В заключение выясним, при каких условиях решения задач при действии внешнего давления в виде следящей и мертвой нагрузок совпадают. Из выражений (2.4), (3.1), (3.7) и (3.8) следует, что указанные решения идентичны, если выполняются условия

$$(m\Pi R/nL)^2 \ll 1, \; n^2 \gg 1 \qquad (3.9)$$

Таким образом, если параметры оболочки такие, что при действии мертвой нагрузки для классического решения [3] (см. также [4]) выполняются условия (3.9), то это решение справедливо также и при действии внешнего давления в виде следящей нагрузки. В этом случае более корректным является также и сравнение с результатами экспериментальных исследований при реализации внешнего давления в виде гидростатической нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии.— Прикл. механика, 1976, т. 12, № 6, с. 3.
2. *Гузь А. Н.* Определение «следящих» нагрузок при малых деформациях.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 10, с. 908.
3. *Mises R.* Der kritische Aussendruck für allseits belastete zylindrische Rohre.— In: Festschr. zum 70 Geburtstag von prof. A. Stodola, Zürich, 1929, p. 418.
4. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1967. 880 с.
5. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. Л.— М.: Гостехиздат, 1948. 212 с.
6. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 340 с.
7. *Гузь А. Н.* Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев: Наукова думка, 1971. 276 с.
8. *Гузь А. Н.* Основы теории устойчивости горных выработок. Киев: Наукова думка, 1977. 204 с.
9. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наукова думка, 1973, 270 с.
10. *Гузь А. Н.* Об устойчивости упругих сжимаемых тел при всестороннем сжатии.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 5, с. 936.
11. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. Киев: Наукова думка, 1979. 144 с.
12. *Гузь А. Н.* Достаточные условия применения метода Эйлера для случая «следящей» нагрузки, заданной на части поверхности тела.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 10, с. 901.

Киев

Поступила в редакцию 20.II.1979

ФОРМУЛА ДЛЯ МНИМЫХ ЧАСТЕЙ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИИ ОБОЛОЧКИ В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Симонов И. В.

Получена точная формула связи мнимых частей собственных значений задачи о колебании замкнутой оболочки в безграничной сжимаемой жидкости с интегралами типа интегралов энергии от собственных функций задачи. Замена этих функций на собственные функции задачи для несжимаемой жидкости приводит к оценке.

В задаче о вынужденных колебаниях оболочки в жидкости резонансные максимумы ограничены и обратно пропорциональны мнимым частям собственных значений. Их оценка представляет интерес также для сопоставления эффекта излучения с другими диссипативными эффектами.

1. Систему уравнений задачи о вынужденных колебаниях тонкой упругой замкнутой оболочки в безграничной идеальной сжимаемой жидкости под действием внутрен-

ней нагрузки Q можно представить в форме (множитель $e^{-i\Omega t}$ всюду опускается)

(1.1) $\mathbf{L}\mathbf{u} = \lambda(\mathbf{u} - \mathbf{A}\Phi) + \mathbf{Q} \quad (S)$

(1.2) $\Phi = K(\omega)\varphi \quad (D \cup S), \ \varphi = K'(\omega)\varphi - w$

$$\lambda = (c_1\omega/c_0)^2, \ \omega = \Omega R_0/c_1, \ \mathbf{A} = (0, 0, a), \ a = \rho_1 R_0/(\rho_0 h)$$

Здесь $\mathbf{L}$ — самосопряженный дифференциальный тензор — оператор теории оболочек, $\mathbf{u}$ — вектор перемещения оболочки (w — его нормальная компонента), Φ — потенциал смещений в жидкости, c — скорость звука, ρ — плотность (индексы 0, 1 относятся к материалу оболочки и к жидкости соответственно), R_0, h, S, D — характерный размер, толщина, срединная поверхность (поверхность Ляпунова) и внешность оболочки соответственно, φ — плотность потенциала, $K(\omega)$ и $K'(\omega)$ — интегральные операторы теории потенциала на S с ядрами $(2\pi\,|\,\mathbf{x}-\mathbf{y}\,|)^{-1}\exp(i\omega\,|\,\mathbf{x}-\mathbf{y}\,|)$ и $k' = k_n$ соответственно, где $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ — радиусы-векторы точек наблюдения и интегрирования, индекс n означает дифференцирование по направлению внешней нормали к поверхности (здесь к S в точке $\mathbf{x}$).

Соответствующая однородная задача ($\mathbf{Q} = 0$) является нелинейной несамосопряженной задачей на собственные значения (ее решения будем отмечать градусом).

В случае несжимаемой жидкости ($c_1 \to \infty$: уравнение Лапласа вместо уравнения Гельмгольца в D, в ядрах k и k' — единица вместо exp) спектр дискретен и расположен на действительной оси [1]. Учет сжимаемости сдвигает его в комплексную область [2]: $\lambda^\circ = \lambda + i\tau$, $\quad \omega^\circ = \omega^* + i\varepsilon$.

Формальное рассмотрение обнаруживает следующую особенность решений задачи на собственные значения. Знак ε таков, что Φ экспоненциально растут по пространственной переменной [3]

$$\Phi^\circ \sim |\,\mathbf{x}\,|^{-1}\exp\,[(i\omega^* - \varepsilon)\,|\,\mathbf{x}\,|\,], \ |\,\mathbf{x}\,| \to \infty \ (\varepsilon < 0)$$

Таким образом, эти решения не обладают конечным интегралом энергии (класс решений в $L_2(D \cup S)$ почти пуст: исключение составляют тривиальные случаи поворота оболочек вращения как жесткого целого [2]). Следующий подход позволяет обойти трудность спектрального анализа, обусловленную бесконечностью энергии.

Использование граничных интегральных уравнений (1.2) автоматически отделяет задачу на S от задачи продолжения Φ в D. Следовательно, можно ограничиться рассмотрением двумерной математической задачи на собственные значения. Этого достаточно для многих (в том числе и настоящей) целей. Например, можно представлять решения (1.1), (1.2) на S в виде рядов по собственным функциям, а затем вычислять Φ в D при помощи известной квадратуры, используя результат разложения $\Phi\,|_S$ и $\Phi_n\,|_S = w$ как исходный.

Найдем одно частное (вспомогательное) решение обратной задачи о вынужденных колебаниях. По заданному вектору перемещения $\mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ$ и частоте $\omega = (c/c_1)\sqrt{\lambda}$, где ω соответствует проекции λ° на действительную ось, а $\mathbf{u}^\circ$, Φ°, λ° — некоторое решение задачи на собственные значения с учетом замечания, сделанного выше, определим $\mathbf{Q}$ и Φ.

Функцию Φ дает решение задачи Неймана для уравнения Гельмгольца (I — единичный оператор)

$$\Phi = K(\omega)\,[K'(\omega) - I]^{-1}\,w^\circ$$

Отметим, что $\Phi\,|_S \neq \Phi^\circ$ по причине сдвига частоты с ω° до ω; Φ вместе с w удовлетворяет (1.2) и, что важно, $\Phi \in L_2(D \cup S)$.

Подставим $\mathbf{u}^\circ$, Φ, ω в (1.1). Используя равенство $\mathbf{L}\mathbf{u}^\circ = \lambda^\circ(\mathbf{u}^\circ - \mathbf{A}\Phi^\circ)$, получим

$$\mathbf{Q} = i\tau(\mathbf{u}^\circ - \mathbf{A}\Phi^\circ) - \mathbf{A}\lambda^\circ\delta\Phi \quad (\delta\Phi = \Phi^\circ - \Phi)$$

Это решение понадобится в дальнейшем. Ниже дается вывод одного энергетического соотношения.

2. Применим формулу Грина к функциям Φ и $\overline{\Phi}$ — решениям (1.1), (1.2) в области, ограниченной поверхностями S и S_R (сфера большого радиуса). Используя равенства $(\Delta + \omega^2)\,\Phi = 0$, $\operatorname{Im}\omega = 0$, получим

$$\int\limits_{S_R} (\overline{\Phi}\Phi_n - \Phi\overline{\Phi}_n)\,dS_R = \int\limits_{S} (\cdots)\,dS = \Gamma \tag{2.1}$$

Предельный переход $R \to \infty$, условие излучения Зоммерфельда, записанное в интегральной форме [4], и асимптотика решения на бесконечности позволяют преобразовать левую часть (2.1) к виду

$$\Gamma = 2i\omega\,(\Phi, \overline{\Phi})_\infty, \quad (\Phi, \overline{\Phi})_\infty = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{S_R} |\Phi|^2\,dS_R \tag{2.2}$$

С точностью до постоянного множителя величина Γ есть поток энергии, излучаемый на бесконечность за период.

Введем скалярное произведение

$$(f, g) = \int\limits_{S} fg\,dS$$

Для преобразования правой части (2.1) запишем уравнение (1.1) дважды: для $\mathbf{u}$ Φ и сопряженных к ним функций $\overline{\mathbf{u}}$, $\overline{\Phi}$. Умножим первое из них на $\overline{\mathbf{u}}$, а второе — на $\mathbf{u}$, проинтегрируем каждое по поверхности S и вычтем одно из другого

$$\begin{aligned}(\mathbf{L}\mathbf{u}, \overline{\mathbf{u}}) - (\mathbf{L}\overline{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) &= \lambda\,[(\mathbf{u}, \overline{\mathbf{u}}) - (\overline{\mathbf{u}}, \mathbf{u})] - \\ &- \lambda a\,[(\Phi, \overline{w}) - (\overline{\Phi}, w)] + (\mathbf{Q}, \overline{\mathbf{u}}) - (\overline{\mathbf{Q}}, \mathbf{u})\end{aligned} \tag{2.3}$$

Левая часть равенства (2.3) тождественно равна нулю в силу самосопряженности оператора $\mathbf{L}$. Равна нулю, очевидно, и первая квадратная скобка в правой части. Тогда из (2.1) — (2.3) следует

$$(\overline{\mathbf{Q}}, \mathbf{u}) - (\mathbf{Q}, \overline{\mathbf{u}}) = 2i\omega\lambda a\,(\Phi, \overline{\Phi})_\infty \tag{2.4}$$

Это интегральное равенство можно интерпретировать как уравнение баланса энергии: работа нагрузки $\mathbf{Q}$ на перемещении $\mathbf{u}$ за один период равна излученной за это же время энергии (с точностью до множителя). Подстановка частного решения (п.1) в (2.4) приводит к линейному уравнению относительно τ, решение которого

$$\frac{\tau}{\lambda} = -\frac{a\,\{\omega\,(\Phi, \overline{\Phi})_\infty - \operatorname{Im}(\delta\overline{\Phi}, w^\circ)\}}{(\mathbf{u}^\circ, \overline{\mathbf{u}}^\circ) - a\operatorname{Re}(\Phi^\circ, \overline{w}^\circ)} \tag{2.5}$$

В точной формуле (2.5) величина τ выражена через интегралы, имеющие смысл энергии, от собственных форм колебаний и производной от них функции Φ, а также $\operatorname{Re}\lambda^\circ$. Это позволяет строить хорошие оценки.

Так, произведем замену u°, ω на u', ω' — соответствующую форму и частоту колебаний оболочки в несжимаемой жидкости (по поводу выделения части спектра, переходящего в спектр упрощенной задачи при $c_1 \to \infty$, см. [2]). Предельный интеграл $(\Phi, \Phi)_\infty$ может быть выражен через значения плотности потенциала φ посредством формул [4]

$$\begin{aligned}(\Phi, \Phi)_\infty &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} |f(\theta, \psi)|^2 \sin\theta\,d\theta\,d\psi \equiv (f, f)_0 \\ f(\theta, \psi) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_S e^{i\omega\eta\mathbf{y}}\varphi(\mathbf{y})\,dS, \quad \varphi = (K'(\omega) - I)^{-1} w^\circ\end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь η — единичный вектор из центра в точку наблюдения с координатами $\sin\theta$, $\cos\psi$, $\sin\theta$, $\sin\psi$, $\cos\theta$.

В формулах (2.5), (2.6) заменим так же Φ° и φ на соответствующие Φ' и φ' из задачи для несжимаемой жидкости. Тогда получим следующую приближенную формулу, пригодную для практического использования:

$$\frac{\tau}{\lambda}=\frac{a\omega'(f',f')_0}{(u',u')-a(\Phi',w')}\,. \tag{2.7}$$

$$f'(\theta,\psi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_S e^{i\omega'\eta y}\varphi'(y)\,dS,\quad \varphi'=(K'(0)-I)^{-1}w'.$$

Формула (2.7) позволяет усовершенствовать решение вынужденной задачи для несжимаемой жидкости, имеющей полюса при $\lambda=\lambda'$. Учет потерь на излучение добавлением слагаемого $i\tau$ к λ' (аналогично учитываются другие виды диссипации) ликвидирует эти особенности и позволяет оценить величины резонансных максимумов.

Замечания. 1) Операторы K и K' на S по ω° имеют разложения по Тейлору и симметричны при $\mathrm{Re}\,\omega^\circ=0$. Из общих теорем об аналитичности по параметру [5] следует, что решения с учетом и без учета сжимаемости жидкости, а значит и (2.5) от (2.7), в окрестности $\omega'=0$ отличаются на величину $\sim\omega'^2$, если они в среднем на S равны нулю (иначе — на величину $\sim\omega'$). Из формул о числе частот [2] следует, что по крайней мере для оболочек вращения и серии частот квазипоперечных колебаний справедлива асимптотика: $\mathrm{Re}\,\omega^\circ\sim h^\beta$, $h\to0$ ($\beta>0$ и $\beta={}^1/_2$ для низших частот). Можно высказать утверждение: (2.7) — асимптотически точная формула при $h\to0$ для указанной серии.

2) В приложениях часто достаточно оценить порядок величины τ. При этом полезно иметь в виду критерий $\omega'/R_0\ll2\pi/l$, где l — характерная длина волны в оболочке. В этой области спектра сжимаемость жидкости мало влияет на решение в окрестности оболочки [6] и следует ожидать, что (2.7) дает удовлетворительное приближение к точному результату.

3) Используя данные [6] о собственных функциях оболочек простейших очертаний (сфера, цилиндр), можно получить явные зависимости τ от номера формы, частоты и параметров оболочки и жидкости.

4) В теории колебаний диссипативных систем известно соотношение

$$2\pi/q=\delta E/E\quad(\delta E\ll E)$$

где $q=\lambda/\tau$ — добротность, E — полная энергия системы, δE — потерянная энергия за период. Формула (2.7) имеет тот же смысл, поскольку в знаменателе стоит полная энергия оболочки с присоединенной массой жидкости. В свете сказанного ясно, что вопрос конечности энергии, затронутый в п. 1, здесь не тривиален.

Автор благодарит Гольденвейзера А. Л. и Лидского В. Б. за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крыжевич Г. Б.* О применении метода главных координат при исследовании колебаний упругих тел в идеальной жидкости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 2, с. 150—154.
2. *Васильев Д. Г.* Формула для функции распределения частот оболочки вращения, погруженной в жидкость.— Докл. АН СССР, 1979, т. 248, № 2, с. 325—328.
3. *Вайнберг Б. Р.* О собственных функциях оператора, отвечающих полюсам аналитического продолжения резольвенты через непрерывный спектр.— Матем. сб., 1972, т. 87 (129), № 2, с. 293—308.
4. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
5. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
6. *Гонткевич В. С.* Собственные колебания оболочек в жидкости. Киев: Наукова думка, 1964. 104 с.

Москва

Поступила в редакцию 28.I.1980