Прикладная математика и механика. Том 45, вып. 3, 1981

УДК 531.36

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЦЕССА НА ЗАДАННОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

Абгарян К. А.

Понятие об устойчивости процесса на заданном интервале времени было сформулировано в [1]. В [2] были анонсированы общие теоремы, устанавливающие условия устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения (тривиального решения системы уравнений возмущенного движения) на заданном интервале времени. Ниже приводятся краткие доказательства этих теорем.

1. Понятие устойчивости на заданном интервале времени вводится следующим образом [1]. Пусть $\omega(t)$ — некоторая заданная положительная функция и $\omega(t_0) = \omega_0$; $K_\Delta{}^\omega$ — класс $n \times n$ матриц $G(t) = (G_1, G_2, \ldots, G_n)$ над полем комплексных чисел, удовлетворяющих на заданном интервале $\Delta = [t_0, T)$, где T — число, превосходящее t_0 или символ ∞, условиям $\det G \neq 0$, и эрмитова норма столбцов G_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, совпадает с $\omega(t)$, т. е. $(G_j, G_j)^{1/2} = \omega(t)$, $t \in \Delta$. Предполагая, что отклонения параметров возмущенного процесса от параметров невозмущенного процесса представляется вектор-функцией $x(t)$ (столбцовой матрицей типа $n \times 1$), определим понятие устойчивости процесса на интервале Δ.

Определение. Если в заданном классе $K_\Delta{}^\omega$ существует такая матрица G, совпадающая в начальный момент $t = t_0$ с заданной постоянной матрицей G_0 класса $K_\Delta{}^\omega$, что при достаточно малом $\rho > 0$ возмущение процесса, начальное значение $x_0 = x(t_0)$ которого удовлетворяет условию

$$(G_0^{-1}x_0, G_0^{-1}x_0) \leqslant \rho^2 \tag{1.1}$$

на интервале $\Delta = [t_0, T)$ удовлетворяет условию

$$(G^{-1}x, G^{-1}x) \leqslant \rho^2 \tag{1.2}$$

то невозмущенный процесс устойчив на заданном интервале Δ. В противном случае — неустойчив.

Наряду с этим основным определением устойчивости на заданном интервале времени были сформулированы также [1] понятия равномерной на Δ устойчивости, устойчивости на неограниченном интервале $[t_0, \infty)$, асимптотической устойчивости на неограниченном интервале и т. п.

Замечание. Приведенное понятие устойчивости на заданном интервале времени является в некотором смысле обобщением понятий устойчивости, ранее введенных другими авторами. Так, при $\omega(t) = \mathrm{const}$ определение 1 совпадает с определением устойчивости движения на конечном интервале времени по Каменкову Г. В. [3]. Если считать, что неравенство (1.1) задает область начальных возмущений, а неравенство

(1.2) — область допустимых возмущений на интервале Δ, то понятие устойчивости по определению 1 совпадает с понятием технической устойчивости [4, 5].

При незначительной модификации приведенного определения устойчивости можно добиться и таких более сложных понятий устойчивости на конечном интервале, как понятие квазиустойчивости и сжимающей технической устойчивости [2, 6], понятие асимптотической устойчивости на заданном интервале времени по Красовскому Н. Н. [7] и др.

2. Применительно к динамическим системам, возмущенное движение которых представляется в виде

(2.1) $$dx/dt = f(t, x, g),\ f(t, 0, 0) \equiv 0$$

где $f(t, x, g)$ — вектор-функция, удовлетворяющая условиям существования и единственности решения задачи Коши в области $I_0 \times D_z \times D_g$ (D_z и D_g — одинаково открытые множества в соответствующих векторных пространствах, а $I_0 \subset [0 \leqslant t < \infty)$). Предполагается, что вектор-функция g в уравнении (2.1) — некоторая известная или неизвестная вектор-функция времени t и фазового вектора x (вектора состояния), ограниченная некоторым условием

(2.2) $$g(t) \subset \pi(t) \subset D_g \quad (t \in I_0)$$

где $\pi(t)$ — некоторая область возможных или допустимых значений возмущенных сил, известная либо подлежащая определению.

В [2] были анонсированы общие теоремы, устанавливающие условия устойчивости и неустойчивости процесса (тривиального решения уравнения (2.1)). Далее будут приведены краткие доказательства этих теорем.

Как известно, произвольную прямоугольную $m \times n$-матрицу ранга r можно представить в виде произведения двух матриц B и C, имеющих соответственно размеры $m \times r$ и $r \times n$.

Имеют место следующие леммы.

Лемма 2.1. Для того чтобы эрмитова матрица (порядка n) была представима в виде

(2.3) $$A = B^*B$$

где B — некоторая, вообще говоря, прямоугольная $m \times n$-матрица, необходимо и достаточно, чтобы она не имела отрицательных собственных значений.

Лемма 2.2. Пусть $A(t)$ — эрмитова матрица порядка n, допускающая на промежутке $t_0 \leqslant t < T$ разложение (2.3), где B — квадратная матрица того же порядка n, причем

$$\sup |B(t)| < \infty, \quad \det |B(t)| \geqslant a > 0,\ t \in [t_0, T)$$

Тогда собственные значения $\rho_i(t)$ матрицы A на промежутке $[t_0, T)$ ограничены снизу положительной постоянной.

Лемма 2.3. Пусть A и B — эрмитовы матрицы, связанные соотношением (H — квадратная матрица)

$$A = HBH^*,\ H = (h_1, h_2, \ldots, h_n),\ h_j^*, h_j = \alpha^2 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

причем выполняется по крайней мере одно из следующих двух условий: а) $h_i^* h_j = 0$ ($i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$) или б) B — диагональная матрица.

Тогда

$$\operatorname{Tr} A = \alpha^2 \operatorname{Tr} B$$

Доказательство леммы следует из соотношения

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} h_{jr} b_{rk} \bar{h}_{jk}$$

В частном случае, когда B — единичная матрица, т. е. $A = HH^*$, $\operatorname{Tr} A = n\alpha^2$.

Лемма 2.4. Пусть Λ — вещественная диагональная матрица с диагональными элементами $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, удовлетворяющими условию

$$\mu_i \neq \frac{1}{n} \operatorname{Tr} \Lambda = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mu_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.4}$$

Тогда имеет место разложение

$$\Lambda = RR^* \tag{2.5}$$

где R — квадратная матрица порядка n, столбцы которой имеют одинаковую эрмитову норму.

$$\sqrt{R_j^* R_j} = \alpha^2 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.6}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{n} \operatorname{Tr} \Lambda}, \quad \operatorname{rank} R = \operatorname{rank} \Lambda$$

причем, если Λ — функция от t, непрерывная на $[t_0, T)$ и l раз дифференцируемая ($l = 1, 2, \ldots$), то и R (t) на $[t_0, T)$ соответственно непрерывна и l раз дифференцируема.

Матрица

$$R = \sqrt{\Lambda} V \tag{2.7}$$

где V — произвольная унитарная матрица, удовлетворяет соотношению (2.5). По лемме 2.3 имеем $\operatorname{Tr} \Lambda = n\alpha^2$. Учитывая также условие (2.6), получаем (2.5).

Покажем, что действительно существует такая унитарная матрица V и даже ортогональная, что построенная в форме (2.7) матрица R удовлетворяет условию (2.6). Соотношения (2.5)—(2.7) приводят к следующим равенствам относительно столбцов V_j матрицы V:

$$V_j' \left(\Lambda - \frac{1}{n} \operatorname{Tr} \Lambda E_n \right) V_j = 0 \tag{2.8}$$

$$V_i' V_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{2.9}$$

Уравнение (2.7) в n-мерном вещественном евклидовом пространстве описывает конус второго порядка. При этом

$$\operatorname{Tr} \left(\Lambda - \frac{1}{n} \operatorname{Tr} \Lambda E_n \right) \equiv 0$$

что является необходимым и достаточным условием существования n-гранного угла с попарно ортогональными ребрами, вписанного в конус (2.8). Учитывая это, в качестве столбцов V_j матрицы V можно принять единичные векторы, направленные по ребрам этого n-гранного угла. Тогда матрица R, определенная формулой (2.7), будет обладать свойствами (2.5), (2.6).

Последнее равенство в (2.6) непосредственно следует из выражения (2.7) в силу невырожденности матрицы V.

Остается доказать последнее утверждение леммы.

Обозначая

$$\Lambda_0 = \Lambda - \frac{1}{n}\operatorname{Tr}\Lambda E_n = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n), \quad \lambda_i = \mu_i - \frac{1}{n}\operatorname{Tr}\Lambda$$

имеем

$$\varphi_{jj} \equiv V'\Lambda_0 V_j = 0, \quad \varphi_{ij} \equiv V_i'V_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

Составим функциональный определитель этой системы

$$\det\frac{\partial(\varphi_{jj}, \varphi_{ij})}{\partial V_j} = \det\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_{jj}}{\partial V_j} \\ \dfrac{\partial\varphi_{ij}}{\partial V_j} \end{Vmatrix} = \det\begin{Vmatrix} 2V\Lambda_0' \\ V' \end{Vmatrix} =$$

$$= \det\operatorname{diag}(2V', V')\det\operatorname{diag}(\Lambda_0, E_n) \neq 0$$

Последнее верно в силу того, что матрица V как ортогональная матрица невырождена и матрица Λ_0 также невырождена в силу условия (2.4). Согласно теореме существования и единственности неявных функций матрица V в окрестности построенной системы $V_1, \ldots, V_n$, как и матрица Λ, непрерывна и имеет непрерывную производную по аргументу t.

Поскольку эрмитову матрицу унитарным преобразованием можно привести в вещественной диагональной матрице, сформулируем следующую лемму о разложении эрмитовой матрицы.

Основная лемма. Положительно-определенная эрмитова матрица A, собственные значения $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ которой удовлетворяют условию

$$\mu_i \neq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

может быть представлена в виде (H — квадратная матрица)

$$(2.10) \qquad A^{-1} = HH^*, \qquad H = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$$

$$\| h_j \| = \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\operatorname{Tr}A^{-1}}, \quad \operatorname{rank}H = \operatorname{rank}A$$

причем, если $A(t)$ — непрерывная и непрерывно дифференцируемая на $[t_0, T)$ матрица, то и $H(t)$ на этом промежутке — непрерывная и непрерывно дифференцируемая матрица.

3. Итак, рассматривается возмущенное движение динамической системы, представленное векторным уравнением (2.1).

Теорема 3.1. (*Об устойчивости*). Пусть существует положительно-определенная эрмитова форма

$$(3.1) \qquad V(t, x) = x^*A(t)x$$

такая, что:

1°. $A(t_0) = (G_0^{-1})^* G_0^{-1}$ (G_0 — заданная постоянная матрица класса $K_\Delta{}^\omega$);

2°. $\frac{1}{n}\operatorname{Tr}A^{-1}(t) \leqslant \omega^2(t), \quad \forall t \in [t_0, T)$;

3°. $dV/dt \leqslant 0$ при $\forall t \in [t_0, T)$ (производная по t от функции V здесь и далее предполагается взятой в силу уравнения (2.1)).

Тогда система (2.1) устойчива на интервале $[t_0, T)$.

Доказательство. Согласно основной лемме, матрицу A в форме $V(t, x)$ можно представить в виде $A(t) = [H^{-1}(t)]^* H^{-1}(t)$, где $H(t)$ — квадратная матрица, удовлетворяющая условиям в (2.10), причем в соответствии с условием 1° теоремы $\sigma(t_0) = \omega(t_0) = \omega_0$.

Матрица $G(t) = (\omega(t)/\sigma(t))H(t)$ принадлежит классу $K_\Delta{}^\omega$, причем $G(t_0) = G_0$. Пусть $x^\circ(t)$ — какое-нибудь решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условию

$$(G^{-1}(t_0)x^\circ(t_0), G^{-1}(t_0)x^\circ(t_0)) \leqslant \rho^2$$

Вдоль этого решения в силу условия 3° $V(t, x^\circ(t)) \leqslant V(t_0, x^\circ(t^\circ))$. Поэтому, учитывая еще условие 2°, имеем

$$(G^{-1}(t)x^\circ(t), G^{-1}(t)x^\circ(t)) = \frac{\sigma^2(t)}{\omega^2(t)} V(t, x^\circ(t)) \leqslant V(t_0, x^\circ(t_0)) \leqslant \rho^2$$

что и доказывает теорему.

Теорема 3.2. (*О неустойчивости*). Пусть существуют положительно-определенная эрмитова форма

$$V(t, x) = x^* A(t) x$$

и момент времени $t_1 \in [t_0, T)$, такие, что:

1°. $A(t_0) = (G_0{}^{-1})^* G_0{}^{-1}$ (G_0 — заданная постоянная матрица класса $K_\Delta{}^\omega$);

2°. $\mu_{\min}(t_1) > 2\omega^2(t_1)$ ($\mu_{\min}$ — минимальное собственное значение матрицы A^*A при $t = t_1$);

3°. $dV/dt \geqslant 0$ при $\forall t \in [t_0, t_1]$ и $\forall x \in D$.

Тогда система (2.1) неустойчива на интервале $[t_0, T)$.

Доказательство. Допустим, напротив, что система (2.1) при выполнении условий теоремы устойчива, а значит, существует матрица $G(t) \in K^\omega{}_\Delta$, такая, что все решения системы, удовлетворяющие условию

$$(G^{-1}(t_0)x(t_0), G^{-1}(t_0)x(t_0)) \leqslant \rho^2 \tag{3.2}$$

на всем интервале $[t_0, T)$ удовлетворяют условию

$$(G^{-1}(t)x(t), G^{-1}(t)x(t)) \leqslant \rho^2 \tag{3.3}$$

Пусть $x^\circ(t)$ — решение системы, удовлетворяющее условию

$$(G^{-1}(t_0)x^\circ(t_0), G^{-1}(t_0)x^\circ(t_0)) = \rho^2$$

В силу условия 1° теоремы имеем $V(t_0, x^\circ(t_0)) = \rho^2$. Пусть $\nu_{\max}(t_1)$ — максимальное собственное значение матрицы $G^*(t_1)G(t_1)$. Имеет место неравенство $\nu_{\max} < 2\omega^2$. Отсюда, принимая во внимание условие 2° теоремы, находим

$$\mu_{\min}(t_1) > \nu_{\max}(t_1)$$

В силу последнего соотношения получаем

$$G^{-1}(t_1)x^\circ(t_1) \geqslant \frac{\|x^\circ(t_1)\|}{\nu_{\max}(t_1)} > \frac{\|x^\circ(t_1)\|}{\mu_{\min}(t_1)} \geqslant \rho^2$$

что противоречит условию устойчивости. Значит, исходная предпосылка (об устойчивости системы) неверна и система (2.1) неустойчива.

Имеет место более сильная

Теорема 3.3. (*О неустойчивости*). Пусть существуют положительно-определенная эрмитова форма

$$V(t, x) = x^* A(t) x$$

и момент времени $t_1 \in [t_0, T)$, такие, что:

1°. $A(t_0) = (G_0^{-1})^* G_0^{-1}$ (G_0 — заданная постоянная матрица класса K_Δ^ω);

2°. $\frac{1}{n} \operatorname{Tr} A^{-1}(t_1) > \omega^2(t_1)$;

3°. $dV/dt \geqslant 0$ при $\forall t \in [t_0, t_1]$ и $\forall x \in D$.

Тогда система (2.1) неустойчива на интервале $[t_0, T)$.

Доказательство. Покажем сначала, что все решения уравнения (2.1), удовлетворяющие условию

$$V(t_1, x(t_1)) = x^*(t_1) A(t_1) x(t_1) \leqslant \rho^2$$

удовлетворяют условию

$$V(t_0, x(t_0)) = x^*(t_0) A(t_0) x(t_0) \leqslant \rho^2$$

Допустим, напротив, что имеется решение $x^\circ(t)$, не обладающее таким свойством. Тогда по непрерывности существует такой момент времени, что

$$V(\tau, x^\circ(\tau)) = \rho^2, \; V(t, x^\circ(t)) > \rho^2, \quad \forall t \in [t_0, \tau)$$

В частности, $V(t_0, x^\circ(t_0)) > \rho^2$, но это противоречит неравенству

$$V(t_0, x^\circ(t_0)) \leqslant V(\tau, x^\circ(\tau)) = \rho^2$$

которое следует из условия 3° теоремы.

Теперь предположим, что вопреки утверждению теоремы существует такая матрица $G(t)$ класса K_Δ^ω, что все решения $x(t)$, удовлетворяющие условию (3.2), удовлетворяют на $[t_0, T)$ условию (3.3).

Введем в рассмотрение множества

$$U_G(t) = \{x: (G^{-1}(t)x, G^{-1}(t)x) \leqslant \rho^2\}, \; U_H(t) = \{x: V(t, x) \leqslant \rho^2\}$$

В соответствии с принятым предположением (об устойчивости системы) $U_H(t_1) \subset U_G(t_1)$, но это невозможно, так как в силу условия 2° множество

$$U_H(t_1) \setminus U_H(t_1) \cap U_G(t_1)$$

непустое. Здесь используется следующая лемма: пусть

$$U_1 = \{x : V_1(t, x) \leqslant \rho^2\}, \; U_2 = \{x: V_2(t, x) \leqslant \rho^2\}$$

где V_1 и V_2 — положительно-определенные эрмитовы формы с матрицами соответственно A_1 и A_2; если $\operatorname{Tr} A_1^{-1} > \operatorname{Tr} A_2^{-1}$, то $U_1 \setminus U_1 \cap U_2$ — непустое множество.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абгарян К. А.* Одна постановка задачи об устойчивости процессов на заданном промежутке времени.— Докл. АН СССР, 1973, т. 212, № 6, с. 1313.
2. *Абгарян К. А.* Устойчивость движения на конечном интервале. Итоги науки и техники.— В кн.: Общая механика. Т. 3. М.: ВИНИТИ, 1976, с. 43.

3. *Каменков Г. В.* Об устойчивости движения на конечном интервале времени.— ПММ, 1953, т. 17, вып. 5, с. 529.
4. *Четаев Н. Г.* Об одной мысли Пуанкаре.— Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1935, № 3, с. 3.
5. *Моисеев Н. Д.* Обзор развития неляпуновских теорий устойчивости.— Зап. семинара по теории устойчивости движения, 1946, № 1 с. 75.
6. *Weiss L., Infante E. F.* On the stability of sistems defined ofer a finite time interval.— Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 1965, v. 54, No. 1, p. 44.
7. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
8. *Абгарян К. А.* Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. М.: Наука, 1973. 431 с.

Ереван

Поступила в редакцию
5.III.1980