

УДК 539.3:534

О ВОЗБУЖДЕНИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО ЦИЛИНДРА

Калинчук В. В., Полякова И. Б.

В рамках линеаризованной теории распространения упругих волн [1, 2] развивается метод изучения особенностей возбуждения бесконечного кругового предварительно напряженного цилиндра вибрирующим на его поверхности жестким бандажом. Материал цилиндра предполагается сжимаемым, первоначально изотропным, имеющим упругий потенциал произвольной формы. Осесимметричные колебания бандажа происходят по гармоническому закону с частотой ω . Исследование основано на сведении краевой задачи теории упругости к интегральному уравнению или системе интегральных уравнений в зависимости от условий контакта между бандажом и цилиндром.

Численный анализ свойств символов интегральных операторов позволяет проследить влияние как интенсивности начальной деформации, так и выбора формы упругого потенциала на основные характеристики волнового процесса в цилиндре. Более детальный анализ возможен при построении решений интегральных уравнений. В частности, на примере задачи о радиальной вибрации бандажа показано влияние величины начальных напряжений на распределение контактных напряжений под штампом, на поведение свободной поверхности вне его.

1. Начальное напряженное состояние предполагается однородным, т. е. [1, 2]

$$u_n^0 = \delta_{in} (\lambda_i - 1) x_n, \quad n = 1, 2, 3$$

$$\lambda_i = \text{const}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3, \quad \sigma_{11}^{*0} = \sigma_{22}^{*0} \neq \sigma_{33}^{*0}$$

Здесь u_n^0 — составляющие вектора начальных смещений, σ_{ii}^{*0} — компоненты тензора обобщенных начальных напряжений, λ_i — относительное удлинение волокон, δ_{in} — символ Кронекера.

Перейдем к цилиндрической системе координат r, φ, z . Ось Oz направим по оси Ox_3 . Используя принцип предельного поглощения [3, 4], задачу об осесимметричном возбуждении цилиндра вибрирующим бандажом сведем к исследованию уравнений ($u_r(z, t) = U_r(z) e^{-i\omega t}$, $w(z, t) = W(z) e^{-i\omega t}$ — соответственно радиальная и осевая составляющие вектора смещения, $q(z)$ и $\tau(z)$ — соответственно нормальная и касательная составляющие вектора контактных напряжений, $R = 1$ — радиус цилиндра, a — полуширина бандажа)

$$(1.1) \quad U_r(z) = \frac{1}{2\pi\mu} \int_{-a}^a k_{11}(z-\xi) q(\xi) d\xi + \frac{i}{2\pi\mu} \int_{-a}^a k_{12}(z-\xi) \tau(\xi) d\xi$$

$$W(z) = \frac{i}{2\pi\mu} \int_{-a}^a k_{21}(z-\xi) \tau(\xi) d\xi + \frac{1}{2\pi\mu} \int_{-a}^a k_{22}(z-\xi) q(\xi) d\xi$$

$$(1.2) \quad k_{jn}(t) = \int_{\Gamma} K_{jn}(u) e^{iut} du$$

$$(1.3) \quad K_{jn}(u) = \Delta_{jn}(u, \kappa_2) \cdot \Delta^{-1}(u, \kappa_2), \quad j, n = 1, 2$$

$$\Delta_{11}(u, \kappa_2) = A_1 A_7 A_5^{-1} \sigma_1 \sigma_2 (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) I_{11} I_{12}$$

$$\Delta_{12}(u, \kappa_2) = \sigma_2 l_1 I_{01} I_{12} - \sigma_1 l_2 I_{02} I_{11}$$

$$(1.4) \quad \Delta_{21}(u, \kappa_2) = d_1 \sigma_2 m_2 I_{01} I_{12} - d_2 \sigma_1 m_1 I_{11} I_{02}$$

$$\Delta_{22}(u, \kappa_2) = (d_2 l_1 - d_1 l_2) I_{01} I_{02} + f \sigma_1 d_2 I_{11} I_{02} - f \sigma_2 d_1 I_{01} I_{12}$$

$$\Delta(u, \kappa_2) = l_1 m_2 \sigma_2 I_{01} I_{12} - l_2 m_1 \sigma_1 I_{02} I_{11} + f A_1 A_7 A_5^{-1} \sigma_1 \sigma_2 (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) I_{11} I_{12}$$

$$(1.5) \quad l_i = A_1 \sigma_i^2 - \lambda_1 \lambda_3 a_{13} d_i \quad f = \lambda_1^2 a_{12} - A_1$$

$$m_i = \lambda_1 \lambda_3 \mu_{13} u^2 + A_7 d_i \quad d_i = (A_1 \sigma_i^2 + S_1) A_5^{-1}$$

$$S_1 = \mu_{33} \kappa_2^2 - A_3 u^2 \quad S_2 = \mu_{33} \kappa_2^2 - A_6 u^2$$

$$\begin{aligned}\sigma_{1,2}^2 &= 0,5 (D_2 \mp \sqrt{\Sigma}) \quad \Sigma = D_2^2 - 4D_1D_3 \\ D_1 &= A_1A_7, \quad D_2 = A_5u^2 - A_1S_1 - A_7S_2, \quad D_3 = S_1S_2 \\ A_1 &= a_{11}\lambda_1^2 + \sigma_{11}^{*0}, \quad A_3 = \mu_{13}\lambda_1^2 + \sigma_{33}^{*0}, \quad A_5 = \lambda_1\lambda_3 (a_{13} + \mu_{13}) \\ A_6 &= a_{33}\lambda_3^2 + \sigma_{33}^{*0}, \quad A_7 = \mu_{13}\lambda_3^2 + \sigma_{11}^{*0}, \quad \kappa_2^2 = \rho\omega^2\mu_{33}^{-1}\end{aligned}$$

Здесь $I_{jn} = I_j(\sigma_n)$ ($j = 0, 1, n = 1, 2$) — модифицированные функции Бесселя, ρ — плотность среды, a_{ij}, μ_{ij} — коэффициенты, характеризующие связи между напряжениями и деформациями и определяются через упругий потенциал [1, 2]. Их конкретный вид для рассматриваемых в работе типов упругого потенциала будет приведен ниже.

Контур Γ лежит на вещественной оси и отклоняется от нее лишь обходя отрицательные особенности функции $K_{jn}(u)$ (1.3) сверху, а положительные снизу. Выбор контура диктуется принципом предельного поглощения [4].

Функции $K_{jn}(u)$ (1.3), (1.4) являются мероморфными в комплексной плоскости, вещественными на вещественной оси и имеют на последней конечное число нулей и полюсов, количество которых зависит от κ_2 ($K_{nn}(u)$ — четные, $K_{jn}(u)$ ($j \neq n$) — нечетные). При $u \rightarrow \infty$ справедливо представление

$$(1.6) \quad K_{jn}(u) = c_{jn}u^{-1} + d_{jn}u^{-2} + O(u^{-3})$$

Участвующие в представлении (1.6) константы зависят от характеристик материала цилиндра и величины начального напряжения. Их конкретный вид просто получается с помощью разложений функций Бесселя, но в силу громоздкости здесь не приводится.

2. Соотношения (1.2)—(1.4) позволяют исследовать влияние интенсивности начальной деформации на волновой процесс в цилиндре. Как известно [4, 5], поведение свободной поверхности можно достаточно эффективно определить формулой

$$(2.1) \quad \varphi^\pm(x) = \varphi(\pm x - a), \quad \pm x - a \gg 1$$

$$(2.2) \quad \varphi(t) = \sum_{k=1}^n R_k e^{-iz_k t} + O(e^{-Bt})$$

где $z_{k0}, z_{k\sigma}$ — корни уравнения $\Delta(u, \kappa_2) = 0$ соответственно при $\sigma_{33}^{*0} = 0$ и $\sigma_{33}^{*0} = S$, R_k — числовые коэффициенты.

Видно, что полюсы функции $K_{jn}(u)$ (1.3) связаны с фазовыми скоростями волн, распространяющихся по поверхности цилиндра, соотношениями $V_k = \omega/z_k$, что дает возможность оценить влияние начальных напряжений на фазовые скорости поверхностных волн путем анализа влияния интенсивности начальных деформаций на распределение нулей функции $\Delta(u, \kappa_2)$ (1.4).

Положим, что начальное состояние определено условием

$$\sigma_{11}^{*0} = \sigma_{22}^{*0} = 0, \quad \sigma_{33}^{*0} = S = \text{const.}$$

Постоянные a_{ik}, μ_{ik} , участвующие в представлении символов интегральных операторов, будут иметь вид:

в случае потенциала Мурнагана (при сохранении только линейных членов [2])

$$\begin{aligned}a_{ii} &= \lambda + 2\mu + k_0 S a_{ii}^0, \quad i = 1, 3 \\ a_{1i} &= \lambda + k_0 S a_{1i}^0, \quad \mu_{1i} = \mu + k_0 S m_{1i}^0, \quad i = 2, 3 \\ a_{11}^0 &= 2a + 2(1 - \gamma)b - \gamma c, \quad a_{33}^0 = 2a + (6 + 4\gamma)b + 2(1 + \gamma)c \\ a_{12}^0 &= a - \gamma b, \quad a_{13}^0 = 2a + 2(3 + 2\gamma)b + 2(1 + \gamma)c \\ m_{12}^0 &= b - \gamma c/2, \quad m_{13}^0 = b + (2 + \gamma)c/4 \\ \lambda_1^2 &= 1 - k_0 \gamma S, \quad \lambda_3^2 = 1 + 2k_0(1 + \gamma)S \\ \gamma &= \lambda/\mu, \quad k_0 = (3\lambda + 2\mu)^{-1}, \quad \mu_{33} = \mu\end{aligned}$$

(λ, μ — параметры Ламе, a, b, c — постоянные третьего порядка, участвующие в представлении потенциала Мурнагана);

в случае потенциала гармонического типа [1]

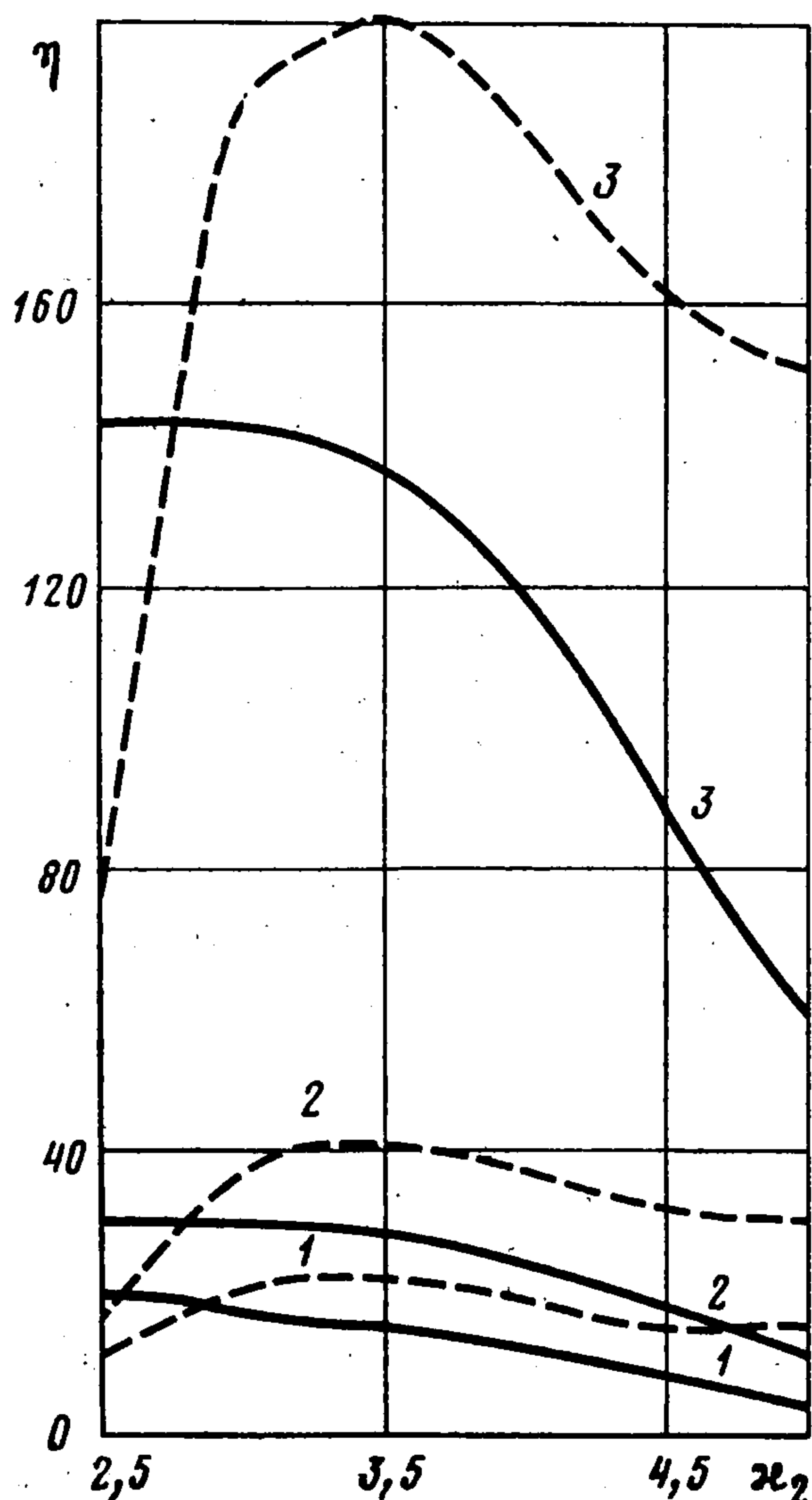
$$a_{ii} = \lambda \Lambda_i^{-2} + (2\mu - \lambda k_0 S \Delta^{-1}) \Lambda_i^{-3}, \quad i = 1, 3$$

$$a_{13} = \lambda / (\Lambda_1 \Lambda_3), \quad \mu_{13} = (2\mu - \lambda k_0 S \Delta^{-1}) / [\Lambda_1 \Lambda_3 (\Lambda_1 + \Lambda_3)]$$

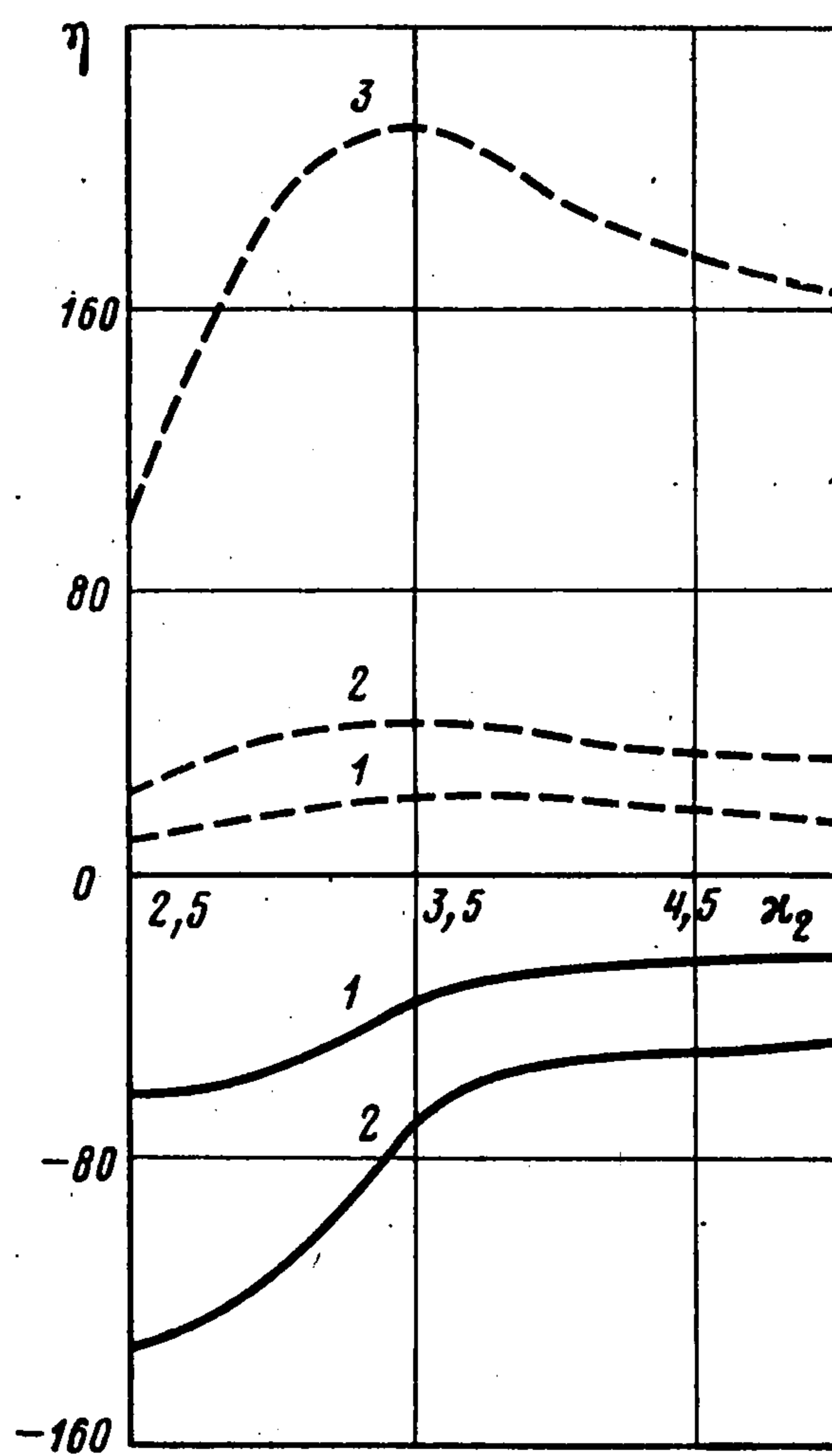
$$\Lambda_1 = 1 - 0,5 k_0 \gamma S \Delta^{-1}, \quad \Lambda_3 = 1 + (1 + \gamma) k_0 S \Delta^{-1}$$

$$\Delta = 1 - (1 + \gamma) S k_0$$

На фиг. 1, 2 приведены графики величины $\eta = (z_{k0} - z_{k\sigma}) \cdot 10^3 / z_{k\sigma}$ соответственно для стали 09Г2С и сплава АМГ-6. Для потенциала Мурнагана зависимости показаны



Фиг. 1



Фиг. 2

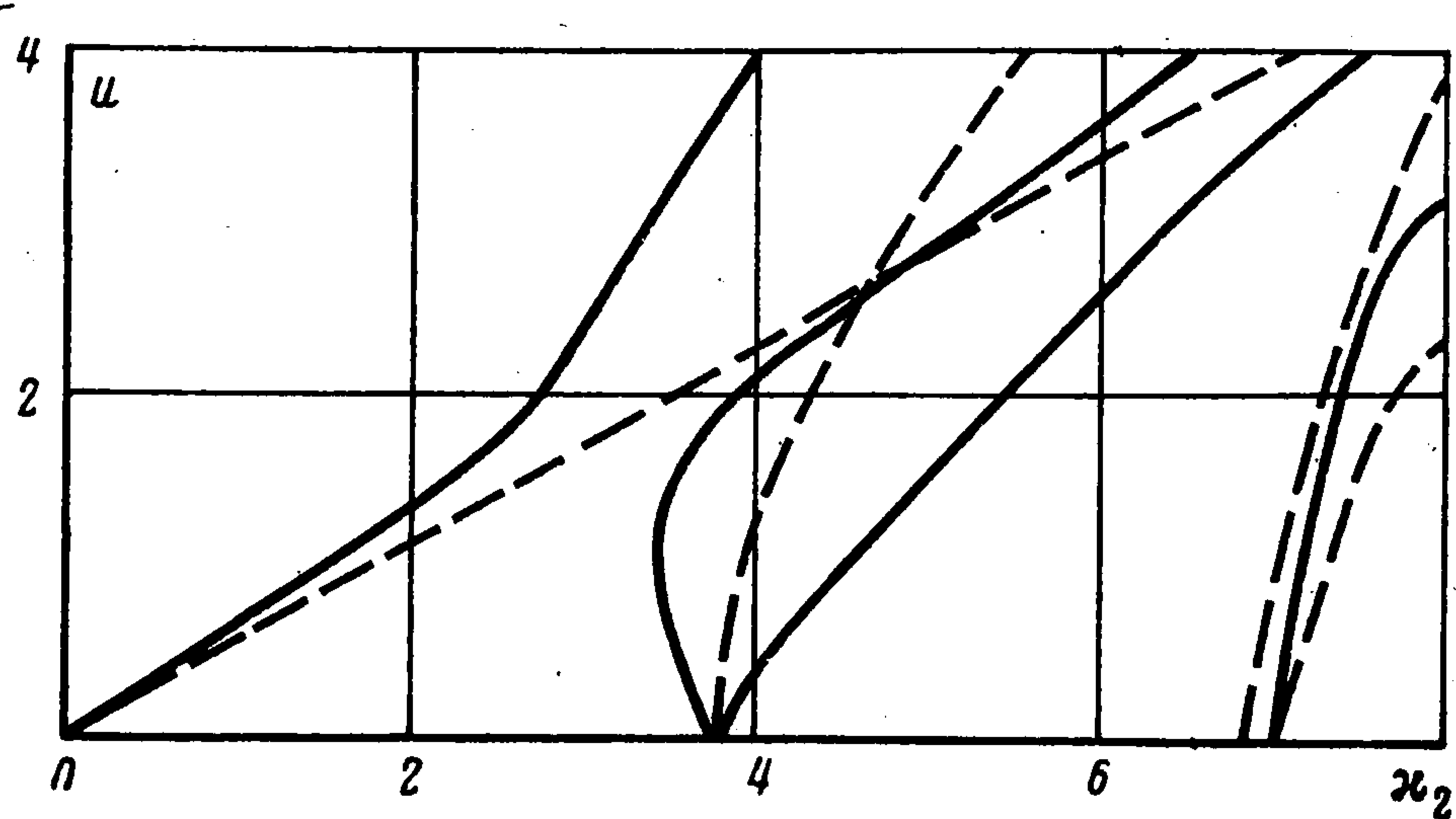
сплошными линиями, для гармонического потенциала — штриховыми. Соответственно цифрами 1, 2, 3 отмечены кривые при значениях $S = 5 \cdot 10^{-4} \mu, 10^{-3} \mu, 5 \cdot 10^{-3} \mu$. Видно, что для стали увеличение начального напряжения приводит к увеличению фазовой скорости вне зависимости от формы упругого потенциала. Для сплава этого отметить нельзя, поскольку изменение формы упругого потенциала полностью изменяет характер зависимости фазовой скорости волны от начального напряжения. Последнее обстоятельство показывает, что при исследовании волнового процесса в начально деформированных телах большое значение имеет не только интенсивность начальных напряжений, но и выбор формы упругого потенциала, который в каждом конкретном случае должен быть обоснован.

3. Более детально исследуем влияние начальных напряжений на волновой процесс в цилиндре на примере, задачи о радиальной вибрации бандаж. Решение этой задачи сводится к решению интегрального уравнения

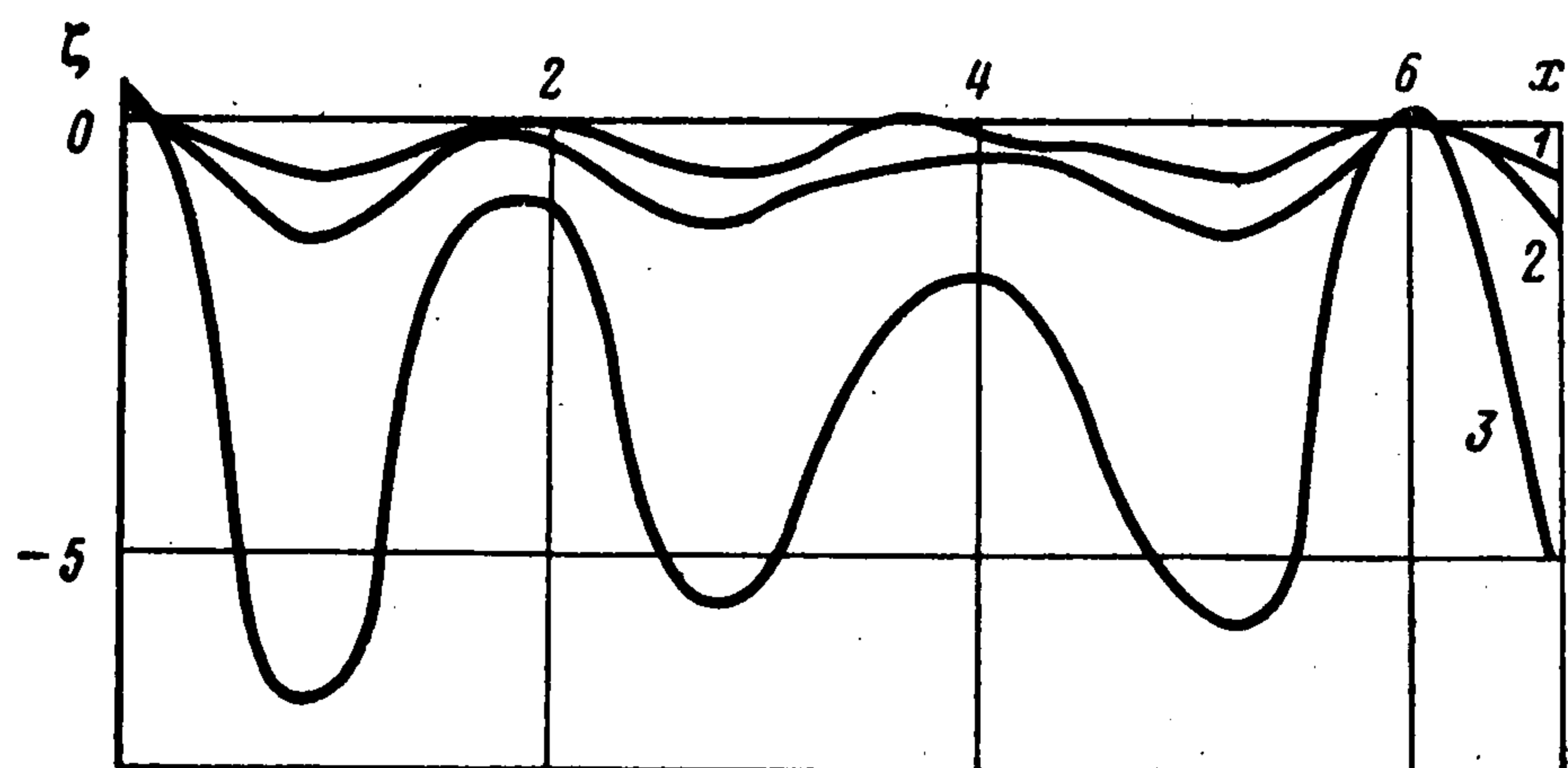
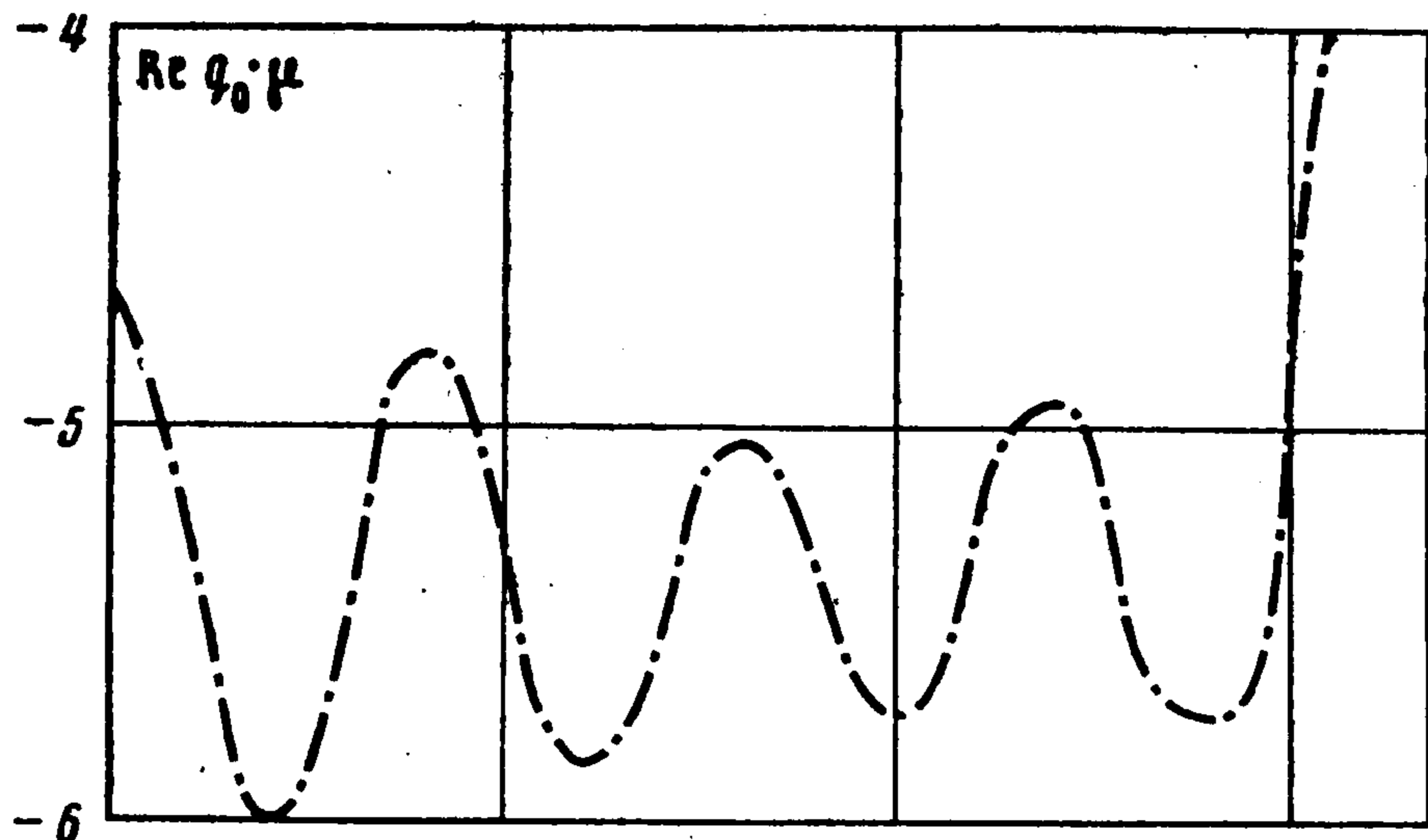
$$(3.1) \quad \int_{-a}^a q(\xi) k_{11}(z - \xi) d\xi = 2\mu U_r(z), \quad |z| \leq a$$

Как и ранее, $q(\xi)$ — контактные напряжения, $U_r(z)$ — смещение поверхности цилиндра под бандажом, $k_{11}(t)$ определяется формулами (1.2) — (1.4).

На фиг. 3 приведены кривые, показывающие распределение вещественных нулей (штриховые линии) и полюсов (сплошные линии) функции $K_{11}(u)$ для среды с потенциалом Мурнагана и значениями $\lambda = 926 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, $\mu = 475 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, $a = 319 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $b = -303 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $c = -78,4 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ и $S = 0$. Численный анализ показывает, что



Фиг. 3



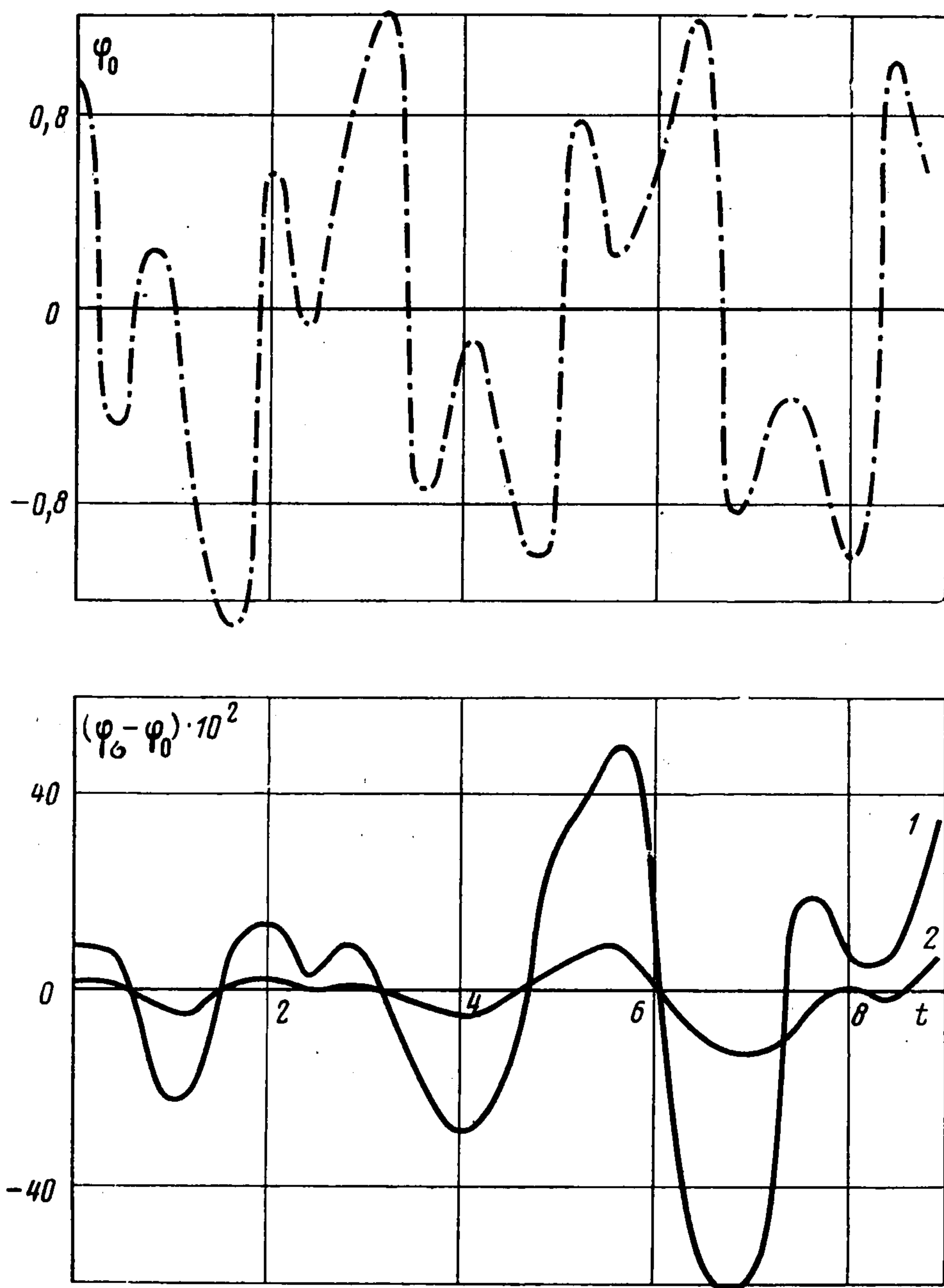
Фиг. 4

при $S \neq 0$ качественная картина не меняется, что дает право отметить [4, 5] однозначную разрешимость (3.1) в L_α , $\alpha > 1$.

4. Зная распределение нулей и полюсов $K_{11}(u)$, можно построить приближенное решение интегрального уравнения (3.1). Заменим $K_{11}(u)$ функцией [4, 5]

$$(4.1) \quad K^*(u) = c_{11} (u^2 + B^2)^{-1/2} \prod_{k=1}^n (u^2 - z_k^2) (u^2 - \zeta_k^2)^{-1}$$

Здесь $B \gg 1$ — заданный параметр аппроксимации, ζ_k ($k = 1, 2, \dots, m$) и z_k ($k = 1, 2, \dots, m_1$) — вещественные полюсы и нули $K_{11}(u)$, ζ_k ($k = m + 1, \dots, n$) z_k ($k = m_1 + 1, \dots, n$) — комплексные числа, определяемые из условия наименьшего отклонения $K^*(u)$ от $K_{11}(u)$ на вещественной оси [4, 5]. Выше (2.1), (2.2) приводился схематический вид решения в случае $U_r(x) = \exp(i\eta x)$ и аппроксимирующей функции



Фиг. 5

(4.1). Контактные напряжения можно представить в виде (N_k — числовые коэффициенты)

$$q(x) = K_{11}^{-1}(0) + \sum_{k=1}^n N_k [\exp(iz_k(a+x)) + \exp(iz_k(a-x))] + O[\exp(-B(a-|x|))]$$

Более подробный вид решений, а также формулы для N_k и R_k можно найти в [4, 5].

На фиг. 4 представлены построенные с помощью ЭВМ графики функций $\operatorname{Re} q_0 = \operatorname{Re} q_0 \mu^{-1}$ при $\eta = 0$ (случай плоского бандажа), $a = 7$, $\kappa_2 = 5,5$, $S = 0$ (штрихпунктирная линия). Кривые 1, 2, 3 соответствуют величине $\zeta = (\operatorname{Re} q_0 - \operatorname{Re} q_0) \cdot 10^2$ при $S = 5 \cdot 10^{-4} \mu$, $10^{-3} \mu$, $5 \cdot 10^{-3} \mu$.

На фиг. 5 представлены графики, описывающие перемещение свободной поверхности цилиндра. Причем, $\varphi_0(t)$ (2.2) при $S = 0$ — штрихпунктирная линия, $(\varphi_0 - \varphi_0^*) \cdot 10^2$ при $S = 5 \cdot 10^{-3} \mu$ — линия 1, $(\varphi_0 - \varphi_0^*) \cdot 10^2$ при $S = 10^{-3} \mu$ — линия 2.

Как видно, с увеличением начального напряжения влияние его резко увеличивается, причем тем больше, чем больше по модулю величина производной $\varphi(t)$.

Авторы благодарят Бабешко В. А. за внимание к работе и полезное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наукова думка, 1973. 270 с.
2. Гузь А. Н., Жук А. П., Махорт Ф. Г. Волны в слое с начальными напряжениями. Киев.: Наукова думка, 1976. 103 с.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
4. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
5. Калинин В. В. Об одной динамической задаче для бесконечного цилиндра. — ПММ, 1975, т. 39, вып. 3, с. 555.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
23.IV.1980

УДК 539.3

УДАР КОНУСОМ ПО ДЕФОРМИРУЕМОЙ НИТИ

Агаларов Д. Г., Нуриев Б. Р., Рахматулин Х. А.

Исследуется движение гибкой деформируемой нити и процесс распространения волн напряжений в ней при поперечном ударе конусом. Выводятся уравнения движения и находится аналитическое решение автомодельной задачи для произвольной однозначной зависимости напряжения от деформации. Исследуются возможные волновые схемы движения нити. Показано, что в случае полного облегания движение нити с одним изломом невозможно и впервые найдена новая волновая схема движения при поперечном ударе. На основе установленной волновой схемы с двумя изломами выводятся условия на волнах сильного разрыва. Дан численный расчет для схемы с линейным упрочнением и построены графики зависимости деформаций от скорости удара.

Теория поперечного удара по гибким нитям при больших отклонениях формы от первоначальной прямолинейной разработана в [1, 2]. Теория плоского движения нити хорошо освещена в литературе [3—6].

1. Уравнения движения. Пусть по бесконечной гибкой прямолинейной нити производится поперечный удар конусом с постоянной скоростью v_0 , причем ось конуса проходит через линию первоначального положения нити, а последняя в начале соударения соскакивает с вершины конуса. Обращая задачу, рассмотрим движение нити по поверхности конуса с поперечной скоростью v_0 в бесконечности.

Примем за независимые переменные время t и лагранжеву координату s_0 — расстояние рассматриваемой частицы от некоторой фиксированной точки в начальный момент времени. Положения частиц в процессе движения на поверхности конуса будем определять радиусом окружности $r(s_0, t)$, проходящей через рассматриваемую точку (s_0, t) , и центральным углом $\theta(s_0, t)$ этой окружности, отсчитываемым от некоторой фиксированной осевой плоскости.

Уравнение движения нити на поверхности конуса при отсутствии массовых сил и сил трения имеет вид

$$(1.1) \quad \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial s_0} + \frac{P}{F_0}$$

где $v(s_0, t)$ — скорость частиц нити, ρ_0 — начальная плотность, $T = \sigma t$ — сила натяжения, $\sigma(e)$ — напряжение, отнесенное к начальной площади поперечного сечения,