathbf{a}_2, \quad \mathbf{a}_4 \| \\
&\delta = \operatorname{sign}(\mathbf{a}_1, J\mathbf{a}_2), \quad b_1 = |(\mathbf{a}_1, J\mathbf{a}_2)|^{-1/2}, \quad b_2 = 0 \\
&b_3 = (\mathbf{a}_3, J\mathbf{a}_4)^{-1}, \quad b_4 = 1
\end{aligned}
$$

Для случая $\operatorname{rg} h = 0$ нормализацию проводить не надо, так как из самого условия $\operatorname{rg} h = 0$ следует, что все коэффициенты квадратичной части гамильтониана равны нулю и она уже имеет нормальный вид (1.7).

Далее будем считать, что линейная нормализация в системе уже произведена и квадратичная часть функции Гамильтона имеет вид (1.4) — (1.7) соответственно для случаев $\operatorname{rg} h = 3, 2, 1, 0$. Для фазовых переменных будем использовать прежние обозначения (без штрихов).

2. Рассмотрим вопрос об устойчивости полной нелинейной системы для случая общего положения $\operatorname{rg} h = 3$. Для этого проведем в полной системе методом Депри — Хори такую нелинейную нормализацию[2] $(q_k, p_k) \to (Q_k, P_k)$ $(k = 1, 2)$, чтобы новая функция Гамильтона $K = K_2 + \ldots + K_m + \ldots$ приобрела более простой вид. Обозначая через $S = S_3 + \ldots + S_m + \ldots$ производящую функцию метода Депри — Хори, для коэффициентов $s_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ ее форм S_m и коэффициентов $k_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ нового гамильтониана имеем систему алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
(2.1) \qquad &\delta(\nu_1+1)s_{\nu_1+1,\nu_2,\mu_1-1,\mu_2} - (\mu_1+1)s_{\nu_1,\nu_2-1,\mu_1+1,\mu_2} - \\
&-(\mu_2+1)s_{\nu_1-1,\nu_2,\mu_1,\mu_2+1} = g_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} - k_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} \\
&(\nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2 = m; \ m = 3, 4, \ldots)
\end{aligned}
$$

где $g_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ — коэффициенты форм G_m, выражающихся через формы S_n, H_n, K_n низших порядков; например, $G_3 = H_3$, $G_4 = H_4 + {}^1/_2 \{S_3, H_3 + K_3\}$ ($\{\ ,\ \}$ — скобки Пуассона). Решение уравнений (2.1) дает такую нормальную форму функции Гамильтона (до членов третьего порядка)

$$
(2.2) \qquad K = K^{(0)} + K^{(1)}
$$

$$
\begin{aligned}
(2.3) \qquad &K^{(0)} = \frac{1}{2}\delta P_1^2 - Q_1Q_2 + k_{0003}P_2^3 \quad (k_{0003} = h_{0003}) \\
&K^{(1)} = k_{0102}Q_2P_2^2 + k_{0012}P_1P_2^2 + K_4 + \ldots
\end{aligned}
$$

Теорема 2.1. Если $k_{0003} \neq 0$, то положение равновесия неустойчиво.

Для доказательства теоремы рассмотрим сначала укороченную систему с функцией Гамильтона (2.3). Она имеет неустойчивое частное решение

$$
\begin{aligned}
(2.4) \qquad &Q_1 = aP_2^{5/4}, \quad P_1 = bP_2^{6/4}, \quad Q_2 = cP_2^{7/4}, \quad P_2 = P_2(0)[1 - At]^{-4} \\
&a = 4A\,[P_2(0)]^{-1/4}, \quad b = 20\delta A^2\,[P_2(0)]^{-2/4}, \\
&c = 120\delta A^3\,[P_2(0)]^{-3/4} \\
&A = [\delta k_{0003}P_2(0)\,/\,280]^{1/4}
\end{aligned}
$$

[2] См. *Маркеев А. П., Скольский А. Г.* Некоторые вычислительные алгоритмы нормализации гамильтоновых систем. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, № 31, 1976.

Заметим, что найденное решение системы с гамильтонианом (2.3) неограниченно возрастает за конечное время $t \sim [P_2(0)]^{-1/4}$ при сколь угодно малых начальных условиях $P_2(0)$, в то время как решения линейной системы с гамильтонианом (1.4) могут возрастать лишь по степенному закону. Используя найденное неустойчивое частное решение укороченной системы, докажем неустойчивость полной системы с помощью теоремы Четаева [5]. За функцию Четаева возьмем, например, функцию

$$V = P_2^{210} - \left[\left(\frac{Q_1}{a}\right)^4 - P_2^5\right]^{42} - \left[\left(\frac{P_1}{b}\right)^2 - P_2^3\right]^{70} - \left[\left(\frac{Q_2}{c}\right)^4 - P_2^7\right]^{30} \tag{2.5}$$

В области $V > 0$ справедливы оценки

$$Q_1 = a(1+\alpha^5)^{1/4} P_2^{5/4},\ \ P_1 = |b|(1+\beta^3)^{1/2} P_2^{6/4},\ \ Q_2 = |c|(1+\gamma^7)^{1/4} P_2^{7/4}$$
$$P_2 > 0,\quad 0 < \alpha^{210} + \beta^{210} + \gamma^{210} < 1,\quad \alpha > 0,\quad \beta > 0,\quad \gamma > 0$$

Можно убедиться, что производная функции V, составленная в силу уравнений движения с гамильтонианом (2.2), в области $V > 0$ будет определенно-положительной. Следовательно, по теореме Четаева положение равновесия неустойчиво и теорема 2.1 доказана.

Остановимся кратко на вырожденном случае $k_{0003} = 0$. Нормализацию в этом случае надо проводить до членов четвертого порядка, и нормальная форма теперь имеет вид (2.2), где

$$K^{(0)} = \frac{1}{2}\delta P_1^2 - Q_1 Q_2 + k_{0012} P_1 P_2^2 + k_{0004} P_2^4 \tag{2.6}$$
$$K^{(1)} = k_{0102} Q_2 P_2^2 + k_{0103} Q_2 P_2^3 + k_{0022} P_1^2 P_2^2 + k_{0013} P_1 P_2^3 + K_5 + \ldots$$

Обозначим $d = k_{0012}^2 + 6\delta k_{0004}$ и пусть $d > 0$. Тогда укороченная система с гамильтонианом (2.6) будет иметь частное решение, аналогичное решению (2.4)

$$Q_1 = aP_2^{3/2},\quad P_1 = bP_2^{4/2},\quad Q_2 = cP_2^{5/2},\quad P_2 = P_2(0)[1 - At]^{-2}$$
$$a = 2A\,[P_2(0)]^{-1/2},\quad b = {}^1/_3\delta\,[-k_{0012} \pm \sqrt{d}]$$
$$c = 4bA\,[P_2(0)]^{-1/2}$$
$$A = \{P_2(0)\,[2k_{0012} \pm \sqrt{d}]\,/\,6\}^{1/2}$$

Отсюда, как и в невырожденном случае $k_{0003} \neq 0$, получаем, что при $d > 0$ положение равновесия неустойчиво. При $d < 0$ аналогичного растущего решения укороченной системы нет и, по-видимому, положение равновесия будет устойчиво по Ляпунову. Однако строгое доказательство этого утверждения провести не удается из-за отсутствия даже у укороченной системы аналитического вблизи нуля интеграла, отличного от $K^{(0)}$.

В качестве примера использования результатов п. 2 в конкретных механических задачах рассмотрим вопрос об устойчивости конической прецессии динамически симметричного спутника на круговой орбите [6]. Пусть $\alpha = {}^4/_3$, $\beta = 0$, где α — отношение полярного и экваториального моментов инерции спутника, β — отношение проекции абсолютной угловой скорости спутника на его ось симметрии и угловой скорости центра масс [7]. При таких значениях параметров спутник поступательно движется в абсолютном пространстве, а его ось симметрии перпендикулярна вектору скорости центра масс и составляет произвольный угол ϑ_0 с нормалью к плоскости орбиты.

В рассматриваемом случае первые члены разложения функции Гамильтона возмущенного движения в соответствующих координатах имеют вид [7]

(2.7) $$H_2 = p_1^2 / (2s^2) + p_2^2 / 2 - q_1^2 s^2 / 2 + 2c^2 q_2^2 - 2p_1 q_2 c / s$$

(2.8) $$H_3 = -2q_2^3 c / s + q_2^2 p_1 (1 + 2c^2) / s^2 - q_2 p_1^2 c / s^3 - csq_1^2 q_2$$

$$c = \cos\vartheta_0,\ s = \sin\vartheta_0$$

В работе [7], в которой рассматривалась эта задача, остался неизученным случай $\vartheta_0 = \pi / 3$, при котором определяющее уравнение линейной системы с функцией Гамильтона (2.7) и $\sigma^4 + (4c^2 - 1)\sigma^2 = 0$ имеет четыре нулевых корня, а ранг соответствующей матрицы h равен трем. Используя алгоритм п. 1, находим матрицу линейного нормализующего преобразования

$$N = \begin{Vmatrix} 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/4 & \sqrt{3}/2 \\ 1 & -1/2 & 0 & 0 \end{Vmatrix},\ \delta = 1$$

Переходя в (2.8) к новым переменным, находим коэффициент нормальной формы (2.3) $k_{0003} = 1 / \sqrt{3} \neq 0$. Из теоремы 2.1 следует неустойчивость конической прецессии.

Еще один интересный пример использования полученных выше результатов описан в[3]. При исследовании устойчивости цилиндрической прецессии симметричного спутника для значений параметров $\alpha = 2/3$, $\beta = 3/2$ также оказалось, что $\omega_1 = \omega_2 = 0$, а $\operatorname{rg} h = 3$. Приведение к нормальной форме показало, что в (2.3) $\delta = 1$, $k_{0003} = 0$, т. е. имеем дело с вырожденным случаем. Дальнейшие вычисления дают $k_{0012} = 0$ $k_{0004} = 1/8$. Следовательно, $d = k_{0012}^2 + 6\,\delta k_{0004} > 0$ и на основании изложенного выше можно утверждать, что цилиндрическая прецессия неустойчива.

3. Рассмотрим вопрос об устойчивости в случае $\operatorname{rg} h = 2$. В этом случае при нормализации нелинейных членов вместо уравнений (2.1) имеем такие уравнения для определения коэффициентов производящей функции и коэффициентов новой функции Гамильтона:

(3.1) $$\delta_1 (\nu_1 + 1) s_{\nu_1+1,\,\nu_2,\,\mu_1-1,\,\mu_2} + \delta_2 (\nu_2 + 1) s_{\nu_1,\,\nu_2+1,\,\mu_1,\,\mu_2-1} = g_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} - k_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$$

Решение этих уравнений дает следующую нормальную форму функции Гамильтона (до членов третьего порядка):

(3.2) $$K = K^{(0)} + K^{(1)},\quad K^{(0)} = K_2 + K_3^{(0)},\quad K^{(1)} = K_3^{(1)} + K_4 + \ldots$$

(3.3) $$K_3^{(0)} = h_{30}Q_1^3 + h_{21}Q_1^2 Q_2 + h_{12}Q_1 Q_2^2 + h_{03}Q_2^3 \quad (h_{\nu_1\nu_2} = h_{\nu_1\nu_2 00} = k_{\nu_1\nu_2 00})$$

(3.4) $$K_3^{(1)} = h_{1110}Q_1 Q_2 P_1 + h_{1101}Q_1 Q_2 P_2$$

Теорема 3.1. Если $h_{30}^2 + h_{21}^2 + h_{12}^2 + h_{03}^2 \neq 0$, то положение равновесия неустойчиво.

Доказательство теоремы можно провести так же, как и доказательство утверждений п. 2. Для этого заметим, что при выполнении условия теоремы (т. е. когда хотя бы один коэффициент формы $K_3^{(0)}$ отличен от нуля) укороченная система с гамильтонианом $K^{(0)}$ допускает частное решение

[3] *Сокольский А. Г.* К задаче об устойчивости регулярных прецессий симметричного спутника.— Космич. исслед., 1980, т. 18, № 5, с. 698.

вида

$$(3.5)\qquad Q_1=\frac{Q_1(0)}{(1-At)^2},\quad Q_2=\frac{Q_2(0)}{(1-At)^2},\quad P_1=\frac{2\delta_1 AQ_1(0)}{(1-At)^3}$$

$$P_2=\frac{2\delta_2 AQ_2(0)}{(1-At)^3}$$

$$A=\{-\delta_1[3h_{30}Q_1^2(0)+2h_{21}Q_1(0)Q_2(0)+ + h_{12}Q_2^2(0)]/[6Q_1(0)]\}^{1/2}=\{-\delta_2[h_{21}Q_1^2(0)+ + 2h_{12}Q_1(0)Q_2(0)+3h_{03}Q_2^2(0)]/[6Q_2(0)]\}^{1/2}$$

где $Q_1(0)$, $Q_2(0)$ — любые ненулевые одновременно вещественные числа (они всегда существуют: если, например, $h_{21}=0$, то возьмем $Q_2(0)=0$, а $Q_1(0)$ — любое ненулевое), удовлетворяющие соотношению

$$\delta_1 h_{12}Q_2^3(0)+[2\delta_1 h_{21}-3\delta_2 h_{03}]Q_2^2(0)Q_1(0)- -[2\delta_2 h_{12}-3\delta_1 h_{30}]Q_2(0)Q_1^2(0)-\delta_2 h_{21}Q_1^3(0)=0$$

Используя это растущее решение укороченной системы и выбирая $Q_1(0)$, $Q_2(0)$ достаточно малыми, можно построить функцию Четаева полной системы, аналогичную функции (2.5).

Если условие теоремы 3.1 не выполнено, то нормализацию надо проводить до членов более высокого порядка, и в общем случае из-за наличия членов вида $Q_1Q_2P_1$, $Q_1Q_2P_2$, . . . (пропорциональных P_k) исследование значительно усложняется (см. п. 4).

Исследование устойчивости для упомянутых выше случаев $\operatorname{rg} h=1$ и $\operatorname{rg} h=0$ можно провести, комбинируя результаты данной работы и работы [2].

4. В качестве примера использования полученных ранее результатов рассмотрим вкратце их связь с известной задачей обращения теоремы Лагранжа — Дирихле об устойчивости двумерной консервативной системы. Отметим, что в работах [5, 8—11] (см. также [12, 13]) эта задача получила практически завершенное решение. Однако последние, наиболее полные результаты [9—11], получены методами теории оптимального управления и топологии и не имеют ясного механического смысла. Поэтому хотелось бы решить эту задачу механики, используя только методы аналитической механики.

Пусть дана консервативная механическая система с двумя степенями свободы: q_1, q_2 — ее лагранжевы координаты, p_1, p_2 — соответствующие обобщенные импульсы, а начало координат фазового пространства является изолированным положением равновесия. Кинетическая энергия

$$T={}^1/_2\sum_{j,\,k=1}^{2}[\delta_{jk}+\tau_{jk}(q_1,q_2)]\,p_jp_k;\qquad \tau_{jk}=\tau_{kj},\ \tau_{j,k}(0,0)=0$$

где δ_{jk} — символ Кронекера, является определенно-положительной квадратичной формой импульсов. В силу консервативности системы действующие на нее силы потенциальны, а потенциальная энергия (являющаяся аналитической функцией лагранжевых координат в окрестности положения равновесия) имеет вид

$$(4.1)\qquad U(q_1,q_2)=U_2+U_3+\ldots,\quad U_m=\sum_{j+k=m}u_{jk}q_1^jq_2^k$$

Уравнения возмущенного движения можно записать в каноническом виде с функцией Гамильтона $H=T+U$. Записанная таким образом гамильтонова система обладает важным свойством, выделяющим ее из общего класса автономных гамильтоновых систем (в которых могут, вообще говоря, присутствовать еще гироскопические силы) и облегчающим ее исследование: обобщенные импульсы входят в исходную функцию Гамильтона только квадратичным образом. При этих условиях справедливо утверждение.

Теорема (*Лагранжа — Дирихле*). Положение равновесия рассматриваемой системы тогда и только тогда устойчиво, когда потенциальная энергия U (q_1, q_2) имеет в положении равновесия минимум, т. е. является в окрестности положения равновесия определенно-положительной функцией своих переменных q_1, q_2.

Первая часть этого утверждения составляет содержание собственно оригинальной теоремы Лагранжа — Дирихле, а вторая часть носит название теоремы, обратной теореме Лагранжа — Дирихле и долгое время была не доказана.

Рассмотрим сначала линеаризованную систему, записав ее, как и в [12], в главных координатах (не изменяя обозначений для переменных и замечая, что описанное выше свойство квадратичной зависимости гамильтониана от импульсов сохраняется). Гамильтониан такой линейной системы имеет вид

$$H_2 = {}^1/_2 p_1^2 + {}^1/_2 p_2^2 + {}^1/_2 C_1 q_1^2 + {}^1/_2 C_2 q_2^2 \quad (U_2 = {}^1/_2 C_1 q_1^2 + {}^1/_2 C_2 q_2^2,\ C_1 \geqslant C_2)$$

Отметим, что $C_k = -\sigma_k^2$ ($k = 1,2$), где σ_k — корни определяющего уравнения.

Возможны следующие случаи: а) $C_2 < 0$, б) $C_1 = C_2 = 0$, в) $C_1 > C_2 = 0$, г) $C_1 \geqslant C_2 > 0$. Для случаев б) — г) введем обозначения $C_k = \omega_k^2$, где ω_k — частоты линейных колебаний.

В случае а) линейная система неустойчива из-за наличия в общем решении экспоненциально растущих со временем t членов, т. е. полная система также неустойчива; в случаях б), в) линейная система неустойчива из-за наличия в общем решении членов, пропорциональных t^n ($n = 1, 2, 3$), но сделать отсюда вывод о неустойчивости полной системы еще нельзя; в случае г) и линейная, и полная системы устойчивы, что следует из теоремы Ляпунова об устойчивости [14], если за функцию Ляпунова принять знакоопределенный (в данном случае определенно-положительный) интеграл $H = \mathrm{const}$.

С другой стороны, в случае а) форма U_2 либо определенно-отрицательная ($C_2 \leqslant C_1 < 0$), либо знакоотрицательная ($C_1 = 0 > C_2$), либо знакопеременная ($C_1 > 0 > C_2$), т. е. вся функция (4.1) никак не может быть определенно-положительной. В случае г) форма U_2 (а значит, и вся функция (4.1)) определенно-положительная. В случае в) форма U_2 — знакоположительная, т. е. в зависимости от U_3, U_4, ... функция (4.1) может стать как определенно-положительной, так и знакопеременной. В случае б) форма $U_2 \equiv 0$ и все определяется формами U_3, U_4, ...

Итак, при исследовании устойчивости случаи б) и в) являются особыми и для них необходимо в разложении гамильтониана учитывать формы H_3, H_4, ... Иными словами, рассмотрим далее случаи одной или двух нулевых частот.

Случай в) (случай одной нулевой частоты $\omega_2 = 0$, $\omega_1 \neq 0$) по существу до конца рассмотрен в [2], где исследована устойчивость произвольной гамильтоновой системы (т. е. в соответствующей механической системе возможны гироскопические силы или же эта система автономная обобщенно-консервативная). Для того чтобы воспользоваться этими результатами, достаточно внести в доказательство соответствующей теоремы 4.1 из [2] всего одно изменение: нормализовывать не всю функцию Гамильтона $H = T + U$, а только ее «потенциальную часть» U. Тогда нормальная форма гамильтониана принимает вид

$$K = ({}^1/_2 P_1^2 + {}^1/_2 \omega_1^2 Q_1^2) + ({}^1/_2 P_2^2 + a_{0,M} Q_2^M) + K^{(M)} + K_{M+1} + \ldots$$

где $a_{0,M} \neq 0$, а в $K^{(M)}$ собраны все члены, имеющие порядок не выше M относительно Q_k, P_k, но такие, что их порядок выше $2M$ относительно ε при замене $P_1 = \varepsilon^M P_1^*$, $Q_1 = \varepsilon^M Q_1^*$, $P_2 = \varepsilon^M P_2^*$, $Q_2 = \varepsilon^2 Q_2^*$[2]. Тогда по теореме 4.1 из [2] получаем, что устойчивость будет иметь место только если число M — четное и $a_{0,M} > 0$. Если же M — нечетное или M — четное, но $a_{0,M} < 0$, то положение равновесия неустойчиво. Видно, что условие устойчивости совпадает с условием знакоопределенности функции (4.1). Таким образом, единственным не поддающимся изучению случаем при $\omega_2 = 0$ является так называемый трансцендентный случай, когда $a_{0,M} = 0$ для всех $M = 3,4,\ldots$.

(такая ситуация возникает, например, когда координата q_2 — циклическая). Однако и сделать вывод о наличии или отсутствии экстремума функции (4.1) в этом случае нельзя.

Рассмотрим, наконец, случай б): $\omega_1 = \omega_2 = 0$, использовав результаты п. 3 данной работы.

Видно, что теорема 3.1 вполне согласуется с рассматриваемыми утверждениями теоремы Лагранжа — Дирихле, так как любая форма третьего порядка (и любая аналитическая функция, разложение которой начинается с этой формы) является знакопеременной. При этом в (3.2) члены (3.4) в рассматриваемом случае консервативной системы отсутствуют из-за квадратичной зависимости гамильтониана от импульсов. Поэтому нетрудно распространить теорему 3.1 на случай, когда разложение функции (4.1) начинается с любых форм U_m нечетной степени m или когда m — четное, но форма U_m знакопеременная или определенно-отрицательная (знакоотрицательная). Во всех этих случаях можно найти неустойчивое частное решение (типа решения (3.5)) укороченной системы, а затем построить функцию Четаева вида (2.5) для полной системы. Исследование будет более сложным, если разложение функции (4.1) начинается с формы U_m, являющейся знакоположительной. В этом случае в функцию $K^{(0)}$ из (3.2) помимо U_m надо включить те члены из форм U_n более высокого порядка, которые делают эту функцию либо определенно-положительной (тогда по теореме Ляпунова положение равновесия устойчиво), либо знакопеременной. В последнем случае будет иметь место неустойчивость, однако ее доказательство проводится не на основе обнаружения частных решений типа (3.5), а, так же как в [15], при исследовании устойчивости в случае $\omega_1 = 3\omega_2$ и $|c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}| = 3\,[3\,(A_{13}^2 + B_{13}^2)]^{1/2}$.

Автор благодарит Маркеева А. П. за ценные советы, а также участников и руководителя семинара Румянцева В. В. за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978, 312 с.
2. *Сокольский А. Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка.— ПММ, 1977, т. 41, № 1, с. 24.
3. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
5. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 207 с.
6. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
7. *Маркеев А. П., Сокольский А. Г., Чеховская Т. Н.* Об устойчивости конической прецессии динамически симметричного твердого тела.— Письма в АЖ, 1977, т. 3, № 7, с. 333.
8. *Четаев Н. Г.* О неустойчивости равновесия в некоторых случаях, когда силовая функция не есть максимум.— ПММ, 1952, т. 16, вып. 1, с. 89.
9. *Hegedorn P.* Über die instabilität konservative Systeme mit gyroskopischen kraften.— Arch. Ration Mech. Analysis, 1975, v. 58, No. 1, p. 1.
10. *Hagedorn P.* Die Umkehrung der Stabilitätssätze von Lagrange — Dirichlet und Routh.— Arch. Ration Mech. Analysis, 1971, v. 42, No. 4. (Рус. перев.: Механика, 1972, № 5, с. 3.)
11. *Паламодов В. П.* Об устойчивости равновесия в потенциальном поле.— Функциональный анализ и его приложения, 1977, т. 11, № 4, с. 42.
12. *Koiter W. T.* On the instability of equilibrium in the absence of a minimum of the potential energy.— Proc. Koninkl. nederl. akad. wet. B, 1965, v. 68, No. 3, p. 107.
13. *Балитинов М. А.* О неустойчивости положения равновесия гамильтоновой системы.— ПММ, 1978, т. 42, № 3, с. 557.
14. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч. Т. 2. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1956, с. 7.
15. *Сокольский А. Г.* Треугольные точки либрации обобщенной круговой ограниченной задачи трех тел.— Письма в АЖ, 1979, т. 5, № 3, с. 148.

Москва

Поступила в редакцию
4.X.1979