Между границей полупространства и фронтом упругой волны $\beta\tau < \xi < 1$ возникают положительные напряжения, которые, как и в случае задачи Даниловской И. В., с ростом τ переходят в отрицательные. Однако амплитуды напряжений тем больше, чем больше $\beta(v)$. При этом для данной задачи характерно то, что напряжения меняют свой знак тем раньше, чем больше скорость движения границы v.

При $\beta \to 1$ в окрестности фронта термоупругой волны при больших τ возникают большие напряжения сжатия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975.
2. *Дитвин В. А., Прудников А. П.* Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965.
3. *Даниловская И. В.* Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы.— ПММ, 1950, т. 14, вып. 3.

Томск

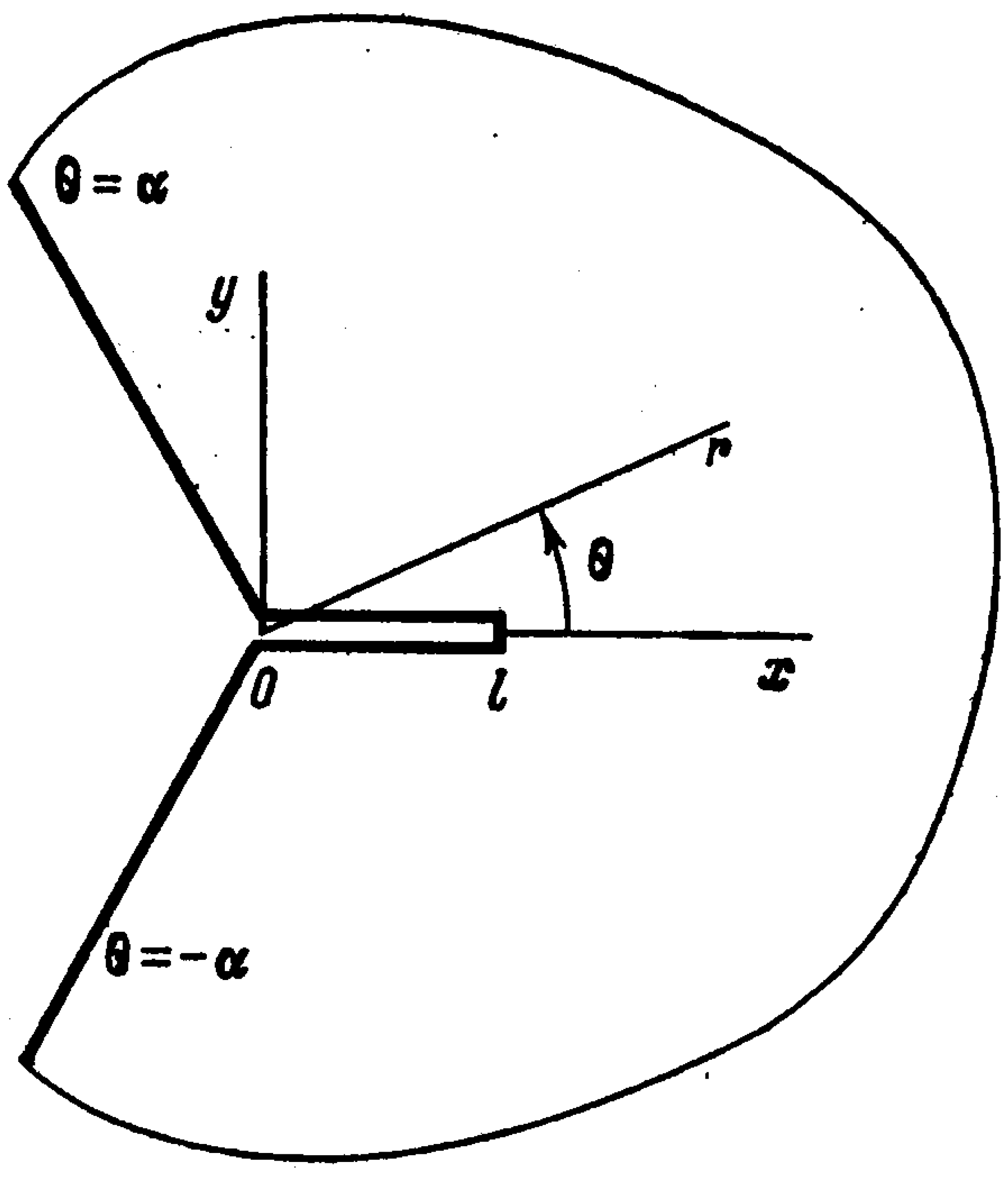
Поступила в редакцию 1.VI.1979

УДК 539.535

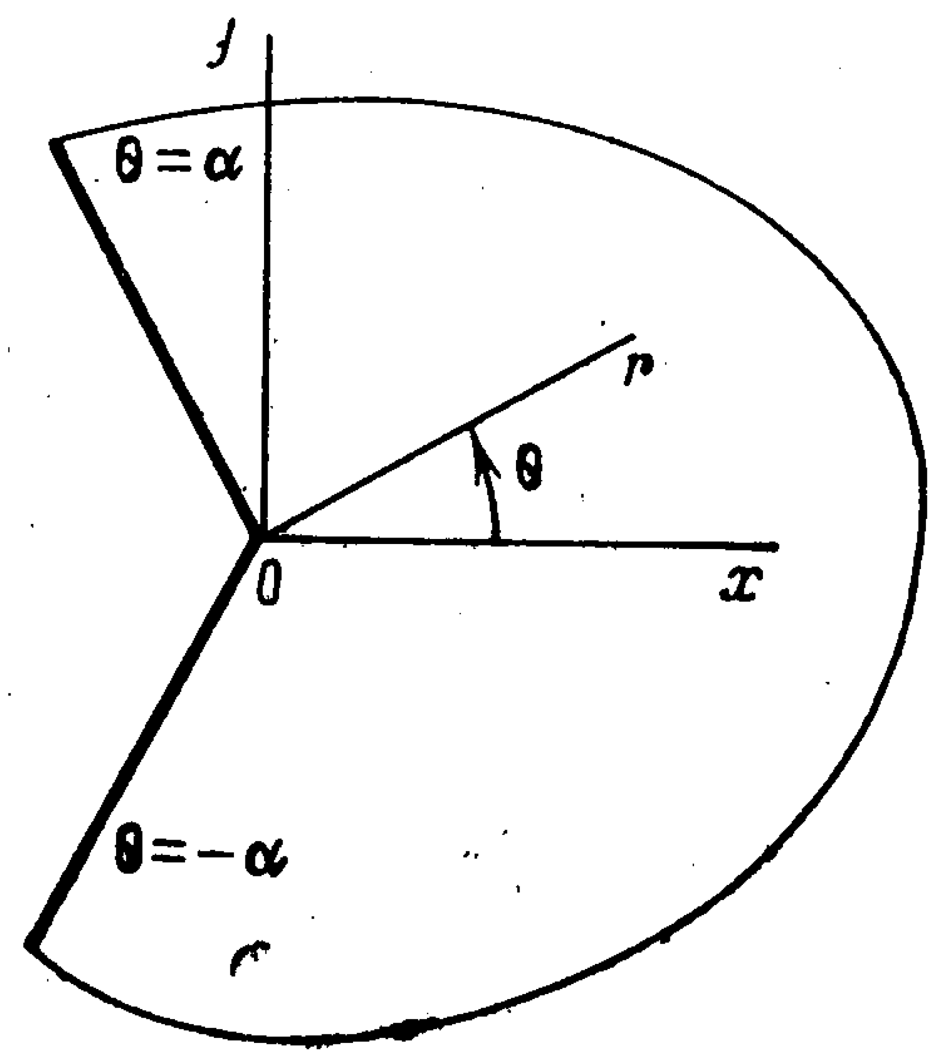
ОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КЛИНА С СИММЕТРИЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ В ВЕРШИНЕ

Кипнис Л. А.

Строится точное решение плоской статической однородной задачи теории упругости класса N [1] для объемлющего полупространство клина с трещиной в вершине, расположенной в биссекторной плоскости.



Фиг. 1



Фиг. 2

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечный упругий клин с углом раствора, большим π, содержащий трещину при $y = 0$, $x < l$ (фиг. 1). Грани клина и берега трещины свободны от напряжений. Предполагается, что на бесконечности решение соответствующей симметричной (относительно плоскости $\theta = 0$) задачи ведет себя как удовлетворяющее условию затухания напряжений на бесконечности асимптотически наибольшее на бесконечности решение симметричной задачи для клина $-\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha$,

$\pi / 2 < \alpha < \pi$ со свободными от напряжений гранями (фиг. 2). Последнее, как известно (см., например, [1]), имеет вид (σ_θ, $\tau_{r\theta}$, σ_r — напряжения, u_θ, u_r — смещения)

$$\sigma_\theta = A_{\rm I}\,[(\lambda_1+1)\cos(\lambda_1-1)\,\theta - f_1(\alpha)\cos(\lambda_1+1)\,\theta] \tag{1.1}$$

$$\tau_{r\theta} = A_{\rm I}\,[(\lambda_1-1)\sin(\lambda_1-1)\,\theta - f_1(\alpha)\sin(\lambda_1+1)\,\theta]$$

$$\sigma_r = A_{\rm I}\,[(3-\lambda_1)\cos(\lambda_1-1)\,\theta + f_1(\alpha)\cos(\lambda_1+1)\,\theta]$$

$$f_1(\alpha) = \frac{(\lambda_1-1)\sin(\lambda_1-1)\,\alpha}{\sin(\lambda_1+1)\,\alpha}, \quad A_{\rm I} = \frac{C_{\rm I}}{2}(2\pi r)^{\lambda_1-1}$$

$$-\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha, \quad \pi/2 < \alpha < \pi$$

Здесь $\lambda_1(\alpha) \in (^1/_2, 1)$ — единственный корень уравнения $\sin 2p\alpha + p\sin 2\alpha = 0$ в полосе $0 < \operatorname{Re} p < 1$ комплексной плоскости p, а $C_{\rm I}$ — произвольная действительная постоянная.

Решение (1.1) должно реализоваться как асимптотика на бесконечности искомого решения исходной симметричной задачи для клина с трещиной.

Таким образом, граничные условия исходной симметричной задачи можно записать так:

$$\theta = \alpha, \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad (\pi / 2 < \alpha < \pi) \tag{1.2}$$

$$\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0$$

$$\theta = 0, \; r < l, \; \sigma_\theta = 0; \quad \theta = 0, \; r > l, \; u_\theta = 0 \tag{1.3}$$

Кроме того, на бесконечности должно, в частности, выполняться условие

$$\theta = 0, \quad r \to \infty, \quad \sigma_\theta \sim \frac{Q_{\rm I}}{r^{1-\lambda_1}}$$

$$Q_{\rm I} = C_{\rm I}(2\pi)^{\lambda_1-1}\frac{\lambda_1\cos\lambda_1\alpha\sin\alpha + \sin\lambda_1\alpha\cos\alpha}{\sin(\lambda_1+1)\,\alpha}$$

где постоянная $C_{\rm I}$ считается заданной по условию задачи. Она имеет размерность силы, деленной на длину в степени $\lambda_1(\alpha) + 1$.

Вблизи конца трещины имеют место следующие асимптотики [1]:

$$\theta = 0, \quad r \to l + 0, \quad \sigma_\theta \sim \frac{K_{\rm I}}{\sqrt{2\pi(r-l)}}$$

$$\theta = +0, \quad r \to l - 0, \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \sim -\frac{2(1-\nu^2)}{E}\frac{K_{\rm I}}{\sqrt{2\pi(r-l)}}$$

($K_{\rm I}$ — коэффициент интенсивности напряжений, подлежащий определению, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона).

Если угол раствора клина не превосходит π, то рассматриваемая симметричная однородная задача принадлежит классу S [1] и имеет лишь тривиальное решение.

При рассмотрении кососимметричной однородной задачи будем считать, что угол раствора клина изменяется в пределах $2\alpha_* < 2\alpha < 2\pi$ ($2\alpha_* \approx 257°$; α_* — единственный корень уравнения $2\alpha\cos 2\alpha - \sin 2\alpha = 0$ на интервале $\pi / 2 < \alpha < \pi$), так как в случае $2\alpha \leqslant 2\alpha_*$ эта задача принадлежит классу S и имеет лишь тривиальное решение.

Удовлетворяющее условию затухания напряжений на бесконечности асимптотически наибольшее на бесконечности решение кососимметричной задачи для клина $-\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha$, $\alpha_* < \alpha < \pi$ со свободными от напряжений гранями имеет вид

$$\sigma_\theta = A_{\rm II}\,[(\lambda_2+1)\sin(\lambda_2-1)\,\theta - f_2(\alpha)\sin(\lambda_2+1)\,\theta] \tag{1.4}$$

$$\tau_{r\theta} = A_{\rm II}\,[-(\lambda_2-1)\cos(\lambda_2-1)\,\theta + f_2(\alpha)\cos(\lambda_2+1)\,\theta]$$

$$\sigma_r = A_{\rm II}\,[(3-\lambda_2)\sin(\lambda_2-1)\,\theta + f_2(\alpha)\sin(\lambda_2+1)\,\theta]$$

$$f_2(\alpha) = \frac{(\lambda_2+1)\sin(\lambda_2-1)\,\alpha}{\sin(\lambda_2+1)\,\alpha}, \quad A_{\rm II} = \frac{C_{\rm II}}{2}(2\pi r)^{\lambda_2-1}$$

$$-\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha, \quad \alpha_* < \alpha < \pi$$

Здесь $\lambda_2(\alpha) \in (^1/_2, 1)$ — единственный корень уравнения $\sin 2p\alpha - p\sin 2\alpha = 0$ в полосе $0 < \operatorname{Re} p < 1$, C_{II} — произвольная действительная постоянная.

Решение (1.4) должно реализоваться как асимптотика на бесконечности искомого решения кососимметричной задачи.

Граничные условия кососимметричной задачи запишем так:

$$\theta = \alpha,\ \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0\ (\alpha_* < \alpha < \pi)$$

$$\theta = 0,\ \sigma_\theta = 0$$

$$\theta = 0,\ r < l,\ \tau_{r\theta} = 0;\ \theta = 0,\ r > l,\ u_r = 0$$

$$\theta = 0, \quad r \to \infty, \quad \tau_{r\theta} \sim \frac{Q_{II}}{r^{1-\lambda_2}}$$

$$Q_{II} = C_{II}(2\pi)^{\lambda_2 - 1}\frac{-\lambda_2\cos\lambda_2\alpha\sin\alpha + \sin\lambda_2\alpha\cos\alpha}{\sin(\lambda_2+1)\alpha}$$

Постоянная C_{II} считается заданной; она имеет размерность силы, деленной на длину в степени $\lambda_2(\alpha) + 1$.

Запишем асимптотики вблизи конца трещины

$$\theta = 0, \quad r \to l + 0, \quad \tau_{r\theta} \sim \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi(r-l)}}$$

$$\theta = +0, \quad r \to l - 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} \sim \frac{2(1-\nu^2)}{E}\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi(l-r)}}$$

(K_{II} — коэффициент интенсивности напряжений, подлежащий определению). Без ограничения общности длину трещины можно считать равной единице.

2. Уравнения Винера — Хопфа. Коэффициенты интенсивности напряжений. Решение рассматриваемой симметричной однородной задачи представляет собой сумму решений следующих двух задач.

В первой задаче условие (1.2) и второе условие (1.3) сохраняются, вместо первого условия (1.3) имеем

$$\theta = 0, \quad r < 1, \quad \sigma_\theta = -\frac{Q_I}{r^{1-\lambda_1}} \tag{2.1}$$

а на бесконечности напряжения затухают как $o(1/r)$. Вторая задача — симметричная задача для клина со свободными от напряжений гранями (имеется в виду решение (1.1) последней).

Применяя интегральное преобразование Меллина к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций, закону Гука, условиям (1.2) и учитывая второе условие (1.3) и условие (2.1), приходим к следующему функциональному уравнению Винера — Хопфа:

$$\Phi_1^+(p) - \frac{Q_I}{p+\lambda_1} = -\operatorname{tg} p\pi G_1(p)\Phi_1^-(p) \tag{2.2}$$

$$G_1(p) = \frac{2(p^2\sin^2\alpha - \sin^2 p\alpha)}{-\operatorname{tg} p\pi(\sin 2p\alpha + p\sin 2\alpha)}$$

$$\Phi_1^+(p) = \int_1^\infty \sigma_\theta(r, 0)\, r^p\, dr, \quad \Phi_1^-(p) = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\int_0^1 \left.\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right|_{\theta=+0} r^p\, dr$$

При помощи факторизаций [2, 3]

$$G_1(p) = \frac{G_1^+(p)}{G_1^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p = 0) \tag{2.3}$$

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\ln G_1(t)}{t-p}\,dt\right] = \begin{cases} G_1^+(p), & \operatorname{Re} p < 0 \\ G_1^-(p), & \operatorname{Re} p > 0\end{cases}$$

$$p\operatorname{ctg} p\pi = K^+(p)K^-(p), \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(^1/_2 \mp p)} \tag{2.4}$$

($\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера) уравнение (2.2) перепишем так:

$$\frac{K^+(p)\,\Phi_1^+(p)}{pG_1^+(p)} - \frac{Q_\mathrm{I} K^+(p)}{p(p+\lambda_1)\,G_1^+(p)} = -\frac{\Phi_1^-(p)}{K^-(p)\,G_1^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p = 0) \tag{2.5}$$

Используя представление

$$\frac{Q_\mathrm{I} K^+(p)}{p(p+\lambda_1)\,G_1^+(p)} = \frac{Q_\mathrm{I}}{p+\lambda_1}\left[\frac{K^+(p)}{pG_1^+(p)} + \frac{K^+(-\lambda_1)}{\lambda_1 G_1^+(-\lambda_1)}\right] - \frac{Q_\mathrm{I} K^+(-\lambda_1)}{\lambda_1(p+\lambda_1)\,G_1^+(-\lambda_1)} \quad (\operatorname{Re} p = 0)$$

согласно (2.5), получаем

$$\frac{K^+(p)\,\Phi_1^+(p)}{pG_1^+(p)} - \frac{Q_\mathrm{I}}{p+\lambda_1}\left[\frac{K^+(p)}{pG_1^+(p)} + \frac{K^+(-\lambda_1)}{\lambda_1 G_1^+(-\lambda_1)}\right] = -\frac{\Phi_1^-(p)}{K^-(p)\,G_1^-(p)} - \frac{Q_\mathrm{I} K^+(-\lambda_1)}{\lambda_1(p+\lambda_1)\,G_1^+(-\lambda_1)} \quad (\operatorname{Re} p = 0) \tag{2.6}$$

Функция в левой части (2.6) аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$, а функция в правой его части аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. Следовательно, эти функции равны одной и той же функции, аналитической во всей плоскости p.

Имеют место асимптотики ($p \to \sim$)

$$\Phi_1^+(p) \sim \frac{K_\mathrm{I}}{\sqrt{-2p}}, \quad \Phi_1^-(p) \sim -\frac{K_\mathrm{I}}{\sqrt{2p}} \tag{2.7}$$

Из (2.3), (2.4), (2.7) следует, что функции в левой и правой частях (2.6) стремятся к нулю при $p \to \infty$ в полуплоскостях $\operatorname{Re} p<0$ и $\operatorname{Re} p>0$ соответственно. Таким образом, единая аналитическая функция тождественно равна нулю во всей плоскости p.

Решение функционального уравнения (2.2) имеет вид

$$\Phi_1^+(p) = \frac{pQ_\mathrm{I}}{p+\lambda_1}\left[\frac{K^+(p)}{pG_1^+(p)} + \frac{K^+(-\lambda_1)}{\lambda_1 G_1^+(-\lambda_1)}\right]\frac{G_1^+(p)}{K^+(p)} \quad (\operatorname{Re} p < 0)$$

$$\Phi_1^-(p) = -\frac{Q_\mathrm{I} K^+(-\lambda_1)}{\lambda_1(p+\lambda_1)\,G_1^+(-\lambda_1)}\,G_1^-(p)\,K^-(p) \quad (\operatorname{Re} p > 0)$$

Точно так же строится решение кососимметричной задачи. Ей соответствует функциональное уравнение

$$\Phi_2^+(p) - \frac{Q_\mathrm{II}}{p+\lambda_2} = -\operatorname{tg} p\pi G_2(p)\,\Phi_2^-(p)$$

$$G_2(p) = \frac{2(p^2 \sin^2\alpha - \sin^2 p\alpha)}{-\operatorname{tg} p\pi(\sin 2p\alpha - p\sin 2\alpha)}$$

$$\Phi_2^+(p) = \int_1^\infty \tau_{r\theta}(r, 0)\, r^p\, dr, \quad \Phi_2^-(p) = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\int_0^1 \left.\frac{\partial u_r}{\partial r}\right|_{\theta=+0} r^p\, dr$$

Для функции $G_2(p)$ справедлива факторизация (2.3), где $G_1(p)$, $G_1^\pm(p)$ следует заменить на $G_2(p)$, $G_2^\pm(p)$.

Коэффициенты интенсивности напряжений в исходной однородной задаче выражаются формулой

$$K_n = \frac{\sqrt{2}\,K^+(-\lambda_k)}{\lambda_k G_k^+(-\lambda_k)}\,Q_n l^{\lambda_k - 1/2}$$

($k = 1,2$; $n = \mathrm{I}$, если $k = 1$; $n = \mathrm{II}$, если $k = 2$).

Автор благодарен Черепанову Г. П. за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
3. *Нобл Б.* Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

Москва

Поступила в редакцию
3.IV.1980

II ВСЕСОЮЗНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА»

Конференция будет проведена в Днепропетровске в сентябре 1981 г. Организует конференцию Научный совет АН СССР по проблемам прочности и пластичности, Институт проблем механики АН СССР и Днепропетровский государственный университет.

На конференции будут обсуждаться: статические и динамические контактные задачи теории упругости и термоупругости; контактные задачи теории концентрации напряжений (трещины, включения, накладки); смешанные задачи взаимодействия тонкостенных упругих элементов с деформируемыми телами.

Адрес Оргкомитета: 320625, ГСП Днепропетровск 10, пр. Гагарина, 72, Днепропетровский университет А. Б. Ковуре.

Телефоны для справок в Днепропетровске:
3-16-71, 45-30-38

Технический редактор *В. М. Пахомова*

Сдано в набор 23.01.81 Подписано к печати 20.03.81 Т-03292 Формат бумаги 70×108¹/₁₆
Высокая печать Усл. печ. л. 18,2+1 вкл. Усл. кр.—отт. 48,8 тыс. Уч.-изд. л. 17,3 Бум. л. 6,5
Тираж 2657 экз. Зак. 80

Издательство «Наука». 103717, ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука». 121099, Москва, Шубинский пер., 10