Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 3, 1981

УДК 531.36

О ЧАСТИЧНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И СХОДИМОСТИ ДВИЖЕНИЙ

Тереки Й., Хатвани Л.

С помощью модификации второго метода Ляпунова дается достаточное условие того, чтобы нулевое решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений было устойчиво относительно части переменных и эти переменные сходились к постоянным при больших временах. Результаты приложены к исследованию условий асимптотического приближения движений нестационарных механических систем к одному из положений равновесия при наличии сухого трения. Результат иллюстрирован примером симметричного гироскопа в кардановом подвесе.

В механических системах под действием диссипативных сил часто случается, что вдоль движений обобщенные координаты (или часть координат) стремятся к постоянным и обобщенные скорости стремятся к нулю при больших временах, т.е. система «асимптотически останавливается» [1—5].

Асимптотическая устойчивость и асимптотическая устойчивость по части переменных [1, 2] — частные случаи этого явления: обобщенные координаты стремятся к координатам положения равновесия. Ниже дается достаточное условие этого явления. Результат служит обобщением и дальнейшим развитием нескольких предыдущих результатов [6, 7]; он позволяет просто выводить известную теорему Ляпунова — Малкина [1, 8] о существовании предела части координат и получить ее обобщение для неавтономных систем вторым методом Ляпунова. В приложении к исследованиям голономных механических систем, на которые действуют потенциальные, гироскопические и диссипативные силы [3—5], оказывается, что явление «асимптотического останавливания» особенно характерно для действия сухого трения [9].

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$x^{\cdot} = X(t, x), \quad X(t, 0) \equiv 0, \quad x = (y_1, \ldots, y_p, z_1, \ldots, z_q)^T \tag{1.1}$$
$$n \geqslant p > 0, \quad p + q = n$$

в которой x — вещественный n-вектор. Введя обозначения $y = (y_1, \ldots$ $\ldots, y_p)^T$, $z = (z_1, \ldots, z_q),^T$, систему (1.1) приведем к виду

$$y^{\cdot} = Y(t, x), \quad z^{\cdot} = Z(t, x) \tag{1.2}$$

Обозначим

$$\|y\| = \Big(\sum_{i=1}^{p} y_i^2\Big)^{1/2}, \quad \|z\| = \Big(\sum_{i=1}^{q} z_i^2\Big)^{1/2}, \quad \|x\| = (\|y\|^2 + \|z\|^2)^{1/2}$$

Предположим, что векторные функции Y и Z непрерывны в области $t \in R_+ = [0, \infty)$, $\|y\| < H$, $0 < \|z\| < \infty$ и такие, что решения $(y(t; t_0, x_0), z(t; t_0, x_0))$ системы (1.2) непрерывно зависят от начальных данных $x_0 = (y(t_0; t_0, x_0), z(t_0; t_0, x_0))$ и z-продолжимы [2, 10]. Если непрерывная функция $V : \Gamma_y \to R$ удовлетворяет локальному условию Липшица относительно x на множестве

$$\Gamma_y = \{(t, x)\colon t \in R_+, \|y\| < H', 0 \leqslant \|z\| < \infty\} \; (0 < H' < H)$$

будем называть функцию

$$V^{\boldsymbol{\cdot}}(t, x) = \limsup_{h \to +0} (V(t+h, x + hX(t, x)) - V(t, x))/h$$

производной функции V в силу системы (1.1) [11].

Обозначим через K класс непрерывных строго возрастающих функций $a : R_+ \to R_+$, для которых $a(0) = 0$.

Теорема. Допустим, что для системы (1.2) существует непрерывная функция $V : \Gamma_y \to R$, удовлетворяющая локальному условию Липшица относительно x и следующим условиям на множестве Γ_y:

1) $V(t, x) \geqslant 0$

2) существуют функции

$$\omega \in K \text{ и } w : R_+ \to R_+ \left(\int_0^\infty w < \infty\right)$$

такие, что

$$V^{\boldsymbol{\cdot}}(t, x) \leqslant -\omega(\|y\|)\,\|Y(t, x)\| + w(t)$$

Тогда

а) если $V(t, 0) \to 0$ при $t \to \infty$, то нулевое решение системы (1.2) y-устойчиво;

б) для любого решения $x(t) = (y(t), z(t))^T$ системы (1.2), для которого $\|y(t)\| \leqslant H'$ при $t \geqslant t_0$, функция $y(t)$ имеет конечный предел при $t \to \infty$.

Доказательство. Пусть $x(t)$ — решение (1.2), $0 < \gamma' < \gamma'' < H'$. Предположим, что существуют $T, t', t'', k \; (T \leqslant t' < t'', 1 \leqslant k \leqslant p)$, такие, что $|y_k(t')| = \gamma'$, $|y_k(t'')| = \gamma''$. Тогда, обозначая $v(t) = V(t, x(t))$, имеем

$$v(t') - v(t'') \geqslant -\int_{t'}^{t''} V^{\boldsymbol{\cdot}}(t, x(t))\,dt \geqslant -\int_T^{t''} w(t)\,dt + \\ + \int_{t'}^{t''} \omega(|y_k(t)|)\,|Y_k(t, x(t))|\,dt \geqslant -\int_T^{t''} w(s)\,ds + \\ + \int_{\gamma'}^{\gamma''} w(\tau)\,d\tau = I(T, t'', \gamma', \gamma'') \tag{1.3}$$

а) Пусть $t_0 \in R_+$ и $\varepsilon > 0$ даны. В силу условий

$$V(t, 0) \to 0 \quad (t \to \infty) \text{ и } \int_0^\infty w < \infty$$

существуют $\delta_1 \; (0 < \delta_1 < \varepsilon/(2p))$ и $T > t_0$, такие, что из $\|x\| < \delta_1$ и $T < t''$ следует $V(T, x) < I(T, t'', \varepsilon/(2p), \varepsilon/p)$. Решения зависят непрерывно от начальных данных, поэтому существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, такое, что при $\|x_0\| < \delta$ неравенство $\|x(t;\ t_0, x_0)\| < \delta_1$ удовлетворяется в интервале $[t_0, T]$. Докажем, что $\|y(t;\ t_0, x_0)\| < \varepsilon$ при $t \geqslant t_0$, т. е. нулевое решение системы (1.2) y-устойчиво. В противном случае существуют числа t', t'',

k $(T < t' < t'',\ 1 \leqslant k \leqslant p)$, такие, что $|y_k(t')| = \varepsilon/(2p)$, $|y_k(t'')| = \varepsilon/p$. Тогда в силу (1.3)

$$V(T, x(T)) = v(T) \geqslant -\int_T^{t''} v^{\cdot}(t)\,dt \geqslant I\left(T, t'', \frac{\varepsilon}{2p}, \frac{\varepsilon}{p}\right)$$

а это противоречит определению δ_1.

б) Если утверждение теоремы неверно, тогда существуют числа γ', γ'', k $(0 < \gamma' < \gamma'',\ 1 \leqslant k \leqslant p)$ и последовательности $\{t_i'\}$, $\{t_i''\}$, такие, что $t_0 < t_i' < t_i'' < t_{i+1}'$, $|y_k(t_i')| = \gamma'$, $|y_k(t_i'')| = \gamma''$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Тогда в силу (1.3)

$$v(t_i'') \leqslant v(t_0) - i\int_{\gamma'}^{\gamma''} \omega(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t_i''} w(s)\,ds \to -\infty \quad (i \to \infty)$$

что противоречит условию 1).

Из доказанной теоремы можно вывести и условия асимптотической y-устойчивости.

Определение [12]. Нулевое решение системы (1.2) обладает свойством слабого притяжения по отношению к y, если для любого $t_0 \in R_+$ существует $\sigma > 0$, такое, что

$$\liminf_{t\to\infty} \| y(t;\ t_0,\ x_0) \| = 0 \text{ при } \| x_0 \| < \sigma$$

Следствие 1.1. Если условия теоремы 1.1 выполняются и $V(t, 0) \to 0$ $(t \to \infty)$, то свойство слабого притяжения по отношению к y влечет за собой асимптотическую y-устойчивость нулевого решения.

Следствие 1.2. Если существует неотрицательная функция $V: \Gamma_y \to R$ $(V(t, 0) \equiv 0)$, производная которой в силу системы (1.2) определенно-отрицательна по отношению к y и функция Y ограничена на множестве Γ_y, то нулевое решение системы (1.2) асимптотически y-устойчиво.

Доказательство. Функция $V^{\cdot}(t, x)$ определенно-отрицательна по отношению к y, поэтому существует функция $c \in K$, такая, что $V^{\cdot}(t, x) \leqslant -c(\|y\|)$. Пусть $\|Y(t, x)\| \leqslant M$ $((t, x) \in \Gamma_y)$. Тогда $V^{\cdot}(t, x) \leqslant -(c(\|y\|)/M)\,\|Y(t, x)\|$ и условия теоремы 1.1 выполнены. С другой стороны, $V \geqslant 0$ и функция $V^{\cdot}$ определенно-отрицательна по отношению к y; следовательно, нулевое решение обладает свойством слабого притяжения по отношению к y.

Замечание 1.1. Следствие 1.2 отличается от обобщения теоремы Марачкова для частичной устойчивости [10] только тем, что условия определенной положительности функции V не потребовано. Однако надо заметить, что, следуя методу работ [13, 14] можно доказать: из условий следствия 1.2 вытекает определенная положительность функции V по отношению к y.

Вследствии 1.2 свойство притяжения обеспечено определенной отрицательностью функции $V^{\cdot}$. В следующем утверждении дадим достаточное условие для свойства притяжения с помощью функции Y.

Лемма. Если существуют непрерывные функции a, $b: R_+ \to R$ и $\tau_0 > 0$, такие, что

$$b(\tau) > 0 (\tau > 0),\ b(0) = 0,\ \int_1^H \frac{1}{b(\tau)}\,d\tau = \infty$$

$$2\liminf_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds \leqslant \int_{\tau_0}^{0} \frac{1}{b(\tau)}\,d\tau$$

при всех $t_0 \geqslant 0$ и

$$(1.4)\qquad y^T Y(t, x) \leqq a(t)\, b(\|y\|^2) \quad (t \in R_+,\ \|y\| \leqslant H)$$

то нулевое решение обладает свойством притяжения по отношению к y.

Доказательство. Из (1.4) вытекает, что для всякого решения системы (1.2)

$$d(\|y(t)\|^2)/dt \leqq 2y^T(t) Y(t, x(t)) \leqslant 2a(t) b(\|y(t)\|^2)$$

В силу свойств функций a, b максимальное решение [11] задачи Коши [$\tau^{\cdot} = 2a(t)b(\tau)$; $\tau(t_0) = \tau_0$] определено для $t \geqslant t_0$ и $\liminf_{t\to\infty}\tau^*(t) = 0$. С другой стороны, по основной теореме теории дифференциальных неравенств [11] $\|y(t)\|^2 \leqslant \tau^*(t)$ при $\|y(t_0)\|^2 < \tau_0$, поэтому решение $x(t)$ определено для $t \geqslant t_0$ и $\liminf_{t\to\infty}\|y(t)\| = 0$, т. е. нулевое решение обладает свойством слабого притяжения по отношению к y.

2. Рассмотрим систему

$$(2.1)\qquad y^{\cdot} = Y(t, x),\quad z^{\cdot} = A(t) z + Z(t, x)$$

где x, y, z, Y, Z — такие же, как в (1.2), A — непрерывная матрица-функция $q \times q$, определенная на R_+. Предположим, что существуют постоянные $c > 0$, $0 < \gamma \leqq 1$, такие, что на множестве Γ_y

$$(2.2)\qquad \|Y(t, x)\| \leqslant c\|z\|^\gamma,\quad \|Z(t, x)\| = o(\|z\|)\quad (x \to 0)$$

Уравнения движения многих механических систем можно привести к виду (2.1) [3—5]. Ляпунов [1] доказал, что если матрица A постоянная, ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части и $\gamma = 1$, то нулевое решение системы (2.1) устойчиво, функция $y(t)$ имеет конечный предел при $t \to \infty$. В работе [15] эта теорема обобщена для случая, когда матрица A зависит от t и $0 < \gamma \leqslant 1$, но доказательство дано только при дополнительных ограничениях на функцию $A(t)$. С помощью доказанной выше теоремы легко дать доказательство методом Ляпунова для случая произвольной матрицы-функции $A(t)$.

Следствие 2.1. Если нулевое решение системы

$$(2.3)\qquad u^{\cdot} = A(t)\, u$$

экспоненциально-асимптотически устойчиво, то нулевое решение системы (2.1) устойчиво, асимптотически z-устойчиво и при достаточно малых начальных значениях $\|x(t_0)\|$ функция $y(t)$ имеет конечный предел при $t \to \infty$.

Доказательство. Так как нулевое решение системы (2.3) экспоненциально-асимптотически устойчиво, то существует непрерывная функция $V: R_+ \times R^q \to R$, такая, что

$$\alpha_1\|z\| \leqslant V(t, z) \leqslant \alpha_2\|z\|,\quad |V(t, z) - V(t, z')| \leqslant \alpha_3\|z - z'\|,$$
$$V^{\cdot}_{(2.3)}(t, z) \leqslant -\alpha_4\|z\|$$

В силу (2.2) существуют постоянные $\alpha_5 > 0$ и H'' $(0 < H'' < H')$, такие, что

$$(2.4)\qquad V^{\cdot}_{(2.1)}(t, x) \leqslant V^{\cdot}_{(2.3)}(t, z) + \alpha_3\|z(t, x)\| \leqslant -\alpha_5\|z\|$$

при $\|x\| < H''$. Функция $W(t, x) = V^\gamma(t, z) + \varepsilon\|y\|$ с фиксированным числом ε $(0 < \varepsilon < \gamma\alpha_5\alpha_2^{\gamma-1}/c)$ удовлетворяет локальному условию Липшица при $\|z\| > 0$ и

$$(2.5)\qquad W^{\cdot}_{(2.1)}(t, x) \leqslant \gamma V^{\gamma-1}(t, z) V^{\cdot}_{(2.1)}(t, x) + \varepsilon\|Y(t, x)\| \leqslant$$
$$\leqslant -\alpha_6\|Y(t, x)\|\quad (\alpha_6 = -\varepsilon + \gamma\alpha_5\alpha_2^{\gamma-1}/c > 0)$$

при $\|x\| \leqslant H''$, $\|z\| > 0$. Если для решения $(y(t), z(t))^T$ системы (2.1) $z(T) = 0$, то $z(t) \equiv 0$ и вследствие условия (2.2) $y(t) \equiv y(T)$ при $t \geqslant T$. Следовательно, достаточно изучать только такие решения, для которых $\|z(t)\| > 0$ при $t \geqslant t_0$. В силу свойств функций V, W и оценок (2.4), (2.5) нулевое решение системы (2.1) устойчиво по отношению к x и асимптотически z-устойчиво [10]. Следовательно, вдоль решений с достаточно малыми начальными значениями неравенство (2.5) выполнено, поэтому теорема п. 1 применима к системе (2.1) и функции W, откуда вытекает существование предела функции $y(t)$ при $t \to \infty$.

Замечание 2.1. В случае, когда $\gamma = 1$, $A(t)$ ограничена и $Y(t, x)$ непрерывно дифференцируема, устойчивость и асимптотическая z-устойчивость вытекают из теоремы 3 работы [16], где изучались свойства устойчивости нулевого решения системы типа (2.1) по первому приближению при весьма общих условиях на функцию $Y(t, x)$.

3. Рассмотрим голономную механическую систему со связями, зависящими от времени, описываемую уравнением Лагранжа

(3.1) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q^\cdot} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q, \quad L = L_2 + L_1 + L_0$$
$$L_2 = {}^1/_2 (q^\cdot)^T A(t, q) q^\cdot, \; L_1 = B(q)^T q^\cdot, \; L_0 = L_0(t, q)$$

Здесь $q \in R_n$ — вектор обобщенных координат; A, B, L_0 имеют непрерывные частные производные и существует постоянная $\alpha > 0$, такая, что

$$\alpha \|q^\cdot\|^2 \leqslant (q^\cdot)^T A(t, q) q^\cdot \; ((t, q, q^\cdot) \in \Gamma_q \subset R^{2n+1})$$

На систему действуют и диссипативные и гироскопические силы, равнодействующая которых обозначается $Q = Q(t, q, q^\cdot)$, значит $Q^T q^\cdot \leqslant 0$. Пусть $q = q^\cdot = 0$ — положение равновесия системы (3.1).

Следствие 3.1. Допустим, что существует функция $\omega \in K$, такая, что выполняется неравенство

(3.2) $$Q^T(t, q, q^\cdot)\, q^\cdot \leqslant -\omega(\|q\|) \|q^\cdot\|$$

и $L_0 \leqslant 0$, $\partial L / \partial t \geqslant 0$ на множестве Γ_q в пространстве $(t, q, q^\cdot) \in R^{2n+1}$. Тогда

а) если $L_0(t, 0) \equiv 0$ при $t \geqslant 0$, то положение равновесия $q = q^\cdot = 0$ системы (3.1) устойчиво;

б) любое движение $q(t)$ системы (3.1), для которого $\|q(t)\| \leqslant H'$ при $t \geqslant t_0$, имеет конечный предел при $t \to \infty$.

Доказательство. Матрица A определенно-положительная, поэтому систему (3.1) можно переписать в виде

(3.3) $$\frac{d}{dt} q = q^\cdot, \qquad \frac{d}{dt} q^\cdot = F(t, q, q^\cdot)$$

Известно [17], что

(3.4) $$\frac{d}{dt}(L_2 - L_0) = -\frac{\partial L}{\partial t} + Q^T q^\cdot$$

Следовательно, производная функции Ляпунова $V = L_2 - L_0$ в силу системы (3.1) удовлетворяет неравенству $V^\cdot(t, q, q^\cdot) \leqslant -\omega(\|q^\cdot\|) \|q^\cdot\|$. Так как функция V определенно-положительная по отношению к $q^\cdot$ и $V^\cdot \leqslant 0$, положение равновесия $q = q^\cdot = 0$ $q^\cdot$-устойчиво [10]. С другой стороны, для системы (3.3) и функции V условия теоремы из п. 1 выполнены, поэтому положение равновесия q-устойчиво и $q(t)$ имеет конечный предел при $t \to \infty$.

Заметим, что условие (3.2) исключает непрерывность функции Q. Однако можно видеть, что утверждения теоремы из п. 1 остаются справедливыми без условия непрерывности функции X, если предположить, что: а) функция $X(t, x)$ измерима в области Γ_y и для любой ограниченной замкнутой области $D \subset \Gamma_y$ существует такая суммируемая функция $\tau(t)$, что почти всюду в D будет $\| X(t, x) \| \leqslant \tau(t)$; б) решение системы (1.1) понимается в смысле [18], т. е. вектор-функция $x(t)$, определенная на интервале (t_1, t_2), называется решением уравнения (1.1), если она абсолютно непрерывна и если при почти всех $t \in (t_1, t_2)$ для любого $\delta > 0$ вектор $dx(t)/dt$ принадлежит наименьшему выпуклому замкнутому множеству, содержащему все значения вектор-функции $X(t, x')$, когда x' пробегает почти всю δ-окрестность точки $x(t)$ в пространстве x (при фиксированном t); в) функция $V(t, x)$ непрерывно дифференцируема; г) $w(t) \equiv 0$, $V(t, 0) \equiv 0$; в этом случае в доказательстве теоремы из п. 1 условие непрерывной зависимости решений от начальных данных не используется. Система (3.3) и оценка (3.2), очевидно, удовлетворяют этим условиям.

Условия $L_0 \leqslant 0$ и $L_0(t, 0) = 0$ вместе означают, что потенциальная энергия имеет минимум для $q = 0$ при всех $t \geqslant 0$. Функция Лагранжа имеет свойство $\partial L/\partial t \geqslant 0$, если, например, при любых фиксированных значениях обобщенных координат и скоростей кинетическая энергия — возрастающая, а потенциальная энергия — убывающая функция от t. Условию (3.2) удовлетворяют силы сухого трения [9]

$$Q = \begin{cases} -cq^{\cdot}/\| q^{\cdot} \|, & q^{\cdot} \neq 0 \\ T(t, q), & q^{\cdot} = 0 \end{cases}, \qquad Q_i = \begin{cases} -F_i \operatorname{sign} q_i^{\cdot}, & q_i^{\cdot} \neq 0 \\ T_i(t, q, q^{\cdot}), & q_i^{\cdot} = 0 \end{cases}$$

$$(0 < c = \text{const}, \ 0 < F_i = \text{const}, \ i = 1, \ldots, n)$$

4. Рассмотрим движение симметричного гироскопа в кардановом подвесе с учетом масс колец подвеса. Предположим, что неподвижная ось вращения внешнего кольца вертикальна, внутреннего — горизонтальна и пусть центр тяжести гироскопа и внутреннего кольца расположен на оси симметрии гироскопа. Положение этой системы можно определить тремя углами Эйлера [19]: нутации θ, прецессии ψ и собственного вращения φ гироскопа. Допустим, что помимо сил тяжести на гироскоп действуют также силы трения в осях подвеса.

В работе [19] дано достаточное условие асимптотической устойчивости вертикального вращения $\theta = \theta^{\cdot} = 0, \psi^{\cdot} = \text{const}, \varphi^{\cdot} = \text{const}$ при наличии вязкого трения с полной диссипацией. В работе [20] изучены движение гироскопа в случае, когда действуют силы сухого трения, моменты которых относительно осей подвеса определяются формулами [20]

$$M_1 = \begin{cases} -D_1 \operatorname{sign} \theta^{\cdot}, & \theta^{\cdot} \neq 0 \\ D_1 \operatorname{sign} f_1(\psi^{\cdot}, \theta), & \theta^{\cdot} = 0, \ | f_1(\psi^{\cdot}, \theta) | > D_1 \\ f_1(\psi^{\cdot}, \theta), & \theta^{\cdot} = 0, \ | f_1(\psi^{\cdot}, \theta) | \leqslant D_1 \end{cases}$$

$$M_2 = \begin{cases} -D_2 \operatorname{sign} \psi^{\cdot}, & \psi^{\cdot} \neq 0 \\ D_2 \operatorname{sign} f_2(\theta^{\cdot}, \theta), & \psi^{\cdot} = 0, \ | f_2(\theta^{\cdot}, \theta)| > D_2 \\ f_2(\theta^{\cdot}, \theta), & \psi^{\cdot} = 0, \ | f_2(\theta^{\cdot}, \theta) | \leqslant D_2 \end{cases}$$

$$f_1(\psi^{\cdot}, \theta) = -(A + B_1 - C_1) \psi^{\cdot 2} \sin\theta \cos\theta + C\tau_0 \psi^{\cdot} \sin\theta - S z_0 \sin\theta$$

$$f_2(\theta^{\cdot}, \theta) = -C\tau_0 \theta^{\cdot} \sin\theta, \quad \tau_0 = \varphi^{\cdot} + \psi^{\cdot} \cos\theta$$

Здесь D_1, D_2 — положительные постоянные, S — вес гироскопа и внутреннего кольца, A, A, C — главные моменты инерции гироскопа, A_1, B_1, C_1 — главные моменты инерции внутреннего кольца относительно осей системы координат, жестко связанной с внутренним кольцом. Легко увидеть (см. [20]), что эти силы трения при достаточно малых значениях $|\theta_0|$ допускают движение $\theta = \theta_0 = \text{const}$, $\theta^\cdot = \psi^\cdot = 0$, $\varphi^\cdot = \text{const}$, представляющее собой перманентное вращение относительно оси, наклоненной под углом $\theta = \theta_0$ к вертикали. Было доказано [20], что если в положении $\theta = 0$ центр тяжести гироскопа и внутреннего кольца находятся под совместным центром колец, тогда эти движения устойчивы.

Изучим условия «асимптотического останавливания» гироскопа. После игнорирования циклической координаты уравнения движения имеют вид (R — функция Рауса [19])

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \theta^\cdot} - \frac{\partial R}{\partial \theta} = -\frac{\partial P}{\partial \theta} + M_1 \\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \psi^\cdot} - \frac{\partial R}{\partial \psi} = M_2 \\
&2R = A\,(\theta^{\cdot 2} + \psi^{\cdot 2}\sin^2\theta) + A_1\theta^{\cdot 2} + B_1\psi^{\cdot 2}\sin^2\theta + \\
&+ C_1\psi^{\cdot 2}\cos^2\theta + A_2\Psi^{\cdot 2}, \quad P = Sz_0\,(\cos\theta + 1)
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Как известно

$$(R + P)^\cdot = M_1\theta^\cdot + M_2\Psi^\cdot \leqslant -D_1\,|\theta^\cdot| - D_2\,|\Psi^\cdot|$$

Кроме того, функция $R + P$ ограничена снизу вдоль движений, следовательно, $\int^\infty |\theta^\cdot| < \infty, \int^\infty |\psi^\cdot| < \infty$. Утверждаем, что $\theta^\cdot(t) \to 0$, $\psi^\cdot(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Предположим, например, что $\theta^\cdot(t)$ не стремится к нулю при $t \to \infty$. Тогда существуют $t_k' < t_k'' < t_{k+1}'$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $\delta > 0$, такие, что $t_k'' - t_k' \to 0$,

$$\left|\int_{t_k'}^{t_k''} \theta^{\cdot\cdot}(t)\,dt\right| = |\theta^\cdot(t_k'') - \theta^\cdot(t_k')| = \delta \quad (k \to \infty)$$

что противоречит ограниченности $\theta^{\cdot\cdot}(t_0)$.

С другой стороны, система (4.1) удовлетворяет условиям утверждения б) следствия 2.2, поэтому $\theta(t) \to \text{const}$, $\Psi(t) \to \text{const}$ и вследствие циклического интеграла $\varphi^\cdot + \psi^\cdot\cos\theta = \tau_0$ функция $\varphi^\cdot(t) \to \text{const}$ при $t \to \infty$.

Этим доказано следующее утверждение: если на оси подвеса действуют силы сухого трения с моментами M_1 и M_2, тогда при любых начальных условиях $\theta(t) \to \text{const}$, $\psi(t) \to \text{const}$, $\theta^\cdot(t)$, $\Psi^\cdot(t) \to 0$, $\varphi^\cdot(t) \to \text{const}$ при $t \to \infty$, т. е. каждое движение асимптотически приближается к одному из перманентных вращений $\theta = \text{const}$, $\theta^\cdot = \psi^\cdot = 0$, $\varphi^\cdot = \text{const}$.

Авторы благодарят Румянцева В. В. за внимание к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.— Л.: Гостехиздат, 1950, 472 с.
2. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных.— Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии, 1957, № 4, с. 9.
3. *Матросов В. М.* К вопросу устойчивости гироскопических систем с диссипацией.— Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1959, т. 45.
4. *Матросов В. М.* К вопросу устойчивости гироскопических систем.— Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1959, т. 49, с. 24.
5. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974, 344 с.
6. *Burton T. A.* An extension of Liapunov's direct method.— J. Math. Anal. Appl., 1969, v. 28, No. 3, p. 545.

7. *Haddock J. R.* Some new results on stability and convergence of solutions of ordinary and functional differential equations.— Funkc. Ekvacioj, 1976, No. 3, v. 19, p. 247.
8. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
9. *Пэнлеве П.* Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
10. *Озиранер А. С., Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 2, с. 364.
11. *Lakshmikantham V., Leela S.* Differential and integral inequalities. V. 1. New York — London: Acad. Press, 1969. 390 p.
12. *Rouche N., Habets P., Laloy M.* Stability theory by Liapunov's direct method. New York — Heidelberg — Berlin: Springer Verlag, 1977. 369 p. (Рус. перев.: М.: Мир, 1980.)
13. *Haddock J. R.* A remark on a stability theorem of M. Marachkoff.— Proc. Amer. Math. Soc., 1972, v. 31, No. 1, p. 209.
14. *Озиранер А. С.* О некоторых теоремах второго метода Ляпунова.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 3, с. 396.
15. *Halanay A.* Differential equations: stability, oscillations, time lags. New York: Acad. Press, 1966. 528 p.
16. *Озиранер А. С.* Об устойчивости неустановившихся движений по первому приближению.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 3, с. 424.
17. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Физматгиз, 1960. 296 с.
18. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.— Матем. сб., 1960, т. 51 (93), № 1, с. 99.
19. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе.— ПММ, 1958, т. 22, вып. 3, с. 374.
20. *Крементуло В. В.* Устойчивость гироскопа, имеющего вертикальную ось внешнего кольца, при учете сухого трения в осях подвеса.— ПММ, 1960, т. 24, вып. 3, с. 568.

Венгрия

Поступила в редакцию
28.III.1980