

ЛИТЕРАТУРА

1. Разматулин Х. А. О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения.— ПММ, 1945, т. 9, вып. 6, с. 449.
2. Разматулин Х. А. Об ударе по гибкой нити.— ПММ, 1947, т. 11, вып. 3, с. 379.
3. Разматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961. 399 с.
4. Павленко А. Л. Обобщение теории поперечного удара по гибкой нити.— Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1960, № 2, с. 110.
5. Ленский Э. В. Удар клином по упругой нити.— Инж. ж. МТТ, 1968, № 2, с. 104.
6. Lee S. Y., Ames W. F. A Class of General Solutions to the nonlinear dynamic equations of elastic strings.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1973, v. 40, No. 4. (Рус. перев.: Тр. Амер. о-ва инж.-механ. Сер. Е. Прикл. механика, 1973, № 4.)

Москва, Баку

Поступила в редакцию
5.VIII.1980

УДК 536.12

ЗАДАЧА ДАНИЛОВСКОЙ В СЛУЧАЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ ГРАНИЦЫ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Семкин Б. В., Юшин А. В.

При использовании электрических разрядов, явления электрического взрыва проводников и других процессов, характеризующихся высокой температурой, возникают динамические задачи температурных напряжений с движущимися границами. В данной работе решается одномерная задача температурных напряжений, возникающих в упругом полупространстве в результате внезапного нагрева его границы, в случае, когда граница движется с постоянной скоростью v .

Для однородного изотропного полупространства система уравнений температурных напряжений имеет вид [1]

$$(1) \quad c^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = S \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad S = \alpha_t (3\lambda + 2\mu)$$

$$(2) \quad a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad c^2 = \frac{2\mu + \lambda}{\rho}$$

Здесь σ — напряжение, α_t — коэффициент теплового расширения, λ и μ — изотермические постоянные Ламе, T — температура, c^2 — квадрат скорости звука, a^2 — коэффициент температуропроводности.

Начальные и граничные условия в рассматриваемой постановке

$$(3) \quad \sigma(x, 0) = 0, \quad \partial \sigma(x, 0) / \partial t = 0, \quad \sigma(vt, t) = 0$$

$$(4) \quad T(x, 0) = 0, \quad T(vt, t) = T_0, \quad x > vt$$

Решение уравнения теплопроводности (2) с начальными и граничными условиями (4) достаточно просто находится с помощью перехода к подвижной системе отсчета $y = x - vt$, $t = t$ и имеет вид

$$(5) \quad T = \frac{1}{2} T_0 \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} - \frac{v}{a} \sqrt{t} \right) \exp \left[-\frac{v}{a^2} (x - vt) \right] \right]$$

Решение уравнения (1) при условиях (3) с учетом (5) удобно получить воспользовавшись преобразованием Лапласа. Для изображения σ по Лапласу в предположении

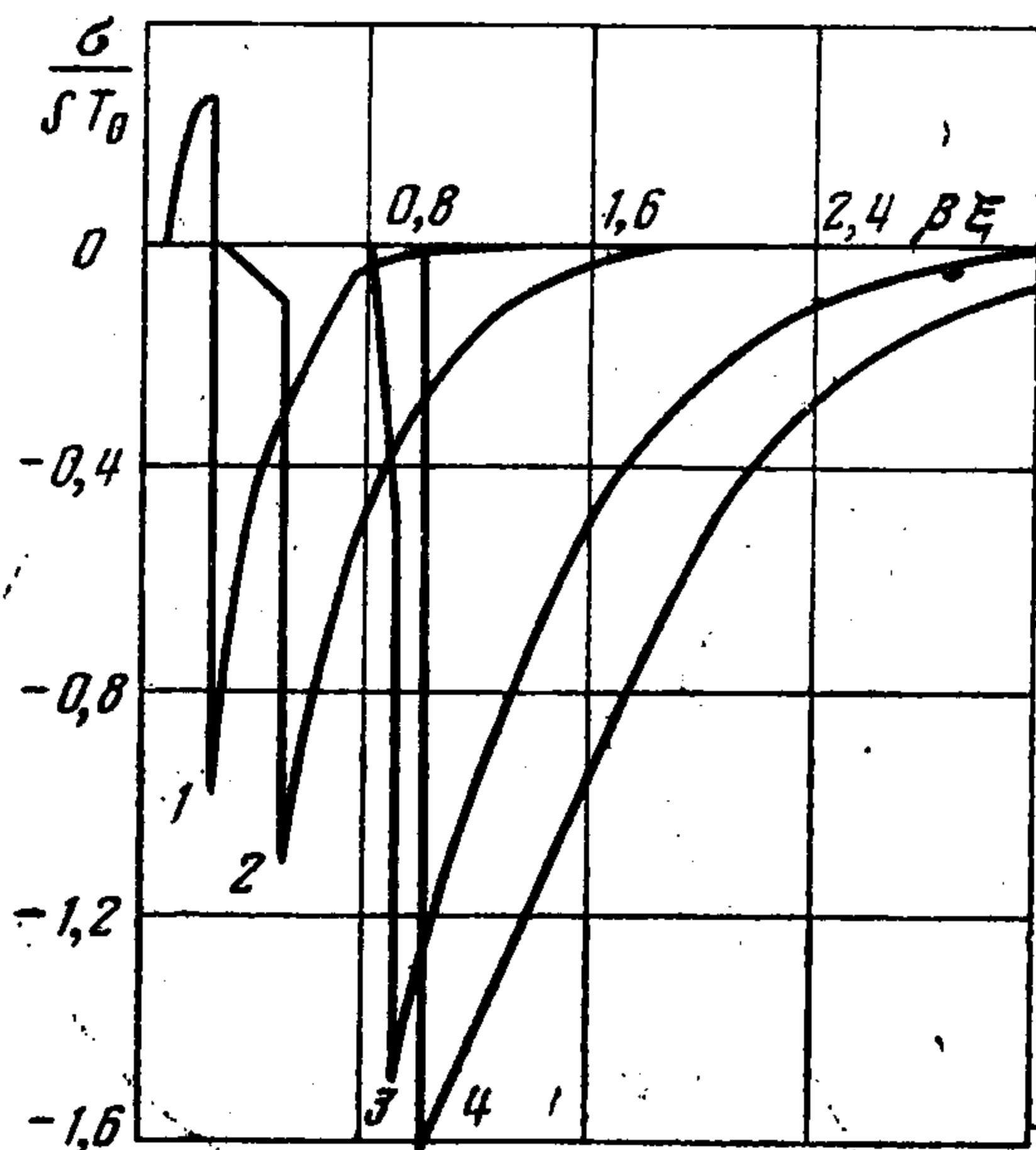
ограниченности σ при $x \rightarrow \infty$ имеем

$$(6) \quad \sigma = \frac{ST_0}{2} \left[\frac{V\bar{p}}{\left(V\bar{p} - \frac{v}{a}\right)\left(\frac{c^2}{a^2} - p\right)} + \frac{1}{\frac{c^2}{a^2} - p} \right] \exp\left(-\frac{x}{a} V\bar{p}\right) + \\ + \exp\left(-\frac{x}{c} p\right) \bar{F}(p)$$

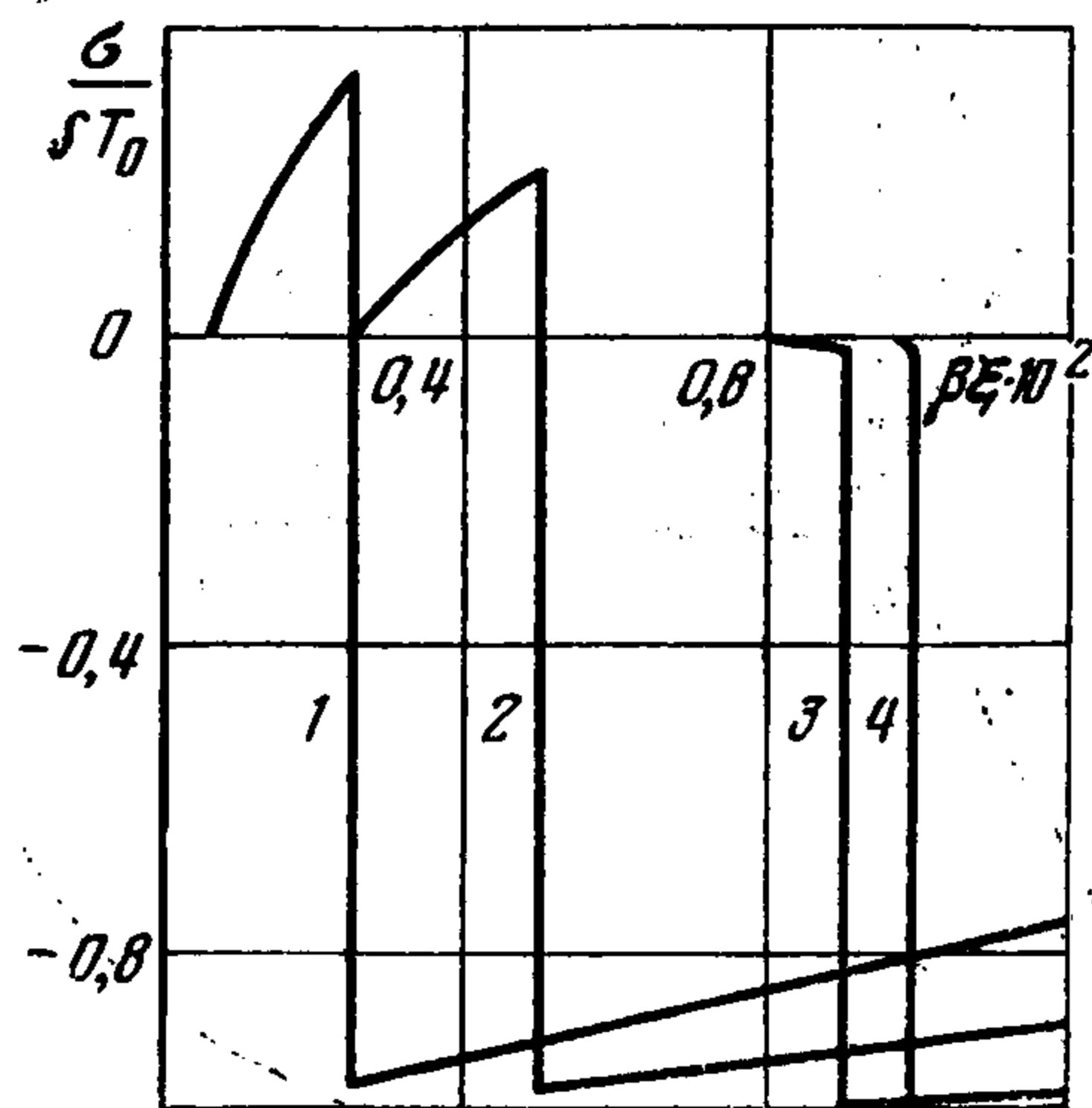
где $\bar{F}(p)$ — образ произвольной функции. Переходя в (6) к оригиналу и учитывая (3), получим [2]

$$(7) \quad \sigma = \frac{ST_0}{2} \left[F_1(\xi, \tau) - H\left(t - \frac{x}{c}\right) F_2(\xi, \tau) \right] \\ F_1(\xi, \tau) = \left[1 + \frac{\beta}{2(\beta-1)} \right] e^{\tau-\xi} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - V\sqrt{\tau}\right) + \\ + \left[1 - \frac{\beta}{2(1+\beta)} \right] e^{\tau+\xi} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + V\sqrt{\tau}\right) + \\ + \frac{\beta^2}{\beta^2-1} e^{\beta(\beta\tau-\xi)} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \beta V\sqrt{\tau}\right) \\ F_2(\xi, \tau) = \left[1 + \frac{\beta}{2(1-\beta)} \right] e^{\tau-\xi} \operatorname{erfc}_+ \left[\left(1 - \frac{\beta}{2}\right) \sqrt{\frac{\tau-\xi}{1-\beta}} \right] + \\ + \left[1 - \frac{\beta}{2(1+\beta)} \right] e^{\frac{1+\beta}{1-\beta}(\tau-\xi)} \operatorname{erfc} \left[\left(1 + \frac{\beta}{2}\right) \sqrt{\frac{\tau-\xi}{1-\beta}} \right] + \\ + \frac{\beta^2}{\beta^2-1} \operatorname{erfc}_+ \left(\frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{\tau-\xi}{1-\beta}} \right), \quad \operatorname{erfc}_+(x) = 1 + \Phi(x), \\ \xi = \frac{c}{a^2} x, \quad \tau = \frac{c^2}{a^2} t, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

($H(t)$ — функция Хевисайда). При $\beta \rightarrow 0$ ($v \rightarrow 0$) решение (7) переходит в решение задачи Даниловской И. В. [3] (см. также [1]).



Фиг. 1



Фиг. 2

В полученном решении, так же как и в задаче Даниловской И. В. напряжения представляются диффузионной частью волны $F_1(\xi, \tau)$, которая возникает сразу в каждой точке полупространства и упругой волной $F_2(\xi, \tau)$, распространяющейся со скоростью c . На фронте упругой волны напряжение терпит разрыв со значением скачка sT_0 и, таким образом, движение границы на величине скачка не сказывается.

На фиг. 1 в координатах $\sigma/(ST_0)$, $\beta\xi$ приведены кривые 1—4, полученные при $\tau = 1$ для значений β , равных 0,25, 0,5, 0,9, 0,99 соответственно. На фиг. 2 при тех же значениях β приведены графики решений для $\tau = 10^{-2}$.

Между границей полупространства и фронтом упругой волны $\beta t < \xi < 1$ возникают положительные напряжения, которые, как и в случае задачи Даниловской И. В., с ростом t переходят в отрицательные. Однако амплитуды напряжений тем больше, чем больше β (v). При этом для данной задачи характерно то, что напряжения меняют свой знак тем раньше, чем больше скорость движения границы v .

При $\beta \rightarrow 1$ в окрестности фронта термоупругой волны при больших t возникают большие напряжения сжатия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
2. Дитвин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965.
3. Даниловская И. В. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы. — ПММ, 1950, т. 14, вып. 3.

Томск

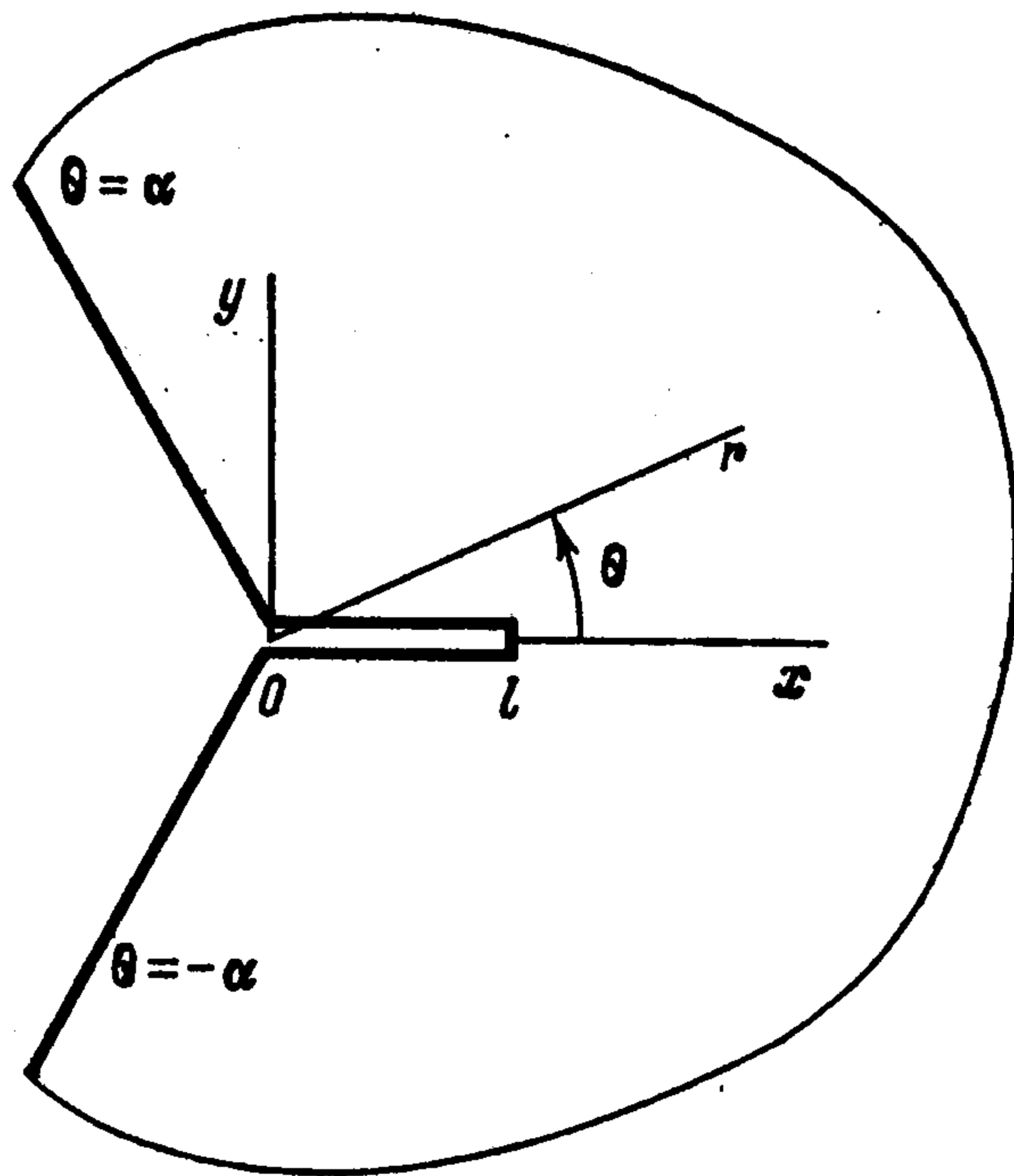
Поступила в редакцию
1.VI.1979

УДК 539.535

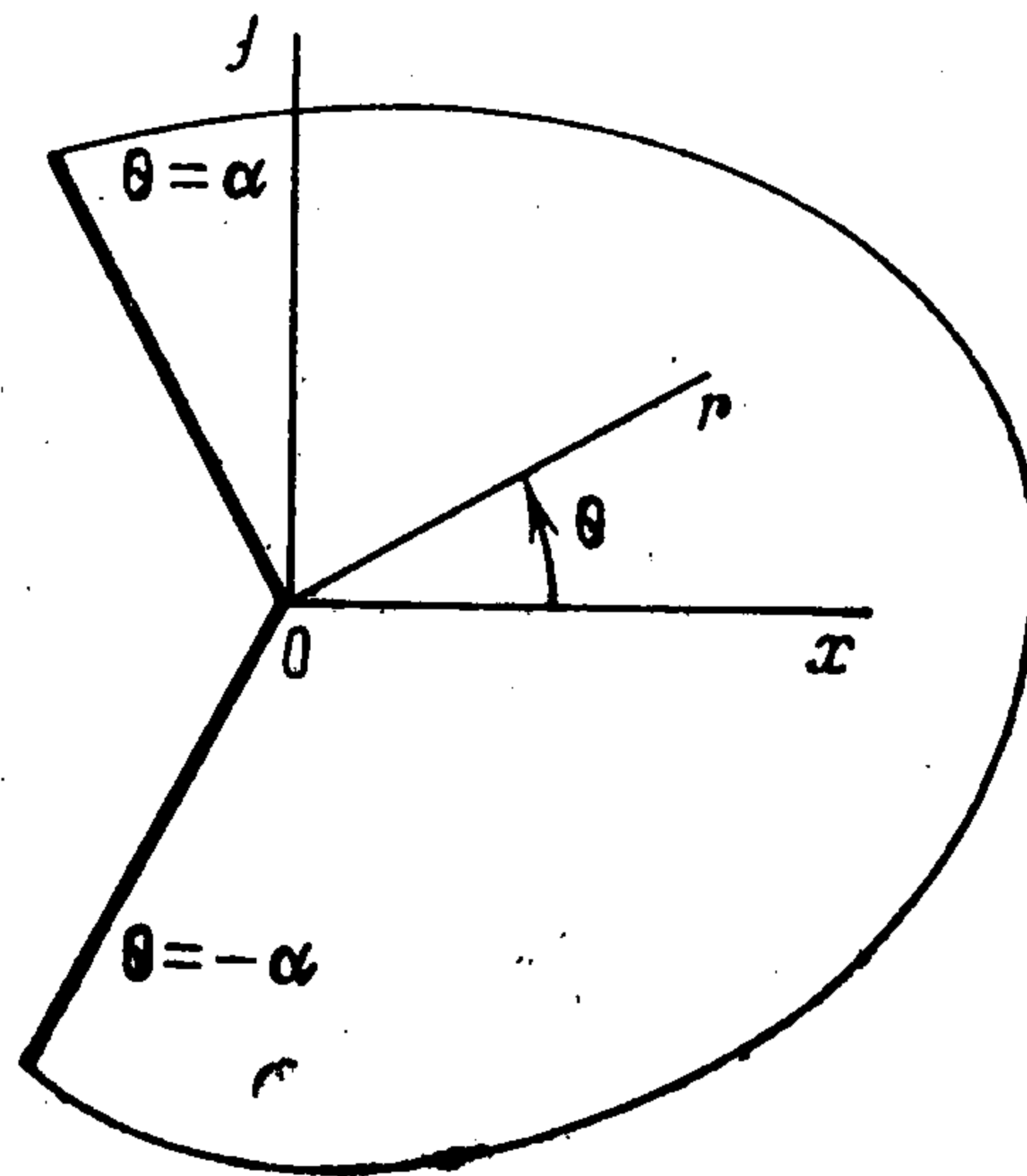
ОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КЛИНА С СИММЕТРИЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ В ВЕРШИНЕ

К и п н и с Л. А.

Строится точное решение плоской статической однородной задачи теории упругости класса N [1] для объемлющего полупространство клина с трещиной в вершине, расположенной в биссекторной плоскости.



Фиг. 1



Фиг. 2

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечный упругий клин с углом раствора, большим π , содержащий трещину при $y = 0$, $x < l$ (Фиг. 1). Грани клина и берега трещины свободны от напряжений. Предполагается, что на бесконечности решение соответствующей симметричной (относительно плоскости $\theta = 0$) задачи ведет себя как удовлетворяющее условию затухания напряжений на бесконечности асимптотически наибольшее на бесконечности решение симметричной задачи для клина $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$,