Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 3, 1981

УДК 531.36

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Тхай В. Н.

В критическом случае m нулевых, n пар чисто мнимых и q корней с отрицательными вещественными частями, когда m-кратному нулевому корню отвечает m групп решений, а между чисто мнимыми корнями нет целочисленных соотношений, выделен случай, когда асимптотическая устойчивость невозможна. Дано дополнение к теореме Каменкова об устойчивости в существенно особенном случае.

В критическом случае одного нулевого, произвольного числа пар чисто мнимых и корней с отрицательными вещественными частями установлена теорема об устойчивости в случаях несущественно особенных.

Рассмотрим критический случай m нулевых, n пар чисто мнимых и q корней с отрицательными вещественными частями. Пусть m-кратному нулевому корню отвечает m групп решений, а между чисто мнимыми корнями нет целочисленных соотношений. Уравнения возмущенного движения предположим с голоморфными правыми частями. Тогда, выделяя явно линейное приближение, имеем

$$\xi^{\cdot} = F_0 + F_1, \quad \eta^{\cdot} = \Lambda\eta + \Phi_0 + \Phi_1, \quad \overline{\eta}^{\cdot} = -\Lambda\overline{\eta} + \overline{\Phi}_0 + \overline{\Phi}_1,$$
$$z^{\cdot} = Pz + Z_0 + Z_1, \quad \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \tag{1}$$

Здесь ξ и z — действительные m- и q-векторы, η, $\overline{\eta}$ — комплексно-сопряженные n-векторы, $\overline{\Phi}_0, \overline{\Phi}_1$ — комплексные вектор-функции, сопряженные соответственно с Φ_0 и Φ_1, Λ — диагональная матрица чисто мнимых собственных значений, постоянная $(q \times q)$-матрица $P = \| p_{sj} \|$ имеет собственные значения с отрицательными вещественными частями; функции с индексом единица тождественно равны нулю, когда $z = 0$. Аргументами функций с индексом нуль служат ξ, η, $\overline{\eta}$, с индексом единица — ξ, η, $\overline{\eta}$, z.

Согласно теореме Ляпунова о существовании голоморфных функций, удовлетворяющих уравнениям в частных производных [1], невырожденным преобразованием всегда можно добиться, чтобы функции с индексом нуль обращались (или не обращались) тождественно в нуль одновременно все. При этом, если имеет место существенно особенный случай

$$F_0 = \Phi_0 = \overline{\Phi}_0 = Z_0 \equiv 0 \tag{2}$$

то нулевое решение системы (1) устойчиво по Ляпунову [2].

Можно видеть, что при выполнении (2) уравнения (1) допускают $(2n + m)$-параметрическое семейство частных решений (c — постоянный m-вектор)

(3) $$\xi = c, \quad \eta^{\cdot} = \Lambda\eta, \quad \overline{\eta}^{\cdot} = -\Lambda\overline{\eta}, \quad z = 0$$

Утверждение об устойчивости можно доказать функцией [2]

$$V = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^2 + \sum_{j=1}^{n} \eta_j\overline{\eta}_j + W(z_1, \ldots, z_q)$$

где квадратичная форма W определяется из уравнения

(4) $$\sum_{s=1}^{q} \frac{\partial W}{\partial z_s} \sum_{j=1}^{q} p_{sj} z_j = -(z_1^2 + \ldots + z_q^2)$$

В самом деле, при выполнении (2) надлежащим преобразованием всегда можно добиться, чтобы функции F_1, Φ_1, $\overline{\Phi}_1$ не содержали членов, линейных относительно $z_1, \ldots, z_q$ [2]; значит полная производная от функции V в силу (1)

$$V^{\cdot} < -\mu(z_1^2 + \ldots + z_q^2), \ \mu - \mathrm{const}, \ 0 < \mu < 1$$

и все условия теоремы Ляпунова об устойчивости [1] выполнены.

Из устойчивости относительно всех переменных ξ, η, $\overline{\eta}$, z следует, что функция W доказывает, согласно теореме В. В. Румянцева [3], асимптотическую z-устойчивость. А так как функция W выбрана в виде квадратичной формы, то

$$|z_s| < \varepsilon e^{-\alpha t} \ (s = 1, \ \ldots, \ q)$$

где ε, α — некоторые положительные постоянные. Следовательно, справедливы оценки

$$|F_1| < \varepsilon_1 e^{-2\alpha t}, \quad |\Phi_1| < \varepsilon_1 e^{-2\alpha t}, \quad |\overline{\Phi}_1| < \varepsilon_1 e^{-2\alpha t}$$

(ε_1 — некоторая положительная постоянная), т. е.

$$|\xi^{\cdot}| < \varepsilon_1 e^{-2\alpha t}, \quad |\eta^{\cdot} - \Lambda\eta| < \varepsilon_1 e^{-2\alpha t}, \quad |\overline{\eta}^{\cdot} + \Lambda\overline{\eta}| < \varepsilon_1 e^{-2\alpha t}$$

и каждое возмущенное движение асимптотически стремится к одному из решений, определяемых формулами (3).

Таким образом, показано, что в рассматриваемом существенно особенном случае характер изменения переменных такой же, как и в теореме Ляпунова — Малкина [4], с той лишь разницей, что здесь всякое возмущенное движение асимптотически приближается к некоторому периодическому решению $(2n + m)$-параметрического семейства (3).

Пусть тождества (2) не выполняются. Представим функции с индексом нуль в виде суммы двух слагаемых

$$F_0 = F_0^{(1)}(\xi) + F_0^{(2)}(\xi, \eta, \overline{\eta}), \quad \Phi_0 = \Phi_0^{(1)}(\xi) + \Phi_0^{(2)}(\xi, \eta, \overline{\eta})$$
$$\overline{\Phi}_0 = \overline{\Phi}_0^{(1)}(\xi) + \overline{\Phi}_0^{(2)}(\xi, \eta, \overline{\eta},), \quad Z_0 = Z_0^{(1)}(\xi) + Z_0^{(2)}(\xi, \eta, \overline{\eta})$$
$$F_0^{(2)}(\xi, 0, 0) = \Phi_0^{(2)}(\xi, 0, 0) = \overline{\Phi}_0^{(2)}(\xi, 0, 0) = Z_0^{(2)}(\xi, 0, 0) \equiv 0.$$

Согласно теореме Ляпунова о существовании голоморфных функци , удовлетворяющих уравнениям в частных производных, и дополнению к ней Каменкова [2], невырожденным преобразованием всегда можно добиться, чтобы функции с верхним индексом единица обращались (или не обращались) тождественно в нуль одновременно все. Если выполняются условия

$$F_0^{(1)} = \Phi_0^{(1)} = \overline{\Phi}_0^{(1)} = Z_0^{(1)} \equiv 0 \tag{5}$$

то уравнения (1) допускают семейство установившихся движений

$$\xi = c,\ \eta = 0,\ \overline{\eta} = 0,\ z = 0$$

и асимптотическая устойчивость невозможна. (Отметим, что такая ситуация имеет место в неголономных системах [5].) При этом всегда можно добиться, чтобы функции $F_0^{(2)}$, F_1 не содержали членов, линейных относительно η, $\overline{\eta}$, z [2].

Рассмотрим подробнее случай $m = 1$. Достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости получены в [6]. Эти выводы охватывают те случаи, когда условия (5) не выполняются.

Предположим, что они справедливы. Тогда в полярных координатах

$$\eta_s = \rho_s \exp(i\theta_s),\ \overline{\eta}_s = p_s \exp(-i\theta_s)\ (s = 1, \ldots, n)$$

система (1) запишется в виде [6]

$$\begin{aligned} x^{\cdot} &= \sum_{j=1}^{n} a_j\rho_j^2 + X(x, \rho, \theta, z) \\ \rho_s^{\cdot} &= b_s x\rho_s + R_s(x, \rho, \theta, z)\ \ (s = 1, \ldots, n) \\ z_l^{\cdot} &= \sum_{j=1}^{q} p_{lj}z_j + Z_l(x, \rho, \theta, z)\ \ (l = 1, \ldots, q) \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь x — действительная переменная, a_j, b_s — постоянные коэффициенты квадратичных членов, разложения функций X, R_s в ряды по переменным x, ρ, z начинаются с членов не ниже третьего порядка. Кроме того, в силу (5)

$$X(x, 0, \theta, 0) = R_s(x, 0, \theta, 0) = Z_l(x, 0, \theta, 0) \equiv 0$$
$$(s = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, q)$$

а функция X не содержит членов, линейных по ρ, z.

Если среди a_s, b_s $(s = 1, \ldots, n)$ есть пара a_{s_*}, b_{s_*} — одного знака, то нулевое решение $x = \rho = z = 0$ неустойчиво по Ляпунову [6]. Предположим, что $a_s b_s < 0$ $(s = 1, \ldots, n)$. В $(n + 1)$-мерных сферических координатах

$$x = r\cos\varphi_1,\ \rho_s = r\cos\varphi_{s+1}\prod_{j=1}^{s}\sin\varphi_j\ \ (s = 2, \ldots, n-1) \tag{7}$$

$$\varphi_n = r\prod_{j=1}^{n}\sin\varphi_j,\ \ 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \pi,\ \ 0 \leqslant \varphi_j \leqslant \pi/2\ \ (j = 2, \ldots, n)$$

задача об устойчивости решения $x = \rho = z = 0$ системы (6) сводится к вопросу об устойчивости решения $r = z = 0$ системы

$$r^{\cdot} = \cos\varphi_1 X^* + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\cos\varphi_{i+1}\prod_{j=1}^{i}\sin\varphi_j\right)R_i^* + \left(\prod_{j=1}^{n}\sin\varphi_j\right)R_n^* \tag{8}$$

$$r\varphi_1^{\cdot} = r^2 Q_1 \sin\varphi_1 + \cos\varphi_1 \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(\cos\varphi_{i+1} \prod_{j=1}^{i} \sin\varphi_j\right) R_i^* + \right.$$
$$\left. + \left(\prod_{j=1}^{n} \sin\varphi_j\right) R_n^* \right] - \sin\varphi_1 X^*$$
$$\left(\prod_{j=1}^{s-1} \sin\varphi_j\right) \varphi_s^{\cdot} = \ldots \quad (s = 2, \ldots, n)$$
$$z_l^{\cdot} = \sum_{j=1}^{q} p_{lj} z_j + Z_l^* (r, \varphi, \theta, z) \quad (l = 1, \ldots, q)$$
$$Q_1 = b_1 \cos^2\varphi_2 + b_2 \cos^2\varphi_3 \sin^2\varphi_2 + \ldots$$
$$\ldots + b_{n-1} \cos^2\varphi_n \prod_{j=2}^{n-1} \sin^2\varphi_j + b_n \prod_{j=2}^{n} \sin^2\varphi_j$$

(без ограничения общности положено $a_s = -b_s$ $(s = 1, \ldots, n)$, X^*, R_s^*, Z_l^* — функции X, R_s, Z_l после подстановки (7)) относительно переменных r, z.

Производная от функции

$$V = r \exp(h \cos\varphi_1) + W, \quad h = \text{const}$$

(W определим из (4)) в силу уравнений (8) имеет вид

$$V^{\cdot} = \exp(h\cos\varphi_1) \left[\cos\varphi_1 X^* + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\cos\varphi_{i+1} \prod_{j=1}^{i} \sin\varphi_j\right) R_i^* + \right.$$
$$\left. + \left(\prod_{j=1}^{n} \sin\varphi_j\right) R_n^* \right] - hr^2 \sin^2\varphi_1 Q_1 - h\exp(h\cos\varphi_1) \sin\varphi_1 \times$$
$$\times \left\{ \cos\varphi_1 \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(\cos\varphi_{i+1} \prod_{j=1}^{i} \sin\varphi_j\right) R_i^* + \left(\prod_{j=1}^{n} \sin\varphi_j\right) R_n^* \right] - \right.$$
$$\left. - \sin\varphi_1 X^* \right\} - (z_1^2 + \ldots + z_q^2) + \sum_{l=1}^{q} \frac{\partial W}{\partial z_l} Z_l (r, \varphi, \theta, z)$$

Так как функция X не содержит членов, линейных относительно ρ, z, и функции X, R_s, Z_l обращаются в нуль при $\rho = z = 0$, то производную $V^{\cdot}$ можно переписать следующим образом:

$$V^{\cdot} = -hr^2 \sin^2\varphi_1 Q_1 - (z_1^2 + \ldots + z_q^2) + r_1^2 \sin^2\varphi_1 \Psi (r, \varphi, \theta, z) +$$
$$+ r \sin\varphi_1 \sum_{j=1}^{q} z_j \Psi_j (r, \varphi, \theta, z) + \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=}^{q} \Psi_{ij} (r, \varphi, \theta, z) z_i z_j$$

где функции Ψ, Ψ_j, Ψ_{ij} обращаются в нуль, если $r = z = 0$. Предположим, что все b_s $(s = 1, \ldots, n)$ одного знака. Тогда, выбирая h знака, противоположного знаку b_s, получим $hQ_1 > \text{const} > 0$ и в этом случае построенная функция V удовлетворяет всем условиям теоремы В. В. Румянцева [7] об устойчивости относительно переменных $r, z_1, \ldots, z_q$.

Теорема. Если выполняются условия

$$a_s b_s < 0 \quad (s = 1, \ldots, n)$$

и все коэффициенты b_s ($s = 1, \ldots, n$) одного знака, то нулевое решение $x = \rho = z = 0$ системы (6) устойчиво по Ляпунову.

Отметим, что теорема дает критерий устойчивости в случаях несущественно особенных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Собр. соч. Т. 2. Общая задача об устойчивости движения. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1956, с. 8.
2. *Каменков Г. В.* Избр. тр. Т. 2. Устойчивость и колебания механических систем. М.: Наука, 1971. 214 с.
3. *Румянцев В. В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 3, с. 440.
4. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
5. *Румянцев В. В.*, *Карепетян А. В.* Устойчивость движений неголономных систем.— В кн.: Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. Т. 3. М.: ВИНИТИ, 1976, с. 5.
6. *Медведев С. В.*, *Тхай В. Н.* Об устойчивости в одном критическом случае.— ПММ. 1979, т. 43, вып. 6, с. 963.
7. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных.— Вестн. МГУ, 1957, № 4, с. 9.

Москва

Поступила в редакцию
29.IV.1980