Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 3, 1981

УДК 536.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Озиранер А. С.

С помощью метода функций Ляпунова доказывается ряд теорем об устойчивости движения относительно части переменных при постоянно действующих возмущениях. Приводятся примеры.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{X}(t, 0) \equiv 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \tag{1.1}$$

в которой [1] $\mathbf{x} = (y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p)$, $m > 0$, $p \geqslant 0$, $n = m + p$. Предположим, что: а) правые части системы (1.1) в области

$$t \geqslant 0, \quad \|\mathbf{y}\| \leqslant H > 0, \quad \|\mathbf{z}\| < +\infty \tag{1.2}$$

непрерывны и удовлетворяют условиям единственности решения; б) решения системы (1.1) $\mathbf{z}$-продолжимы.

Наряду с системой (1.1) рассмотрим «возмущенную» систему

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{R}(t, \mathbf{x}) \tag{1.3}$$

относительно которой предполагается выполнение условий а) и б), причем, вообще говоря, $\mathbf{R}(t, 0) \not\equiv 0$. Обозначим через $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ решение системы (1.3), определенное начальными условиями $\mathbf{x}(t_0; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$.

Обобщая введенные в работах [2—6] понятия на задачу устойчивости относительно части переменных, сформулируем следующие определения.

Определение 1. Движение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) называется $\mathbf{y}$-устойчивым при постоянно действующих возмущениях (п.д.в.), малых в каждый момент времени (малых в среднем или малых интегрально), если для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geqslant 0$ (соответственно $\varepsilon > 0$, $t_0 \geqslant 0$, $T > 0$ или $\varepsilon > 0$, $t_0 \geqslant 0$) существуют $\delta_1(\varepsilon, t_0) > 0$, $\delta_2(\varepsilon, t_0) > 0$ (соответственно $\delta_1(\varepsilon, t_0, T) > 0$, $\delta_2(\varepsilon, t_0, T) > 0$ или $\delta_1(\varepsilon, t_0) > 0$, $\delta_2(\varepsilon, t_0) > 0$), такие, что всякое решение $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ с $\|\mathbf{x}_0\| < \delta_1$ любой системы (1.3), для которой в области (1.4) выполняется условие (1.5)

$$t \geqslant t_0, \quad \|\mathbf{y}\| < \varepsilon, \quad 0 \leqslant \|\mathbf{z}\| < +\infty \tag{1.4}$$

$$\|\mathbf{R}(t, \mathbf{x})\| < \delta_2 \tag{1.5}$$

(соответственно (1.6) или (1.7))

$$\int\limits_t^{t+T} \sup [\|\mathbf{R}(\tau, \mathbf{x})\| : \|\mathbf{y}\| \leqslant \varepsilon, 0 \leqslant \|\mathbf{z}\| < +\infty]\, d\tau \leqslant \tag{1.6}$$

$$\leqslant \delta_2 \text{ при всех } t \geqslant t_0$$

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} \sup [\|\mathbf{R}(\tau, \mathbf{x})\| : \|\mathbf{y}\| \leqslant \varepsilon,\ 0 \leqslant \|\mathbf{z}\| < +\infty]\, d\tau \leqslant \delta_2 \tag{1.7}$$

при всех $t \geqslant t_0$ удовлетворяет неравенству $\|\mathbf{y}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$.

Определение 2. Если в определении 1 для любого $\varepsilon > 0$ (для любых $\varepsilon > 0$, $T > 0$ или для любого $\varepsilon > 0$) можно выбрать $\delta_1(\varepsilon) > 0$, $\delta_2(\varepsilon) > 0$ (соответственно $\delta_1(\varepsilon, T) > 0$, $\delta_2(\varepsilon, T) > 0$ или $\delta_1(\varepsilon) > 0$, $\delta_2(\varepsilon) > 0$) не зависящими от $t_0 \geqslant 0$, то **y**-устойчивость при п.д.в., малых в каждый момент времени (малых в среднем или малых интегрально) называется равномерной. (Равномерная устойчивость при п.д.в., малых в каждый момент времени, называется также [7, 8] тотальной устойчивостью.)

Если в определении 1 заменить неравенство $\|\mathbf{x}_0\| < \delta_1$ условием $\|\mathbf{y}_0\| < \delta_1$ ($\|\mathbf{z}_0\| < \infty$), то из определений 1 и 2 получаются определения устойчивости (равномерной устойчивости) при п.д.в., малых в каждый момент времени (малых в среднем или малых интегрально), множества

$$\{\mathbf{x}:\ \mathbf{y} = 0\} \tag{1.8}$$

в предположении, что оно инвариантно в силу системы (1.1). Ясно, что из устойчивости при п.д.в. инвариантного множества (1.8) следует **y**-устойчивость при п.д.в. движения $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1). Очевидно также, что из устойчивости (равномерной устойчивости) при п.д.в., малых в среднем, вытекает устойчивость (равномерная устойчивость) при п.д.в., малых в каждый момент времени, а это, в свою очередь, влечет за собой устойчивость (равномерную устойчивость) при п.д.в., малых интегрально.

2. *Теорема* 1. Предположим, что существует функция $V(t, \mathbf{x})$, обладающая непрерывными и ограниченными частными производными по координатам

$$\|\partial V / \partial \mathbf{x}\| \leqslant N = \text{const} \tag{2.1}$$

удовлетворяющая неравенствам

$$V(t, \mathbf{x}) \geqslant a(\|\mathbf{y}\|) \tag{2.2}$$

$$V(t, \mathbf{x}) \leqslant b\left(\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right)^{1/2}\right), \quad m \leqslant k \leqslant n \tag{2.3}$$

производная по времени, от которой в силу системы (1.1)

$$\dot{V}_{(1.1)}(t, \mathbf{x}) \leqslant -c\left(\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right)^{1/2}\right) \tag{2.4}$$

Здесь $a(r)$, $b(r)$ и $c(r)$ — непрерывные монотонно возрастающие функции, обращающиеся в нуль при $r = 0$. Тогда движение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) равномерно **y**-устойчиво при п. д. в., малых в каждый момент времени.

Доказательство. Производные от функции $V(t, \mathbf{x})$ в силу систем (1.1) и (1.3) связаны соотношением

$$(2.5)\qquad V^{\bullet}_{(1.3)}(t,\mathbf{x})=V^{\bullet}_{(1.1)}(t,\mathbf{x})+\frac{\partial V(t,\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{R}(t,\mathbf{x})$$

Согласно (2.3)

$$\Big(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\Big)^{1/2}\geqslant b^{-1}(V(t,\mathbf{x}))$$

(b^{-1} — функция, обратная к b), что совместно с (2.4) приводит к неравенству

$$(2.6)\qquad V^{\bullet}_{(1.1)}(t, \mathbf{x})\leqslant -c\,(b^{-1}(V, (t, \mathbf{x})))$$

Из (2.5) на основании (2.6) и (2.1) получаем

$$(2.7)\qquad V^{\bullet}_{(1.3)}(t,\mathbf{x})\leqslant -c\,(b^{-1}(V(t,\mathbf{x})))+N\,\|\mathbf{R}(t,\mathbf{x})\|$$

Пусть дано $\varepsilon\in(0, H)$. Положим $\delta_1(\varepsilon)=b^{-1}(a(\varepsilon))$, $\delta_2(\varepsilon)= c\,(b^{-1}(a(\varepsilon)))\,/\,N$. Если в области (1.4) выполняется условие (1.5), то из (2.7) следует

$$(2.8)\qquad V^{\bullet}_{(1.3)}(t,\mathbf{x})\,|_{V(t,\mathbf{x})=a(\varepsilon)}<0$$

Рассмотрим произвольное решение $\mathbf{x}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0)$ системы (1.3) с $t_0\geqslant 0$, $\|\mathbf{x}_0\|<\delta_1$. В силу (2.2) $V(t_0, \mathbf{x}_0)<a(\varepsilon)$. Покажем, что

$$(2.9)\qquad V(t, \mathbf{x}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0))<a(\varepsilon)\ \text{при всех}\ t\geqslant t_0$$

Допустим, от противного, что $V(t, \mathbf{x}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0))<a(\varepsilon)$ при $t\in[t_0, t_1)$, но $V(t_1, \mathbf{x}(t_1;\ t_0, \mathbf{x}_0))=a(\varepsilon)$. Тогда, очевидно, $V^{\bullet}_{(1.3)}(t_1, \mathbf{x}(t_1;\ t_0, \mathbf{x}_0))\geqslant 0$, что противоречит неравенству (2.8).

Из (2.9) на основании (2.2) заключаем, что $\|\mathbf{y}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0)\|<\varepsilon$ при всех $t\geqslant t_0$. Теорема доказана.

В частном случае, когда $k=m$, справедливо следующее более сильное утверждение.

Теорема 2. Предположим, что существует функция $V(t, \mathbf{x})$, удовлетворяющая условиям (2.1), (2.2), (2.10) и (2.11)

$$(2.10)\qquad V(t, \mathbf{x})\leqslant b\,(\|\mathbf{y}\|)$$

$$(2.11)\qquad V^{\bullet}(t, \mathbf{x})\leqslant -c\,(\|\mathbf{y}\|)$$

Тогда инвариантное [1, 9] в силу системы (1.1) множество (1.8) равномерно устойчиво при п. д. в., малых в среднем.

Доказательство. Поскольку, согласно (2.10), $V(t, 0, \mathbf{z})\equiv 0$, то из (2.1) следует, что

$$(2.12)\qquad V(t, \mathbf{x})\leqslant N\,\|\mathbf{y}\|$$

Пусть дано $\varepsilon\in(0, H)$. Введем обозначение (см. (1.6))

$$(2.13)\qquad \varphi(t)=\sup\,[\|\mathbf{R}(t,\mathbf{x})\|:\|\mathbf{y}\|\leqslant\varepsilon,\ 0\leqslant\|\mathbf{z}\|<\infty]$$

и рассмотрим функцию [3, 4] $f(t, \mathbf{x})=V(t, \mathbf{x})\,e^{\beta(t)}$. Ее производная в силу системы (1.3), согласно (2.1) и (2.13), при $\|\mathbf{y}\|\leqslant\varepsilon$ удовлетворяет неравенству

(2.14) $$f^{\cdot}_{(1.3)}(t,\mathbf{x}) = e^{\beta(t)}\beta^{\cdot}(t)V(t,\mathbf{x}) + e^{\beta(t)}V^{\cdot}_{(1.1)}(t,\mathbf{x}) + e^{\beta(t)}\frac{\partial V(t,\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{R}(t,\mathbf{x}) \leqslant f(t,\mathbf{x})[\beta^{\cdot}(t) + V^{\cdot}_{(1.1)}(t,\mathbf{x})/V(t,\mathbf{x}) + N\varphi(t)/V(t,\mathbf{x})]$$

Положим $\delta_1(\varepsilon) = h\varepsilon / N$, где $h = h(\varepsilon) \in (0, 1)$ будет выбрано позднее. Согласно (2.12)

(2.15) $$V(t, \mathbf{x}) \leqslant h\varepsilon \quad \text{при } \|\mathbf{y}\| \leqslant \delta_1$$

В области (2.16) имеют место неравенства (2.17)

(2.16) $$t \geqslant 0, \quad \delta_1 \leqslant \|\mathbf{y}\| \leqslant \varepsilon, \quad 0 \leqslant \|\mathbf{z}\| < \infty$$

(2.17) $$a(\delta_1) \leqslant V(t,\mathbf{x}) \leqslant N\varepsilon, \quad V^{\cdot}_{(1.1)}(t,\mathbf{x}) \leqslant -c(\delta_1)$$

следовательно, $f_{(1.3)}$ в области (2.16) удовлетворяет оценке

(2.18) $$f_{(1.3)}(t, \mathbf{x}) \leqslant f(t, \mathbf{x})[\beta^{\cdot}(t) - c(\delta_1)/(N\varepsilon) + N\varphi(t)/a(\delta_1)]$$

Выберем $\delta_2(\varepsilon, T)$ в (1.6) из условия

(2.19) $$\delta_2(\varepsilon, T) = (1 - q)\, c(\delta_1)\, a(\delta_1)\, T/(N^2\varepsilon)$$

где $q = q(\varepsilon) \in (0,1)$ будет определено позднее, и построим функцию $\psi(t)$ $(t \geqslant 0)$ так, чтобы при всех $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ выполнялось равенство

(2.20) $$\int\limits_{\mu T}^{(\mu+1)T} \psi(t)\,dt = \int\limits_{\mu T}^{(\mu+1)T} [(1-q)\,c(\delta_1)/(N\varepsilon) - N\varphi(t)/a(\delta_1)]\,dt$$

В силу (1.6) и (2.19) можно считать, что $\psi(t) \geqslant 0$ при всех $t \geqslant 0$. Положим

(2.21) $$\beta(t) = \int\limits_0^t [-\psi(\tau) + (1-q)\,c(\delta_1)/(N\varepsilon) - N\varphi(\tau)/a(\delta_1)]\,d\tau$$

Из (2.18) и (2.21) следует, что в области (2.16)

(2.22) $$f_{(1.3)}(t, \mathbf{x}) \leqslant f(t, \mathbf{x})[-\psi(t) - qc(\delta_1)/(N\varepsilon)] < 0$$

Согласно (2.20), $\beta(\mu T) = 0$, следовательно, для любого $t \in [0, T]$

$$\int\limits_0^t \psi(\tau)\,d\tau \leqslant \int\limits_0^T \psi(\tau)\,d\tau = \int\limits_0^T ((1-q)\,c(\delta_1)/(N\varepsilon) - N\varphi(\tau)/a(\delta_1))\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant (1-q)\,c(\delta_1)\,T/(N\varepsilon), \quad \int\limits_0^t (N\varphi(\tau)/a(\delta_1))\,d\tau \leqslant (1-q)\,c(\delta_1)\,T/(N\varepsilon).$$

и потому

(2.23) $$|\beta(t)| \leqslant \Delta \equiv 3(1 - q)\,c(\delta_1)\,T/(N\varepsilon) \quad \text{при всех } t \geqslant 0$$

На основании (2.15), (2.23) и (2.2) заключаем, что

$$f(t,\mathbf{x})\big|_{\|\mathbf{y}\| \leqslant \delta_1} \leqslant h\varepsilon e^{\Delta}, \quad f(t,\mathbf{x})\big|_{\|\mathbf{y}\| = \varepsilon} \geqslant a(\varepsilon)\,e^{-\Delta}$$

Выберем теперь числа $h(\varepsilon)$ и $q(\varepsilon)$ из условий

(2.24) $$h(\varepsilon)\,\varepsilon e < a(\varepsilon)/e, \quad \Delta \equiv 3(1 - q(\varepsilon))\,c(\delta_1(\varepsilon))\,T/(N\varepsilon) < 1$$

Тогда, очевидно

(2.25) $$\sup[f(t,\mathbf{x}) : \|\mathbf{y}\| \leqslant \delta_1] \leqslant h\varepsilon e < a(\varepsilon)/e \leqslant \inf[f(t,\mathbf{x}) ; \|\mathbf{y}\| = \varepsilon],$$

Поскольку в области (2.16) выполняется условие (2.22), из (2.25) заключаем, что для решения $x(t;\ t_0, x_0)$ системы (1.3) с $t_0 \geqslant 0$, $\| y_0 \| < \delta_1$, $\| z_0 \| < \infty$ при всех $t \geqslant t_0$ справедливо неравенство $\| y(t;\ t_0, x_0) \| < \varepsilon$, так как в противном случае нашлись бы два момента времени t_1 и t_2, такие, что $\| y(t_1;\ t_0, x_0) \| = \delta_1$, $\| y(t_2;\ t_0, x_0) \| = \varepsilon$, $\delta_1 < \| y(\tau;\ t_0, x_0) \| < \varepsilon$ при всех $\tau \in (t_1, t_2)$, и потому

$$a(\varepsilon)/e \leqslant f(t_2, x(t_2; t_0, x_0)) = f(t_1, x(t_1; t_0, x_0)) + \\ + \int_{t_1}^{t_2} f^{\bullet}_{(1.3)}(\tau, x(\tau; t_0, x_0))\, d\tau < f(t_1, x(t_1; t_0, x_0)) \leqslant he\varepsilon$$

что противоречит первому из неравенств (2.24). Теорема доказана.

Замечание. Теоремы 1 и 2 обобщают на задачу устойчивости относительно части переменных результаты, полученные в [2—4]; кроме того, теорема 2 усиливает теорему А. У. Каримова [10].

Следствие. Если в области (1.2) функции X и $\partial X/\partial x$ непрерывны и ограничены, а инвариантное множество (1.8) равномерно асимптотически устойчиво, то оно равномерно устойчиво при п.д.в., малых в среднем.

Действительно, при сделанных предположениях, как показано в [9] (см. также [1]), существует функция $V(t, x)$, удовлетворяющая условиям теоремы 2.

Теорема 3. Предположим, что для любого $T > 0$ существует $L(T) > 0$, такое, что в области $0 \leqslant t \leqslant T$, $\| x \| \leqslant H$ выполняется условие $\| X(t, x') - X(t, x'') \| \leqslant L \| x' - x'' \|$. Если существуют функции $V(t, x)$ и $(W(t, x)$, удовлетворяющие в области (1.2) неравенствам (2.1) и

$$a(\| y \|) \leqslant V(t, x) \leqslant b(\| y \|), \quad W(t, x) \geqslant c(\| y \|) \tag{2.26}$$

причем для любых λ и μ, таких, что $0 < \lambda < \mu < H$, выполняется условие

$$V^{\bullet}_{(1.1)}(t, x) + W(t, x)_{\lambda \leqslant \| y \| \leqslant \mu,\ 0 \leqslant \| z \| < \infty} \rightrightarrows 0 \quad \text{при } t \to \infty$$

то движение $x = 0$ системы (1.1) равномерно y-устойчиво при п.д.в., малых в каждый момент времени.

Доказательство получается небольшой модификацией доказательства теоремы 1 с учетом результатов работы [11].

Теорема 4. Предположим, что существует функция $V(t, x)$, удовлетворяющая условиям (2.1) и (2.2), причем

$$V^{\bullet}_{(1.1)}(t, x) \leqslant 0 \tag{2.27}$$

Тогда движение $x = 0$ равномерно y-устойчиво при п.д.в., малых интегрально. Если, кроме того, $V(t, x)$ удовлетворяет неравенству (2.10), то инвариантное множество (1.8) равномерно устойчиво при п.д.в., малых интегрально.

Доказательство. Из (2.1) следует, что

$$V(t, x) \leqslant N \| x \| \tag{2.28}$$

Пусть дано $\varepsilon \in (0, H)$. Положим $\delta_1(\varepsilon) = \delta_2(\varepsilon) = {}^1/_2\, a(\varepsilon)/N$. Для решения $x(t;\ t_0, x_0)$ системы (1.3) с $t_0 \geqslant 0$, $\| x_0 \| < \delta_1$ в силу (2.2), (2.5), (2.1), (2.27), (2.28) и (1.7) имеем

$$
\begin{aligned}
& a(\|\mathbf{y}(t;t_0,\mathbf{x}_0)\|) \leqslant V(t,\mathbf{x}(t;t_0,\mathbf{x}_0)) = V(t_0,\mathbf{x}_0) + \\
& + \int_{t_0}^{t} V^{\boldsymbol{\cdot}}_{(1.3)}(\tau,\mathbf{x}(\tau;t_0,\mathbf{x}_0))\,d\tau \leqslant N\|\mathbf{x}_0\| + \\
& + \int_{t_0}^{t} V^{\boldsymbol{\cdot}}_{(1.1)}(\tau,\mathbf{x}(\tau;t_0,\mathbf{x}_0))\,d\tau + N\int_{t_0}^{\infty}\|\mathbf{R}(\tau,\mathbf{x}(\tau;t_0,\mathbf{x}_0))\|\,d\tau < \\
& < {}^1/_2 a(\varepsilon) + {}^1/_2 a(\varepsilon) = a(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

Следовательно, $\|\mathbf{y}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$. Доказательство второго утверждения теоремы проводится аналогично с очевидной заменой неравенства (2.28) неравенством (2.12).

Замечания. 1° Первое утверждение теоремы 4 обобщает на задачу устойчивости относительно части переменных результат, полученный в [5].

2° В теоремах 1—4 можно отказаться от гладкости функции V, заменив условие (2.1) более слабым $|V(t,\mathbf{x}') - V(t,\mathbf{x}'')| \leqslant N\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\|$; при этом под $V^{\boldsymbol{\cdot}}$ следует понимать обобщенную производную (см., например, [12, 13]).

3. *Пример 1.* Рассмотрим уравнения движения голономной механической системы в лагранжевых координатах

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i^{\boldsymbol{\cdot}}} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (i = 1,\ldots,n) \tag{3.1}
$$

Здесь $T = T_2 + T_1 + T_0$ — кинетическая энергия (T_s — форма степени s относительно $q_1^{\boldsymbol{\cdot}},\ldots,q_n^{\boldsymbol{\cdot}}$), $U(\mathbf{q})$ — потенциальная энергия.

Предположим, что система (3.1) имеет частное решение (положение равновесия)

$$
\mathbf{q} = \mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}} = 0 \tag{3.2}
$$

Если T не зависит явно от времени, то уравнения (3.1) допускают (обобщенный) интеграл энергии

$$
H \equiv T_2 - T_0 + U = \text{const} \qquad \left(2T_2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{q})\,q_i^{\boldsymbol{\cdot}} q_j^{\boldsymbol{\cdot}}\right) \tag{3.3}
$$

Производная $H^{\boldsymbol{\cdot}}$ в силу «возмущенной» системы (3.4) имеет вид (3.5)

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i^{\boldsymbol{\cdot}}} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + R_i \qquad (i = 1,\ldots,n) \tag{3.4}
$$

$$
H^{\boldsymbol{\cdot}}_{(3.4)} = \sum_{i=1}^{n} R_i q_i^{\boldsymbol{\cdot}} \tag{3.5}
$$

Если T_2 определенно-положительна по $q_1^{\boldsymbol{\cdot}},\ldots,q_n^{\boldsymbol{\cdot}}$, а $U - T_0$ — по $q_1,\ldots,q_m$, то положение равновесия (3.2) равномерно устойчиво относительно $q_1,\ldots,q_m$, $q_1^{\boldsymbol{\cdot}},\ldots,q_n^{\boldsymbol{\cdot}}$ при п.д.в. R_i, малых интегрально. Если же, кроме того, наложенные на систему связи не зависят от времени ($T \equiv T_2$, $T_0 \equiv 0$), U допускает бесконечно малый высший предел по $q_1,\ldots,q_m$, а коэффициенты $a_{ij}(\mathbf{q})$ ограничены, то инвариантное в силу системы (3.1) множество $\{(\mathbf{q},\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}}):\ q_1 = \ldots = q_m = q_1^{\boldsymbol{\cdot}} = \ldots = q_n^{\boldsymbol{\cdot}} = 0\}$ равномерно устойчиво при п.д.в. R_i, малых интегрально.

Пример 2. Движение голономной механической системы с не зависящими от времени связями, которая находится под действием гироскопических и, быть может, диссипативных сил, описывается системой уравнений Лагранжа

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i^{\boldsymbol{\cdot}}} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}q_j^{\boldsymbol{\cdot}} - \frac{\partial f}{\partial q_i^{\boldsymbol{\cdot}}} \qquad (i = 1,\ldots,n;\ g_{ij} = -g_{ji}) \tag{3.6}
$$

В силу системы (3.6) $T^{\cdot}_{(3.6)} = -2f$, а производная от той же функции T в силу «возмущенной» системы (3.7) имеет вид (3.8)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}q_j^{\cdot} - \frac{\partial f}{\partial q_i^{\cdot}} + R_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.7}$$

$$T^{\cdot}_{(3.7)} = -2f + \sum_{i=1}^{n} R_i q_i^{\cdot} \tag{3.8}$$

Если $f \geqslant 0$, T — определенно-положительна по $q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}$, а коэффициенты $a_{ij}(\mathbf{q})$ (см. (3.3)) ограничены, то инвариантное в силу системы (3.6) множество

$$\{(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) : \mathbf{q}^{\cdot} = 0\} \tag{3.9}$$

равномерно устойчиво при п.д.в., малых интегрально. Если же, кроме того, f определенно-положительна относительно $q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}$, то инвариантное множество (3.9) равномерно устойчиво при п.д.в., малых в среднем.

4. На задачу y-устойчивости при п.д.в. может быть распространен принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова [6, 14] в форме Л. Хатвани [15].

Теорема 5. Предположим, что:

I. Существует вектор-функция $\mathbf{V}(t, \mathbf{x}) = (V_1, (t, \mathbf{x}), \ldots, V_k(t, \mathbf{x}))$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ и $\mathbf{V}^{\cdot}_{(1.1)}(t, \mathbf{x})$ непрерывны, $\mathbf{V}(t, 0) \equiv \mathbf{V}^{\cdot}_{(1.1)}(t, 0) \equiv 0$;

2) для некоторого l, $1 \leqslant l \leqslant k$, $V_1 \geqslant 0, \ldots, V_l \geqslant 0$, а

$$V_1(t_1, \mathbf{x}) + \ldots + V_l(t, \mathbf{x}) \geqslant a(\|\mathbf{y}\|) \tag{4.1}$$

3) $\|\mathbf{V}(t, \mathbf{x}') - \mathbf{V}(t, \mathbf{x}'')\| \leqslant N\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\|$, $N = \text{const}$

4) $V^{\cdot}_{(1.1)}$ удовлетворяет системе дифференциальных неравенств

$$\mathbf{V}^{\cdot}_{(1.1)}(t, \mathbf{x}) \leqslant \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{V}(t, \mathbf{x})) \tag{4.2}$$

II. 1) Вектор-функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{V})$ определена и непрерывна в области

$$t \geqslant 0, \quad \|\mathbf{y}\| \leqslant H, \quad \|\mathbf{z}\| < +\infty, \quad \|\mathbf{V}\| < A$$

где $A = \infty$ или $A > \sup[\|\mathbf{V}(t, \mathbf{x})\| : t \geqslant 0, \ \|\mathbf{y}\| \leqslant H]$;

2) каждая из функций $f_s(t, \mathbf{x}, \mathbf{V})$ не убывает по $V_1, \ldots, V_{s-1}, V_{s+1}, \ldots, V_k$;

3) $\mathbf{f}(t, 0, 0) \equiv 0$.

Обозначим $\alpha = (\omega_1, \ldots, \omega_l)$ и рассмотрим вспомогательную систему

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\omega}^{\cdot} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \tag{4.3}$$

Если при условии $\omega_{10} \geqslant 0, \ldots, \omega_{l0} \geqslant 0$ решение ($\mathbf{x} = 0$, $\boldsymbol{\omega} = 0$) системы (4.3) α-устойчиво (равномерно α-устойчиво) при п.д.в., малых в каждый момент времени, в среднем или интегрально, то движение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) y-устойчиво (равномерно y-устойчиво) при п.д.в., малых (соответственно) в каждый момент времени, в среднем или интегрально.

Доказательство. Обобщенная производная $\mathbf{V}^{\cdot}_{(1.3)}$, согласно условию I—3) и (4.2), удовлетворяет неравенству

$$\mathbf{V}^{\cdot}_{(1.3)}(t, \mathbf{x}) \leqslant \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{V}(t, \mathbf{x})) + N\|\mathbf{R}(t, \mathbf{x})\|\mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = (1, \ldots, 1)$$

Наряду с (4.3) рассмотрим вторую вспомогательную систему

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{R}(t, \mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\omega}^{\cdot} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) + N\|\mathbf{R}(t, \mathbf{x})\|\mathbf{b} \tag{4.4}$$

Проведем доказательство в случае п.д.в., малых в каждый момент времени (если п.д.в. малы в среднем или интегрально, доказательство вполне аналогично).

Нулевое решение системы (4.3) α-устойчиво при п.д.в., малых в каждый момент времени, поэтому, для любых $\varepsilon \in (0, H)$, $t_0 \geqslant 0$ существуют $\eta_1(\varepsilon, t_0) > 0$ и $\eta_2(\varepsilon, t_0) > 0$, такие, что всякое решение $(\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0), \boldsymbol{\omega}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\omega}_0))$ с $\|\mathbf{x}_0\| < \eta_1$, $\|\boldsymbol{\omega}_0\| < \eta_1$ любой системы (4.4), для которой в области

$$t \geqslant t_0, \ \sum_{s=1}^{l} |\omega_s| \leqslant a(\varepsilon)$$

выполняются условия

$$\|\mathbf{R}(t, \mathbf{x})\| < \eta_2, \quad N\|\mathbf{R}(t, \mathbf{x})\|\,\|\mathbf{b}\| < \eta_2 \tag{4.5}$$

при всех $t \geqslant t_0$ удовлетворяет неравенству

$$\sum_{s=1}^{l} |\omega_s(t; t_0, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\omega}_0)| < a(\varepsilon) \tag{4.6}$$

Для чисел $\eta_1(\varepsilon, t_0)$ и $\eta_2(\varepsilon, t_0)$ существуют $\delta_1(\varepsilon, t_0)$ и $\delta_2(\varepsilon, t_0)$, $0 < \delta_1 < \eta_1$, $0 < \delta_2 < \eta_2$, такие, что $\|\mathbf{V}(t_0, \mathbf{x}_0)\| < \eta_1$ при $\|\mathbf{x}_0\| < \delta_1$ и из (1.5) вытекает (4.5).

Пусть $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ — решение системы (1.3) с $\|\mathbf{x}_0\| < \delta_1$. Поставим ему в соответствие верхнее решение [16] $\boldsymbol{\omega}^+(t; t_0, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\omega}_0)$ задачи

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0), \boldsymbol{\omega}) + N\|\mathbf{R}(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0))\|\,\mathbf{b} \\ \boldsymbol{\omega}(t_0) \equiv \boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{V}(t_0, \mathbf{x}_0) \end{gathered} \tag{4.7}$$

По выбору δ_1 имеем $\|\boldsymbol{\omega}_0\| < \eta_1$ и, следовательно, справедливо неравенство (4.6). В силу II — 2) правые части системы (4.7) удовлетворяют условию Важевского [16], и поскольку

$$\begin{gathered} \mathbf{V}^{\boldsymbol{\cdot}}_{(1.3)}(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \leqslant \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0), \mathbf{V}(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0))) + \\ + N\|\mathbf{R}(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0))\|\,\mathbf{b} \end{gathered}$$

на основании [16] заключаем что

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \leqslant \boldsymbol{\omega}^+(t; t_0, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\omega}_0) \tag{4.8}$$

Из (4.1), (4.8) и (4.6) следует

$$a(\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\|) \leqslant \sum_{s=1}^{l} V_s(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \leqslant \sum_{s=1}^{l} \omega_s^+(t; t_0, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\omega}_0) < a(\varepsilon)$$

откуда $\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$.

Если α-устойчивость нулевого решения системы (4.3) при п.д.в., малых в каждый момент времени, является равномерной, то числа η_1, η_2, δ_1 и δ_2 не зависят от t_0. Теорема доказана.

Автор благодарит Румянцева В. В. за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Озиранер А. С., Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 2, с. 364.
2. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.

3. *Гермаидзе В. Е., Красовский Н. Н.* Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях.— ПММ, 1957, т. 21, вып. 6, с. 769.
4. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
5. *Врков И.* Интегральная устойчивость.— Чехосл. матем. ж., 1959, т. 9, № 1, с. 71.
6. *Матросов В. М.* Принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова, I—IV.— Дифференц. уравнения, 1968, т. 4, № 8, с. 1374, № 10, 1969, с. 1739, т. 5, № 7, с. 1171, № 12, с. 2129.
7. *Massera J. L.* Contributions to stability theory.— Ann. Math., 1956, v. 64, No. 1, p. 182. (Рус. перев.: Сб. пер. Математика:, 1957, 1 : 4, с. 81.)
8. *Lakshmikantham V., Leela S.* Differential and integral inequalities.— Theory and Applications. V. 1. New York: Acad. Press, 1969. 390 p.
9. *Озиранер А. С.* К вопросу об устойчивости движения относительно части переменных.— Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1971, № 1, с. 92.
10. *Каримов А. У.* Об устойчивости по части переменных при постоянно действующих возмущениях.— В кн.: Матем. физика и электродинамика. М.: Изд-во МГУ, 1973, с. 3.
11. *Озиранер А. С.* Об одной теореме Малкина — Массера.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 6, с. 975.
12. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
13. *Руш Н., Абетс П., Ладуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
14. *Матросов В. М.* Устойчивость движения.— ПММ, 1962, т. 26, вып. 5, с. 885.
15. *Хатвани Л.* О применении дифференциальных неравенств к теории устойчивости.— Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1975, № 3, с. 83.
16. *Wazewski T.* Systèmes des équations et des inégalités differentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications.—Ann. Soc. polon math., 1950, v. 23, p. 112.

Москва

Поступила в редакцию 12.IX.1980