

Как видно, с увеличением начального напряжения влияние его резко увеличивается, причем тем больше, чем больше по модулю величина производной $\varphi(t)$.

Авторы благодарят Бабешко В. А. за внимание к работе и полезное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наукова думка, 1973. 270 с.
2. Гузь А. Н., Жук А. П., Махорт Ф. Г. Волны в слое с начальными напряжениями. Киев.: Наукова думка, 1976. 103 с.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
4. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
5. Калинин В. В. Об одной динамической задаче для бесконечного цилиндра. — ПММ, 1975, т. 39, вып. 3, с. 555.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
23.IV.1980

УДК 539.3

УДАР КОНУСОМ ПО ДЕФОРМИРУЕМОЙ НИТИ

Агаларов Д. Г., Нуриев Б. Р., Рахматулин Х. А.

Исследуется движение гибкой деформируемой нити и процесс распространения волн напряжений в ней при поперечном ударе конусом. Выводятся уравнения движения и находится аналитическое решение автомодельной задачи для произвольной однозначной зависимости напряжения от деформации. Исследуются возможные волновые схемы движения нити. Показано, что в случае полного облегания движение нити с одним изломом невозможно и впервые найдена новая волновая схема движения при поперечном ударе. На основе установленной волновой схемы с двумя изломами выводятся условия на волнах сильного разрыва. Дан численный расчет для схемы с линейным упрочнением и построены графики зависимости деформаций от скорости удара.

Теория поперечного удара по гибким нитям при больших отклонениях формы от первоначальной прямолинейной разработана в [1, 2]. Теория плоского движения нити хорошо освещена в литературе [3—6].

1. Уравнения движения. Пусть по бесконечной гибкой прямолинейной нити производится поперечный удар конусом с постоянной скоростью v_0 , причем ось конуса проходит через линию первоначального положения нити, а последняя в начале соударения соскакивает с вершины конуса. Обращая задачу, рассмотрим движение нити по поверхности конуса с поперечной скоростью v_0 в бесконечности.

Примем за независимые переменные время t и лагранжеву координату s_0 — расстояние рассматриваемой частицы от некоторой фиксированной точки в начальный момент времени. Положения частиц в процессе движения на поверхности конуса будем определять радиусом окружности $r(s_0, t)$, проходящей через рассматриваемую точку (s_0, t) , и центральным углом $\theta(s_0, t)$ этой окружности, отсчитываемым от некоторой фиксированной осевой плоскости.

Уравнение движения нити на поверхности конуса при отсутствии массовых сил и сил трения имеет вид

$$(1.1) \quad \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial s_0} + \frac{P}{F_0}$$

где $v(s_0, t)$ — скорость частиц нити, ρ_0 — начальная плотность, $T = \sigma t$ — сила натяжения, $\sigma(e)$ — напряжение, отнесенное к начальной площади поперечного сечения,

$\tau(s_0, t)$ — единичный вектор касательной к нити в точке (s_0, t) , $e(s_0, t)$ — относительное удлинение, $P(s_0, t)/F_0$ — нормальная реакция конуса, F_0 — начальная площадь поперечного сечения нити.

Движение нити происходит по поверхности конуса, а нить гибкая, поэтому имеем следующие представления:

$$(1.2) \quad v = ir \frac{\partial \theta}{\partial t} + j \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial r}{\partial t}, \quad T = i\sigma \cos \varphi + j\sigma \sin \varphi$$

где i и j — единичные векторы соответственно вдоль окружности и образующей конуса, проходящих через точку (s_0, t) , α — угол полураствора конуса, $\varphi(s_0, t)$ — угол между нитью и окружностью на поверхности конуса в точке (s_0, t) .

Вычисляя производные единичных векторов $i(s_0, t)$ и $j(s_0, t)$, получим

$$(1.3) \quad \frac{\partial i}{\partial t} = n^\circ \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad \frac{\partial i}{\partial s_0} = n^\circ \frac{\partial \theta}{\partial s_0}$$

$$\frac{\partial j}{\partial t} = i \frac{\partial \theta}{\partial t} \sin \alpha, \quad \frac{\partial j}{\partial s_0} = i \frac{\partial \theta}{\partial s_0} \sin \alpha$$

где $n^\circ(s_0, t)$ — единичный вектор с точкой приложения в (s_0, t) , направленный по радиусу к центру окружности, проходящей через точку (s_0, t) .

В проекциях на направления i и j из уравнения (1.1) с учетом (1.2) и (1.3) получим

$$(1.4) \quad \rho_0 \left(r \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial s_0} (\sigma \cos \varphi) + \sigma \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial s_0} \sin \alpha$$

$$\rho_0 \left[\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - r \sin \alpha \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right] = \frac{\partial}{\partial s_0} (\sigma \sin \varphi) - \sigma \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial s_0} \sin \alpha$$

Имеем следующие кинематические условия:

$$(1.5) \quad r \frac{\partial \theta}{\partial s_0} = (1 + e) \cos \varphi, \quad \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial r}{\partial s_0} = (1 + e) \sin \varphi$$

Уравнения (1.4) и (1.5) дополнены уравнением состояния

$$(1.6) \quad \sigma = \sigma(e)$$

представляют замкнутую нелинейную систему уравнений в частных производных, из которых следует найти $r(s_0, t)$, $\theta(s_0, t)$, $\varphi(s_0, t)$, $e(s_0, t)$. После этого определяем давление конуса $|P| = PF_0/(1 + e)$, проектируя уравнение (1.1) на направление внешней нормали к поверхности конуса

$$(1.7) \quad -\rho_0 r \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \cos \alpha = P - \sigma \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial s_0} \cos \alpha$$

2. Решение задачи. Как показывает система уравнений (1.4), (1.5) и (1.6), при поперечном ударе с постоянной скоростью задача автомодельна.

Введем безразмерные переменные

$$(2.1) \quad R = \frac{r}{v_0 t}, \quad x = \frac{s_0}{v_0 t}$$

Согласно теории подобия, искомые функции R , θ , φ , e должны зависеть только от x . Следовательно, систему (1.3) и (1.4) можно записать в следующем виде (штрих означает дифференцирование по x):

$$(2.2) \quad x^2 (R\theta'' + 2R'\theta') = \frac{d}{dx} (\sigma_0 \cos \varphi) + \theta' \sin \alpha \sigma_0 \sin \varphi, \quad \sigma_0 = \frac{\sigma}{\rho_0 v_0^2}$$

$$x^2 \left[\frac{1}{\sin \alpha} R'' - R \sin \alpha (\theta')^2 \right] = \frac{d}{dx} (\sigma_0 \sin \varphi) - \theta' \sigma_0 \sin \alpha \cos \varphi$$

$$(2.3) \quad R\theta' = (1 + e) \cos \varphi, \quad \frac{1}{\sin \alpha} R' = (1 + e) \sin \varphi$$

Уравнение (1.7) принимает вид

$$(2.4) \quad -x^2 R\theta'^2 \cos \alpha = P_0 - \theta' \sigma_0 \cos \alpha \cos \varphi$$

Кроме уравнений (2.2)–(2.4) имеем еще уравнение состояния (1.6).

Из системы (2.2), (2.4) с учетом (2.3) после некоторых операций получим

$$(2.5) \quad \left(\frac{\sigma_0}{1+e} - x^2 \right) (\varphi' - \theta' \sin \alpha) = 0$$

$$\left(\frac{d\sigma_0}{de} - x^2 \right) \frac{de}{dx} = 0, \quad P_0 = \left(\frac{\sigma_0}{1+e} - x^2 \right) \theta' \cos \alpha \cos \varphi$$

Как показывает последнее уравнение, $\sigma_0/(1+e) - x^2 \neq 0$, так как на поверхности конуса сила реакции $P \neq 0$, а значит, и $P_0 \neq 0$. Следовательно, из первого уравнения (2.5) для произвольной зависимости $\sigma = \sigma(e)$ получим

$$(2.6) \quad \varphi = \theta \sin \alpha + C_1$$

Разделим второе уравнение (2.3) на первое и проинтегрируем по x . С учетом (2.6) получим

$$(2.7) \quad R = C_2 / \cos \varphi$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, подлежащие определению.

При линейно-упругих деформациях ($\sigma = Ee$) и при нелинейных зависимостях напряжения от деформации, когда $d^2\sigma/de^2 > 0$, $d\sigma_0/de > \sigma_0/(1+e)$, с учетом условия $x^2 - \sigma_0/(1+e) < 0$ (так как $P_0 > 0$) получим

$$x^2 - d\sigma_0/de < 0.$$

Следовательно, при произвольной зависимости $\sigma = \sigma(e)$, когда $d^2\sigma/de^2 \geq 0$, из второго уравнения (2.5) имеем

$$(2.8) \quad e = \text{const.}$$

При тех зависимостях $\sigma = \sigma(e)$, для которых $d^2\sigma/de^2 < 0$, второе уравнение (2.5) дает интеграл

$$(2.9) \quad x^2 - d\sigma_0/de = 0$$

Решение (2.9), которое при заданной зависимости $\sigma = \sigma(e)$ служит для определения $e = e(x)$, показывает, что для зависимостей $\sigma = \sigma(e)$, обеспечивающих непрерывный волновой процесс, по нити распространяется волна Римана. За волной Римана располагается область постоянных деформаций. При этом форма нити, описываемая формулой (2.6), пространственная.

Из (2.3) с учетом (2.6) и (2.7) получаем последний интеграл задачи

$$(2.10) \quad \text{tg } \varphi = \frac{\sin \alpha}{C_2} \int (1+e) dx + C_3$$

При прямом ударе имеем $\theta = 0$ и $\varphi = 0$ в точке $x = 0$. Следовательно, постоянные C_1 и C_3 обращаются в нуль и формулы (2.6) и (2.10) соответственно принимают вид

$$(2.11) \quad \varphi = \theta \sin \alpha, \quad \text{tg } \varphi = \frac{\sin \alpha}{C_2} \int_0^x (1+e) dx$$

В области чисто продольных движений имеем одномерное уравнение

$$(2.12) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial s_0}, \quad e = \frac{\partial w}{\partial s_0}, \quad \sigma = \sigma(e)$$

где $w(s_0, t)$ — перемещение частиц нити в области чисто продольных движений. Можно показать, что при $d^2\sigma/de^2 < 0$ уравнение (2.13) имеет решение

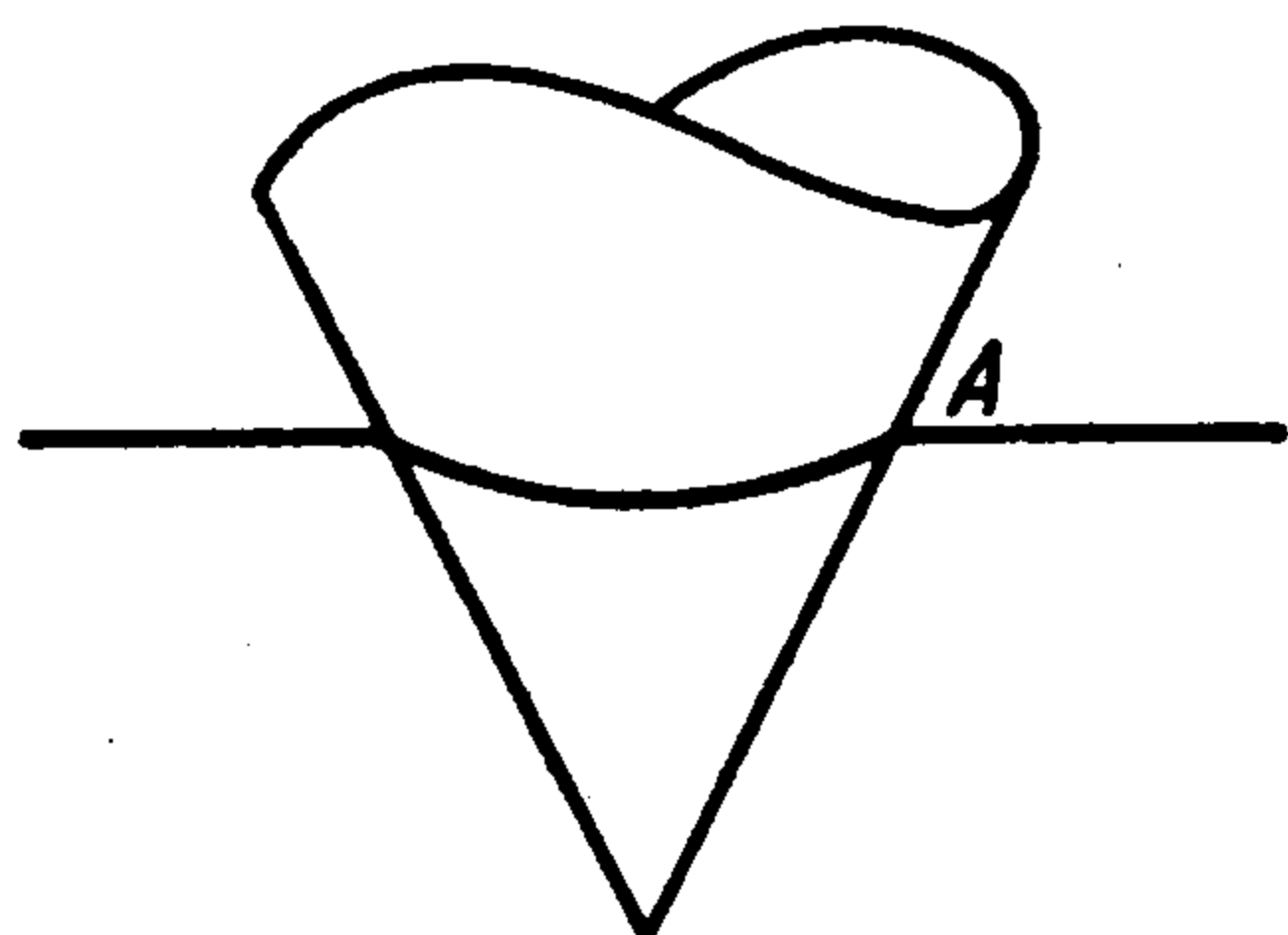
$$(2.13) \quad x^2 - \frac{d\sigma_0}{de} = 0, \quad w_t = - \int_0^e \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma}{de}} de$$

В случае $d^2\sigma/de^2 \geq 0$ из (2.13) находим

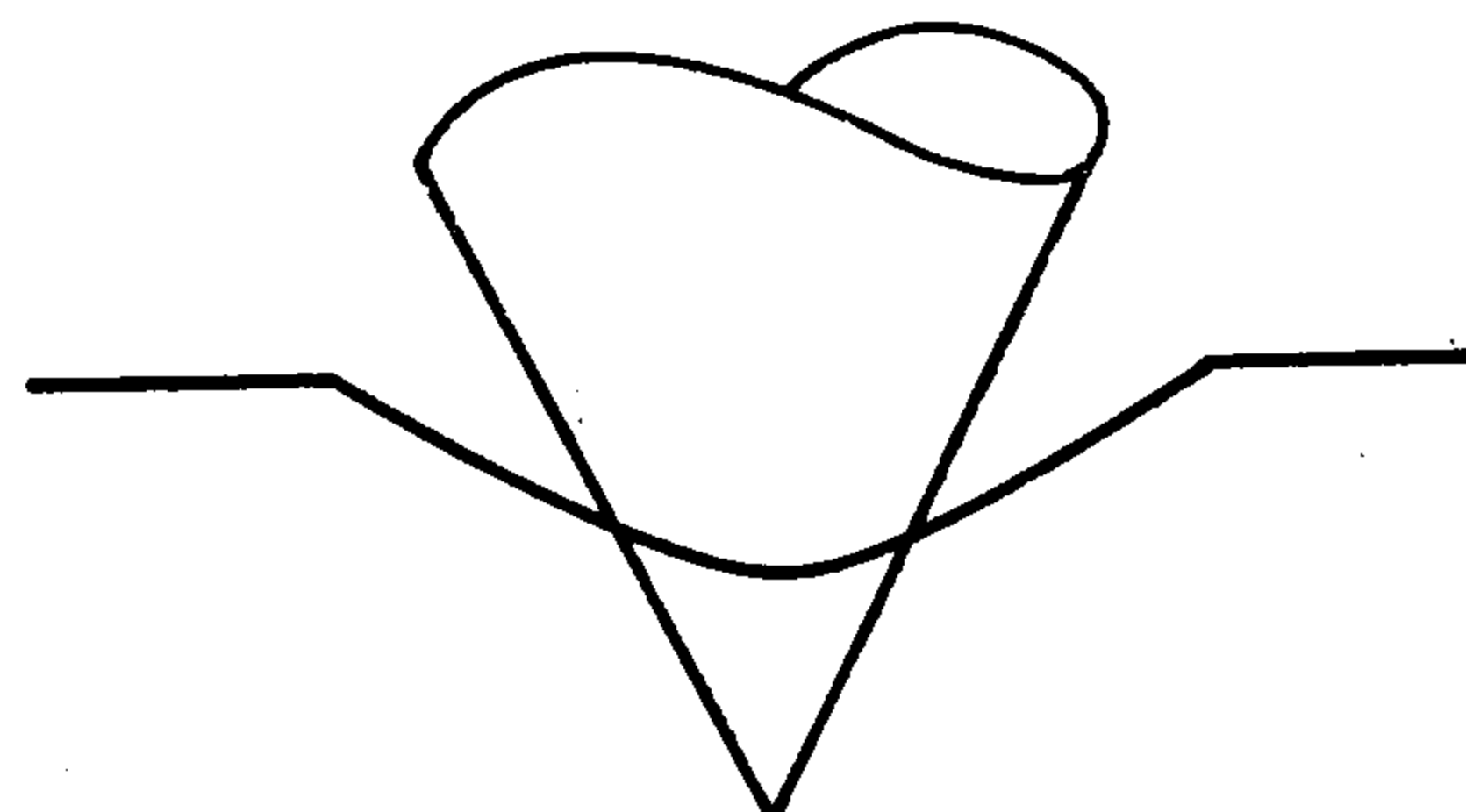
$$(2.14) \quad e = \text{const.}$$

Граничные значения деформации и скорости частиц в области чисто продольных движений определяются из условий на волне сильного разрыва, которая образуется в точке перехода поперечного движения в продольное. Постоянная C_2 , входящая в формулы (2.7) и (2.11), должна определяться из условий в точке $\theta = \pi/2$.

3. Возможные волновые схемы движения. Запишем уравнения сохранения количества движения на волне сильного разрыва A (фиг. 1), принимая во внимание наличие



Фиг. 1



Фиг. 2

в точке набега на конус сосредоточенной силы Q

$$(3.1) \quad \rho_0 (b - w_t) r \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\sigma \cos \varphi (1 + e_1)$$

$$\rho_0 (b - w_t) \left(\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial r}{\partial t} - v_0 \cos \alpha - w_t \sin \alpha \right) = (\sigma_1 \sin \alpha - \sigma \sin \varphi) (1 + e_1)$$

$$\rho_0 (b - w_t) (v_0 \sin \alpha - w_t \cos \alpha) = (\sigma_1 \cos \alpha + Q) (1 + e_1)$$

Здесь σ_1 , e_1 и w_t — соответственно напряжение, деформация и скорость частиц в области чисто продольных движений, b — скорость волны сильного разрыва.

Из кинематических соображений имеем

$$(3.2) \quad \frac{v_0}{\cos \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial r}{\partial t} = (b - w_t) \frac{1 + e}{1 + e_1} \sin \varphi$$

$$-r \frac{\partial \theta}{\partial t} = (b - w_t) \frac{1 + e}{1 + e_1} \cos \varphi, \quad b = v_0 \operatorname{tg} \alpha$$

Если $\varphi \neq \pi/2$, то из первых двух уравнений (3.1) и (3.2) имеем

$$(3.3) \quad \rho_0 (b - w_t)^2 = \sigma_1 (1 + e_1)$$

Подставляя (3.3) в последнее уравнение (3.1), получаем $Q = 0$, что противоречит допущению о наличии сосредоточенной силы. Последнее говорит о том, что существует область поперечного движения, когда нить не контактирует с конусом (фиг. 2). Это одна из возможных схем движения, реализуемая при меньших скоростях удара

$$v_0 \operatorname{tg} \alpha \leq \sqrt{\frac{\sigma_1}{\rho_0 (1 + e_1)}}$$

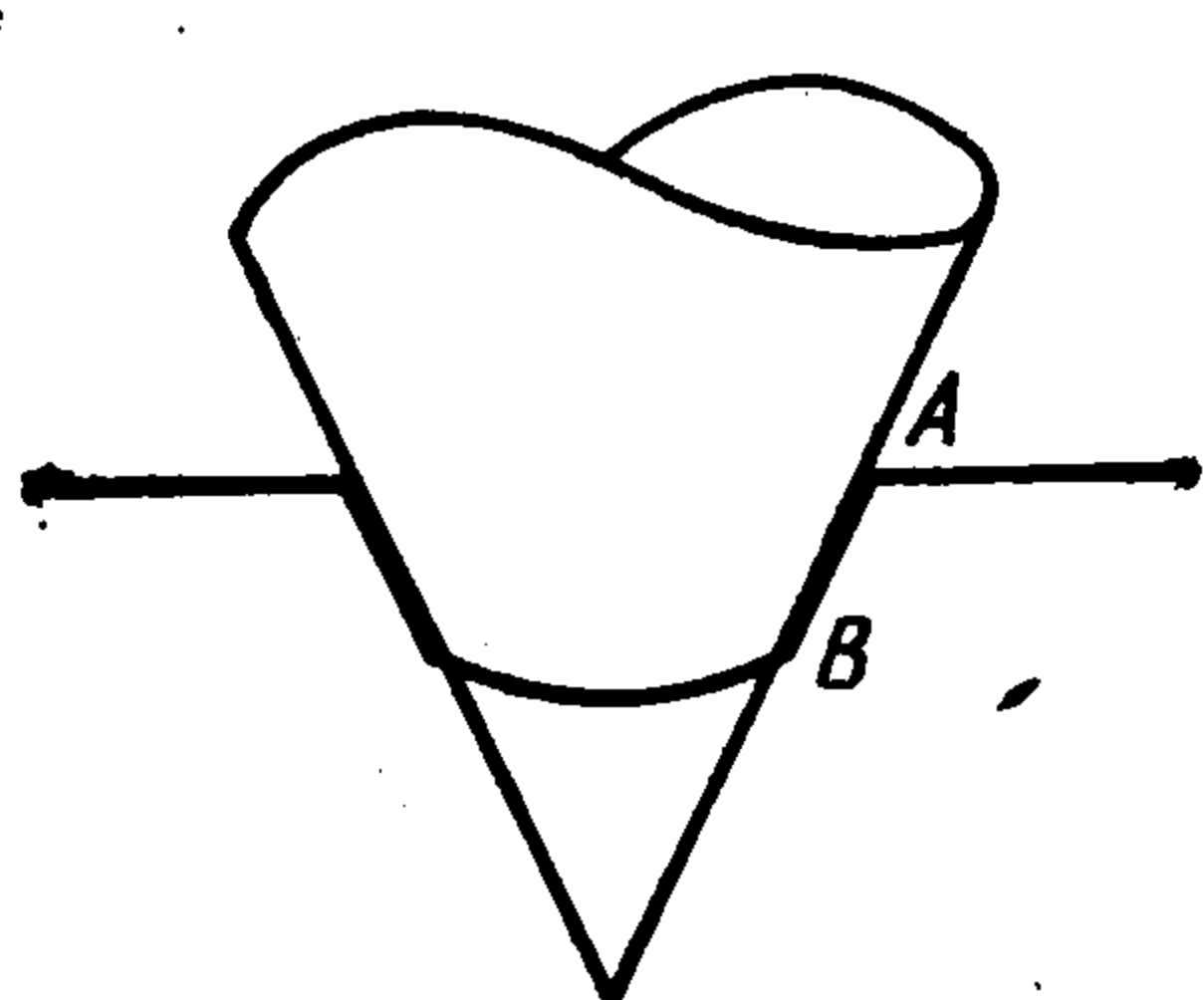
Возможна и другая схема движения нити. При наличии поперечного движения точка излома движется со скоростью

$$b_* = \sqrt{\frac{\sigma_1}{\rho_0 (1 + e_1)}}$$

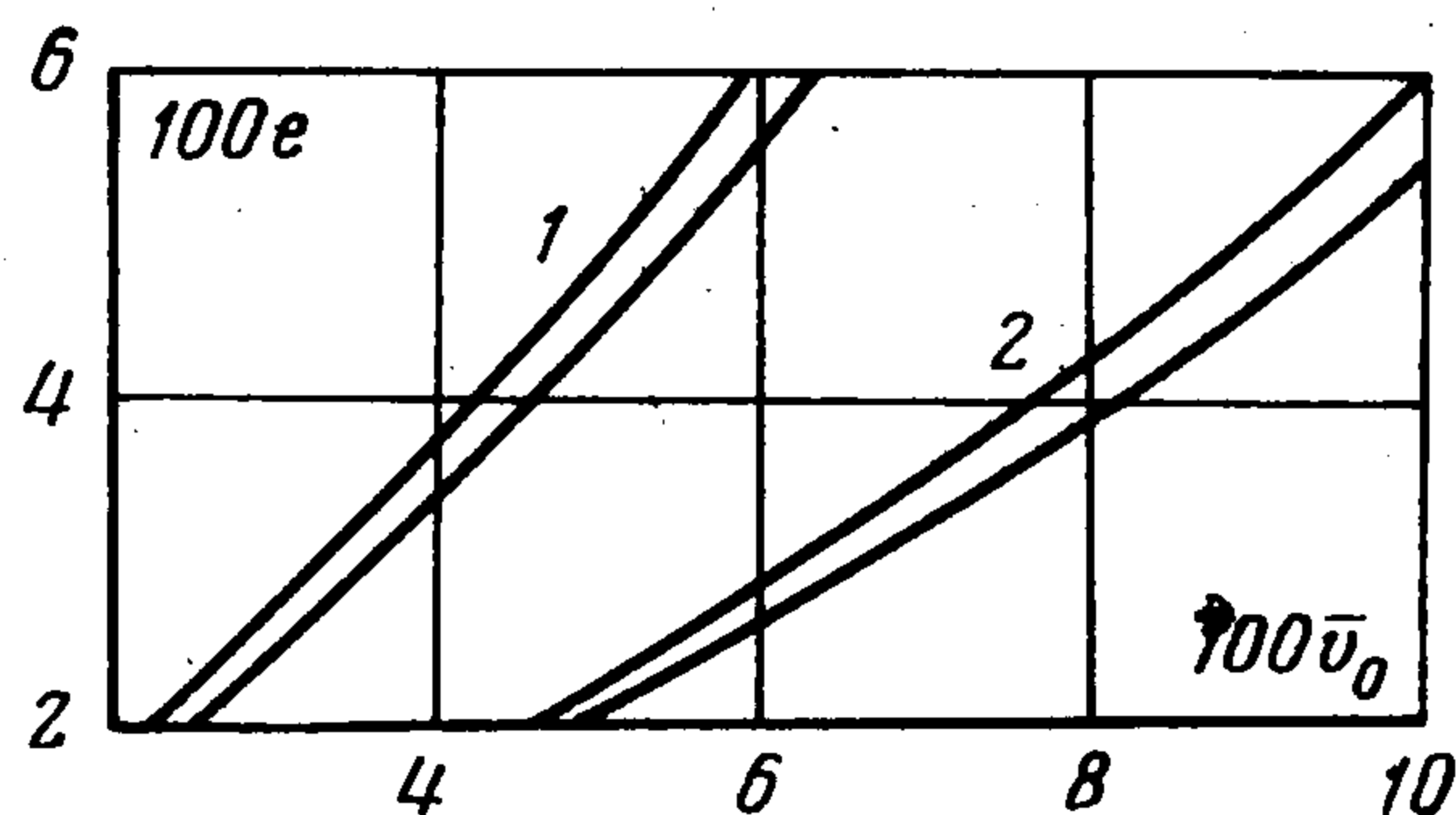
Поэтому можно добиться такой скорости, чтобы точка на поверхности конуса, соответствующая данному излому, двигалась со скоростью, большей b_* , т. е. $Q > 0$. А согласно (3.1), (3.2), условие $Q \neq 0$ возможно только, когда $\varphi = \pi/2$. Но, как показывает первый интеграл (2.11), на крайней образующей, где $\theta = \pi/2$, имеем $\varphi = (\pi/2) \sin \alpha$, т. е. φ терпит разрыв. Из сказанного следует возможность другой схемы движения: область чисто продольных движений примыкает к конусу, затем, ломаясь, некоторый участок нити прилегает к крайней ($\theta = \pi/2$) образующей (эффект клина), а затем ломается (второй излом) и набегаёт на конус, при этом форма нити опреде-

ляется первым интегралом (2.11) (фиг. 3). Последняя схема реализуется при больших скоростях удара: $v_0 \operatorname{tg} \alpha > b_*$.

4. Условия на волнах сильного разрыва. Запишем уравнения сохранения количества движения и условия непрерывности перемещений на волнах сильного разрыва согласно волновой схеме, показанной на фиг. 3, которая реализуется при $v_0 \operatorname{tg} \alpha >$



Фиг. 3



Фиг. 4

$> b_*$. Условия около первого излома A дают

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \rho_0 (b - w_t)(v - v_0 \cos \alpha - w_t \sin \alpha) &= (\sigma_1 \sin \alpha - \sigma_2)(1 + e_1) \\ \rho_0 (b - w_t)(v_0 \sin \alpha - w_t \sin \alpha) &= (Q + \sigma_1 \cos \alpha)(1 + e_1) \end{aligned}$$

$$\frac{v_0}{\cos \alpha} - v = \frac{b - w_t}{1 + e_1} (1 + e_2), \quad b = v_0 \operatorname{tg} \alpha$$

$$w_t = -\psi(e_1), \quad \psi(e_1) = \int_{e_0}^{e_1} \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma_1}{de_1}} de_1$$

где σ_2 и e_2 — напряжение и деформация в области AB.

Около второго излома B имеем следующие условия:

$$(4.2) \quad \rho_0 (c - v) r\theta' = -\sigma \cos \varphi (1 + e_2)$$

$$\rho_0 (c - v) \left(\frac{r}{\sin \alpha} - v \right) = (\sigma_2 - \sigma \sin \varphi) (1 + e_2)$$

$$r\theta' = -\frac{c - v}{1 + e_2} (1 + e) \cos \varphi, \quad \frac{r}{\sin \alpha} - c = -\frac{c - v}{1 + e_2} (1 + e) \sin \varphi$$

Из решений можно установить, что

$$(4.3) \quad r\theta' = -c \sin \varphi \cos \varphi$$

Отметим, что если при помощи формул (2.11), (2.7) определить $r'/\sin \alpha$, то полученное выражение будет следствием двух последних уравнений (4.2).

Учитывая, что вблизи точки B имеем $\varphi = (\pi/2) \sin \alpha$, из системы уравнений (4.1)–(4.3) при заданной зависимости $\sigma = \sigma(e)$ можно определить неизвестные $b, w_t, v, e, e_1, e_2, Q, c, r\theta', r'/\sin \alpha$. Здесь v — скорость частиц нити в области AB, c — скорость волны сильного разрыва B.

Можно установить, что система уравнений (4.2), (4.3) допускает решение $e = e_2$.

На основании расчета для схемы Прандтля при $e_s = 0,002 (a_1/a_0)^2 = 0,05$ на фиг. 4 приведены графики зависимости деформации e от безразмерной скорости удара $v_0 = v_0/a_0$. Здесь a_0 — скорость упругих волн, a_1 — скорость пластических волн, e_0 — начальная деформация нити. Сплошные кривые приведены для $e_0 = 0$, штриховые — для $e_0 = 0,001$; кривые 1 — для $\alpha = 60^\circ$; 2 — для $\alpha = 75^\circ$.

На волне B имеем $R = (c/v_0) \sin \alpha$ и согласно формуле (2.7) находим

$$C_2 = \frac{c}{v_0} \sin \alpha \cos \left(\frac{\pi}{2} \sin \alpha \right)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Разматулин Х. А. О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения.— ПММ, 1945, т. 9, вып. 6, с. 449.
2. Разматулин Х. А. Об ударе по гибкой нити.— ПММ, 1947, т. 11, вып. 3, с. 379.
3. Разматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961. 399 с.
4. Павленко А. Л. Обобщение теории поперечного удара по гибкой нити.— Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1960, № 2, с. 110.
5. Ленский Э. В. Удар клином по упругой нити.— Инж. ж. МТТ, 1968, № 2, с. 104.
6. Lee S. Y., Ames W. F. A Class of General Solutions to the nonlinear dynamic equations of elastic strings.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1973, v. 40, No. 4. (Рус. перев.: Тр. Амер. о-ва инж.-механ. Сер. Е. Прикл. механика, 1973, № 4.)

Москва, Баку

Поступила в редакцию
5.VIII.1980

УДК 536.12

ЗАДАЧА ДАНИЛОВСКОЙ В СЛУЧАЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ ГРАНИЦЫ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Семкин Б. В., Юшин А. В.

При использовании электрических разрядов, явления электрического взрыва проводников и других процессов, характеризующихся высокой температурой, возникают динамические задачи температурных напряжений с движущимися границами. В данной работе решается одномерная задача температурных напряжений, возникающих в упругом полупространстве в результате внезапного нагрева его границы, в случае, когда граница движется с постоянной скоростью v .

Для однородного изотропного полупространства система уравнений температурных напряжений имеет вид [1]

$$(1) \quad c^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = S \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad S = \alpha_t (3\lambda + 2\mu)$$

$$(2) \quad a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad c^2 = \frac{2\mu + \lambda}{\rho}$$

Здесь σ — напряжение, α_t — коэффициент теплового расширения, λ и μ — изотермические постоянные Ламе, T — температура, c^2 — квадрат скорости звука, a^2 — коэффициент температуропроводности.

Начальные и граничные условия в рассматриваемой постановке

$$(3) \quad \sigma(x, 0) = 0, \quad \partial \sigma(x, 0) / \partial t = 0, \quad \sigma(vt, t) = 0$$

$$(4) \quad T(x, 0) = 0, \quad T(vt, t) = T_0, \quad x > vt$$

Решение уравнения теплопроводности (2) с начальными и граничными условиями (4) достаточно просто находится с помощью перехода к подвижной системе отсчета $y = x - vt$, $t = t$ и имеет вид

$$(5) \quad T = \frac{1}{2} T_0 \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} - \frac{v}{a} \sqrt{t} \right) \exp \left[-\frac{v}{a^2} (x - vt) \right] \right]$$

Решение уравнения (1) при условиях (3) с учетом (5) удобно получить воспользовавшись преобразованием Лапласа. Для изображения σ по Лапласу в предположении